

BRANDS ชัมเมอร์แคมป์ ปีที่ 26



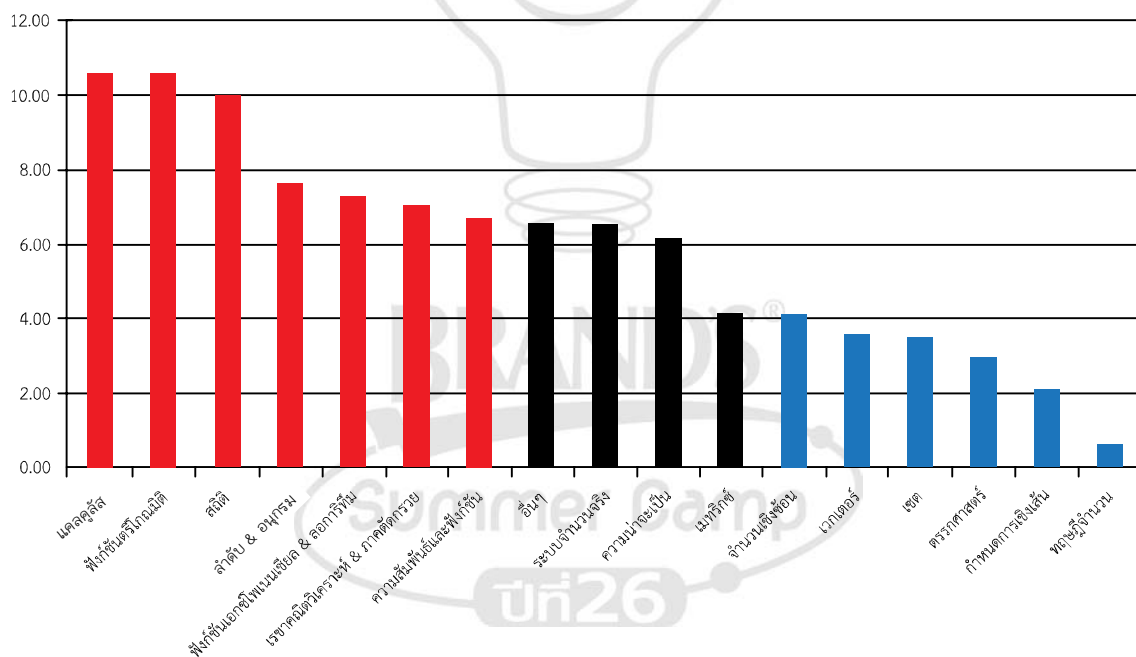
เอกสารประกอบคำบรรยาย
วิชา PAT 1

คณิตศาสตร์

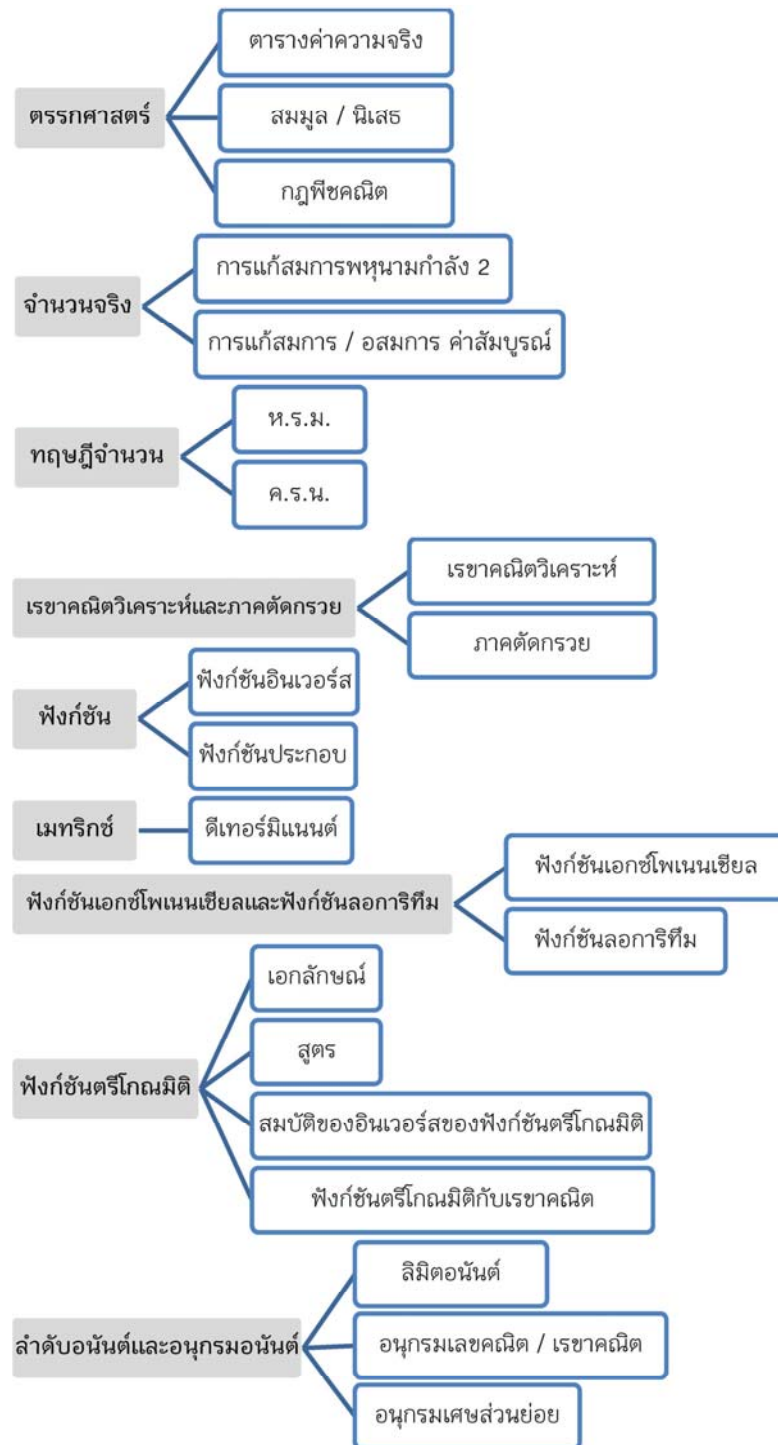
โดย อ.ภาคภูมิ อร่ามวารีกุล (พี่แท้ป)

สถาบันกวดวิชาคณิตศาสตร์ (A Level)

กราฟวิเคราะห์ข้อสอบ PAT 1



Main Map



ตรรกศาสตร์

■ ตัวเชื่อมประพจน์ และตารางค่าความจริง

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

■ ความหมายของสมมูลและนิเสธ

สมมูล คือ มีค่าความจริง “ตรงกัน” ทุกกรณี

นิเสธ คือ มีค่าความจริง “ตรงข้ามกัน” ทุกกรณี

■ กฎพีชคณิต

$$1. p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

$$2. (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$3. \sim(\sim p) \equiv p$$

$$4. p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$5. \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$6. p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

$$7. p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$$

1. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใดๆ

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้าประพจน์ $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ และประพจน์ p มีค่าความจริงเป็นจริง

แล้วสรุปได้ว่าประพจน์ s มีค่าความจริงเป็นจริง

(ข) ประพจน์ $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$ สมมูลกับประพจน์ $[q \rightarrow (p \rightarrow r)] \wedge [p \rightarrow (q \rightarrow s)]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

2. กำหนดให้ p, q, r, s และ t เป็นประพจน์ ซึ่ง

$p \rightarrow (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

$p \leftrightarrow (s \vee t)$ มีค่าความจริงเป็น จริง

ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) $(q \wedge s) \rightarrow (p \wedge q)$

2) $(s \wedge t) \rightarrow \sim q$

3) $(q \vee s) \leftrightarrow p$

4) $(p \rightarrow r) \rightarrow s$

3. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $ab > 0$

ให้ p แทนประพจน์ “ถ้า $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”

และ q แทนประพจน์ “ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$ ”

ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $(p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim p)$

2) $(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$

3) $(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow p)$

4) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$

4. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใดๆ ประพจน์ $[(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \rightarrow [(r \vee s) \wedge (r \vee \sim s)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มี (PAT 1 มี.ค. 55)

1) $p \rightarrow r$

2) $q \rightarrow r$

3) $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$

4) $(q \vee r) \wedge (q \vee s)$

5. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ (PAT 1 ต.ค. 55)

1) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

2) $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

3) $[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p] \rightarrow (p \rightarrow q)$

4) $[(p \wedge q) \rightarrow \sim q] \rightarrow (p \rightarrow q)$

ระบบจำนวนจริง

■ การแก้สมการพหุนามกำลัง 2

ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ แล้ว $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

โดยที่ $b^2 - 4ac$ — $\begin{cases} > 0 ; \text{ มี 2 คำตอบ} \\ &= 0 ; \text{ มี 1 คำตอบ} \\ &< 0 ; \text{ ไม่มีคำตอบใน } \mathbb{R} \end{cases}$

สูตรที่ควรรู้

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

■ การแก้สมการ / อสมการ คำสับบุรณ์

1. $|P(x)| = Q(x) \longrightarrow P(x) = \pm Q(x)$
 $|P(x)| < Q(x) \longrightarrow -Q(x) < P(x) < Q(x)$
 $|P(x)| > Q(x) \longrightarrow P(x) < -Q(x) \text{ หรือ } P(x) > Q(x)$
2. $|P(x)| = P(x) \longrightarrow P(x) \geq 0$
 $|P(x)| = -P(x) \longrightarrow P(x) \leq 0$
3. $|P(x)| = |Q(x)| \longrightarrow (P(x))^2 = (Q(x))^2$
4. $x^2 = |x|^2$
5. ถ้ามี $||$ หลายพจน์ ให้ปลด $||$, แยกกรณีคิด
6. $|a| + |b| = |a + b| \longrightarrow ab \geq 0$
 $|a| + |b| = |a - b| \longrightarrow ab \leq 0$
 $|a| + |b| > |a + b| \longrightarrow ab < 0$
 $|a| + |b| \geq |a + b| \longrightarrow \mathbb{R}$

6. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริงบวก

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ประพจน์ $\forall x [x^2 - 5x + 4 < x^2 + 6x + 5]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

(ข) ประพจน์ $\forall x [x^2 - 1 \geq 2x - 2]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

7. ถ้า A แทนเซตของเซตคำตอบของสมการ $|2 - 2x| + |x + 2| = 4 - x$ แล้วเซต A เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี (PAT 1 เม.ย. 57)

1) $(-4, 0)$ 2) $(-1, 1)$ 3) $(0, 4)$ 4) $(-3, 2)$

8. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และ $a < b$ เซตคำตอบของสมการ $|x - a| - |x - b| = b - a$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $\{b\}$ 2) $(a, b]$ 3) $[b, \infty)$ 4) $\left(\frac{a+b}{2}, \infty\right)$

9. ให้ A แทนเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$

และให้ B แทนเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $|x^2 - 2x| + x^2 > 4$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $A \subset B$

(ข) จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 2

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

10. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \{x \in R \mid x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 4} > 3x + 2\}$

แล้วเซต A เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$ | 2) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ |
| 3) $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ | 4) $(-1, \infty)$ |

11. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

ให้ $A = \{x \in I \mid |2x + 7| \leq 9\}$

และ $B = \{x \in I \mid |x^2 - x - 1| > 1\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) จำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 7

(ข) $A - B$ เป็นเซตว่าง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 55)

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

12. ถ้า A แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด ที่สอดคล้องกับอสมการ $3|x - 1| - 2x > 2|3x + 1|$

และ B แทนเซตคำตอบของอสมการ $x(x + 2)(x + 1)^2 < 0$

แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 55)

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1) เซต $A - B$ มีสมาชิก 5 ตัว | 2) $A \cup B = A$ |
| 3) เซต $A \cap B$ มีสมาชิก 1 ตัว | 4) $(A - B) \cup (B - A) = B$ |

ทฤษฎีจำนวน

■ ห.ร.ม.

- นิยาม $(a, b) = d$ ก็ต่อเมื่อ
1. $d|a$ และ $d|b$
 2. ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c|d$

- สมบัติ
1. $d = ax + by$ โดยที่ $x, y \in \mathbb{Z}$
 2. $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$

■ ค.ร.น.

- นิยาม $[a, b] = c$ ก็ต่อเมื่อ
1. $a|c$ และ $b|c$
 2. ถ้า $a|d$ และ $b|d$ แล้ว $c|d$

สมบัติ $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$

13. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า ห.ร.ม. ของ a และ 2520 เท่ากับ 60

และ ค.ร.น. ของ a และ 420 เท่ากับ 4620 แล้ว

a อยู่ในช่วงในข้อใดต่อไปนี้ (สามัญ 56)

- 1) $[200, 350)$ 2) $[350, 500)$ 3) $[500, 650)$ 4) $[650, 800)$ 5) $[800, 950)$

14. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 166 และ 1101 แล้วได้เศษเหลือ 1 แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด (สามัญ 57)

15. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $m = n + 2$ และ ค.ร.น ของ m และ n เท่ากับ 180 แล้ว ผลคูณ mn มีค่าเท่ากับเท่าใด (สามัญ 57)

16. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนนับ n ซึ่ง ค.ร.น. ของ 720 และ n มีค่าเท่ากับ 10800 แล้วสมาชิกของ S ที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าเท่ากับเท่าใด (สามัญ 55)

17. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $ab - 25a - 25b = 1575$ ถ้า ห.ร.ม. $(a, b) = 5$ แล้ว $|a - b|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (สามัญ 55)

1) 15

2) 45

3) 90

4) 210

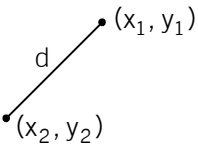
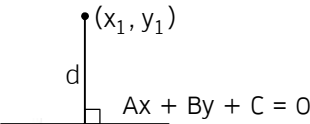
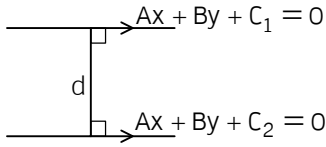
5) 435

18. เศษเหลือจากการหาร $4^{999} + 9^{555}$ ด้วย 5 มีค่าเท่ากับเท่าใด (สามัญ 57)

19. ถ้า d เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และจำนวน 3456, 2561 และ 1308 หารด้วย d มีเศษเหลือเท่ากันคือ r แล้ว $d + r$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

■ เรขาคณิตวิเคราะห์

 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	 $d = \frac{ Ax_1 + By_1 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	 $d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
--	--	---

■ ภาคตัดกรวย

วงกลม	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$; จุดศูนย์กลาง คือ (h, k) รัศมี = r
พาราโบลา	$(x - h)^2 = 4c(y - k)$; $c > 0$ หาย, $c < 0$ คว่ำ $(y - k)^2 = 4c(x - h)$; $c > 0$ ขวา, $c < 0$ ซ้าย
วงรี	นอน : $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ ตั้ง : $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$ $a^2 = b^2 + c^2$; ค่าความเยื้องศูนย์กลาง $(e) = \frac{c}{a}$; $0 < e < 1$
ไฮเพอร์โบลา	นอน : $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ ตั้ง : $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$ $c^2 = a^2 + b^2$

20. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$; $A, B, C \in \mathbb{I}$ โดยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 1)$ และแกนเอกยาวเป็น 2 เท่าของแกนโท ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)
- $A + B + C = 0$
 - ความเยื้องศูนย์กลางของวงรีเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{5}$
 - วงรีมีจุดศูนย์กลางร่วมกับจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ และแกนเอกยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม
 - ผลบวกของระยะทางจากจุด $(2, 6)$ ไปยังโฟกัสทั้งสองของวงรีเท่ากับ 20 หน่วย

21. ให้ F เป็นโฟกัสของพาราโบลา $4y = x^2 - 6x + 13$ ถ้าไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมบัตินี้

- (ก) แกนตามขวางขนานแกน y
- (ข) จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลายู่ที่ F
- (ค) โฟกัสหนึ่งของไฮเพอร์โบลาคือ $(3, 2 + 2\sqrt{13})$
- (ง) แกนลึงยุคยาว 12 หน่วย

แล้วไฮเพอร์โบลารูปนี้มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 เม.ย. 57)

- 1) $4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y + 144 = 0$
- 2) $4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y - 36 = 0$
- 3) $9y^2 - 4x^2 + 24x + 36y - 144 = 0$
- 4) $9y^2 - 4x^2 + 24x + 36y + 36 = 0$

22. ถ้าวงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลาง คือ $C(h, k)$ อยู่บนเส้นตรง $x + y + 4 = 0$ และวงกลมนี้ผ่านจุด $A(-5, -2)$ และจุด $B(-2, 5)$ แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

23. ให้ A เป็นจุดตัดของเส้นตรง $x - 3y + 1 = 0$ และ $2x + 5y - 9 = 0$ ถ้าเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ m เมื่อ $m < 0$ มีระยะห่างจากจุดกำเนิด $(0, 0)$ เท่ากับ k หน่วย โดยที่ $k^2 + 2m = 1$ และผ่านจุด A แล้วสมการของเส้นตรง L ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 เม.ย. 57)

- 1) $2x + y - 5 = 0$
- 2) $3x + y - 7 = 0$
- 3) $x + 2y - 4 = 0$
- 4) $x + 3y - 5 = 0$

24. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ ในระนาบ ถ้าผลบวกของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ไปยังจุด $(0, -2)$ และระยะทาง จากจุด $P(x, y)$ ไปยังจุด $(2, -2)$ เท่ากับ $2\sqrt{5}$ แล้วเซตของจุด $P(x, y)$ คือ $\{(x, y) | 4x^2 + 5y^2 - 8x + 20y - 12 = 0\}$

(ข) จุด $(1, 1)$ เป็นจุดบนพาราโบลา $y = x^2$ อยู่ใกล้กับเส้นตรง $y = 2x - 4$ มากที่สุด
ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

25. แกนเอกของวงรีเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ กับวงกลม $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$ และโฟกัสจุดหนึ่งของวงรีอยู่บนเส้นตรง $x + 2\sqrt{3} = 0$ สมการของวงรีตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 55)

1) $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$

2) $x^2 + 4y^2 + 24y + 20 = 0$

3) $4x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

4) $4x^2 + y^2 - 32x + 48 = 0$

26. กำหนดให้ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 - y^2 - 2x = 0$ ถ้าพาราโบลาที่มีโฟกัสเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดตัดของเส้นตรง $y = 2x$ กับเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา และมีเส้นไทรแอสคริปต์เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา แล้วสมการของพาราโบลาข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $9x^2 + 12x + 12y - 3 = 0$

2) $9x^2 + 12x + 12y + 8 = 0$

3) $9x^2 + 6x - 12y - 3 = 0$

4) $9x^2 + 6x + 12y + 5 = 0$

27. พาราโบลาที่มีจุดโฟกัส F อยู่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ และมีจุดยอด V อยู่ที่จุดตัดของวงกลมกับแกน y ถ้า A และ B เป็นจุดบนพาราโบลาซึ่งส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ผ่านจุดโฟกัส F และตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม VAB เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 55)
- 1) 9 ตารางหน่วย 2) 12 ตารางหน่วย 3) 18 ตารางหน่วย 4) 36 ตารางหน่วย

28. กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ เมื่อ $a, b > 0$ และให้ C_1 และ C_2 เป็นวงกลมสองวง ที่ต่างกัน โดยที่มีรัศมีเท่ากันและวงกลมทั้งสองวงต่างสัมผัสกับเส้นตรง L ที่จุดเดียวกัน ถ้าวงกลม C_1 มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ แล้วสมการของวงกลม C_2 คือข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)
- 1) $(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2) - 4ab(a^2 + b^2)(bx + ay) + 3a^2b^2 = 0$
2) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - 4ab(bx + ay) + 3a^2b^2 = 0$
3) $(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2) - 4ab(a^2 + b^2)(bx + ay) + 5a^2b^2 = 0$
4) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - 4ab(bx + ay) + 5a^2b^2 = 0$

ฟังก์ชัน

■ ฟังก์ชันอินเวอร์ส

1. $D_{f^{-1}} = R_f$ และ $R_{f^{-1}} = D_f$
2. $(f^{-1})^{-1} = f$
3. $f(\Delta) = \square \rightarrow \Delta = f^{-1}(\square)$

■ ฟังก์ชันประกอบ

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
2. $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

29. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$

ให้ $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = ax + 2$ และ $g(x) = x^3 - 3x(x - 1)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ถ้า $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 1$ แล้ว $(g \circ f)(a)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

30. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ $f(x + g(y)) = 2x + y + 15$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(g \circ f)(x) = 2x + 15$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

(ข) $g(25 + f(57)) = 75$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

31. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดยที่ $(f \circ g)(x) = 4x - 5$ และ $g^{-1}(x) = 2x + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $4(f^{-1} \circ g)(2x + 1) = g(x) + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

(ข) $(g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g))(x) = f^{-1}(x) + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก และ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด และ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

32. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

กำหนด $g(x) = x^2 + x + 3$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน และสอดคล้องกับ

$$(f \circ g)(x) + 2(f \circ g)(1 - x) = 6x^2 - 10x + 17$$

$$2(f \circ g)(x) + (f \circ g)(1 - x) = 6x^2 - 2x + 13$$

ค่าของ $f(383)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 55)

33. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R โดยที่ $f(x + 5) = x^3 - x^2 + 2x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ $g^{-1}(2x - 1) = x + 4$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(f - g)(0) < -169$

(ข) $\{x \in I \mid (g \circ f)(x) + 5 = 0\}$ เป็นเซตว่าง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 55)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

34. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง โดยที่ $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x + 1}$ เมื่อ

$x \neq -1$ แล้วเรนจ์ของฟังก์ชัน f เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $\{x \in R \mid x^2 + 6x - 7 \geq 0\}$

2) $\{x \in R \mid x^2 + 3x - 10 \geq 0\}$

3) $\{x \in R \mid x^2 + x - 12 \geq 0\}$

4) $\{x \in R \mid x^2 - 6x - 16 \geq 0\}$

35. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติสอดคล้องกับ $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq -1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 54)

1) $f(f(x)) = -x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

2) $f(-x) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 1$

3) $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 0$

4) $f(-2 - x) = -2 - f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

เมทริกซ์

■ ดีเทอร์มิแนนต์

กรณี $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

กรณี $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

สมบัติของ $\det$

1. $\det(A^t) = \det(A)$
2. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
3. $\det(A^n) = (\det A)^n$
4. $\det(kA) = k^n \det(A)$
5. $\det(I) = 1$ และ $\det(O) = 0$
6. ถ้าเมทริกซ์มีสมาชิกแถวใดหรือหลักใดเป็นศูนย์ทุกตัว จะได้ว่า $\det$ เท่ากับ 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

7. ถ้าเมทริกซ์มีสองแถวใดหรือสองหลักใดเหมือนกัน จะได้ว่า $\det$ เท่ากับ 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

8. ค่า $\det$ ของเมทริกซ์สามเหลี่ยมจะเท่ากับ ผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

9. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการสลับสองแถวใดหรือสองหลักใดแล้ว $\det(B) = -\det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วย $k \in \mathbb{R}$ แล้ว $\det(B) = k \cdot \det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

11. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วย $k \in \mathbb{R}$ แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง หรือคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วย $k \in \mathbb{R}$ แล้วนำไปบวกกับอีกหลักหนึ่ง แล้ว $\det(B) = \det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + ka_{11}) & (a_{22} + ka_{12}) & (a_{23} + ka_{13}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

36. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกที่ $abc = 1$ และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

การคูณมิติ 3×3 แล้ว $\det(A^2 + A + I) = 0$

(ข) ให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} a_1 + 2b_1 - 3c_1 & a_2 + 2b_2 - 3c_2 & a_3 + 2b_3 - 3c_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{bmatrix}$

เมื่อ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\det(A) = 3$ แล้ว $\det(B) = -18$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

37. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $ab \neq 0$ และเมทริกซ์ A

สอดคล้องกับสมการ $2(A - I)^{-1} = 4I - A$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $ab = 2$

(ข) $\det(3A^2 A^t A^{-1}) = 324$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

38. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ใดๆ มีมิติ 2×2 ให้ x เป็นจำนวนจริงที่

สอดคล้องกับ $\det(A^2 + xI) = 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\det(A + xI) = 0$

(ข) $\det(A^2 + xI - B) = \det(B^t)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

39. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ ที่มีมิติ 3×3 และ $\det(A) \neq 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(\det(A))^3 = \det(\text{adj}(A))$

(ข) ถ้า $A^2 = 2A$ แล้ว $\det(A) = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 55)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

40. กำหนดให้ A , B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 โดยที่ $\det B \neq 0$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\det(B^t C B^{-1}) = -4$ แล้ว $\det(C^t A C)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

41. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเท่ากัน โดยที่ $\det(A) \neq 0$ และ $\det(B) \neq 0$ ถ้า $\det(A^{-1} + B^{-1}) \neq 0$ และ $\det(A + B) \neq 0$ แล้ว $(A + B)^{-1}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})A^{-1}$

2) $B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}$

3) $B(A^{-1} + B^{-1})A$

4) $B(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

■ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

สมบัติของเลขยกกำลัง

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. (ab)^m = a^m b^m$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$6. a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

การแก้สมการ Expo

$$1. a^x = a^y \rightarrow x = y$$

$$2. a^x = b^x \rightarrow x = 0$$

การแก้อสมการ Expo

$$1. a^x > a^y$$

$$2. a^x > b^x$$

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $x < y$

$$\text{จัดรูปเป็น } \left(\frac{a}{b}\right)^x > 1 \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x > \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

ถ้า $a > 1$ แล้ว $x > y$

แล้วพิจารณาตามข้อ 1.

■ ฟังก์ชันลอการิทึม

สมบัติ log

$$1. \log_a 1 = 0$$

$$2. \log_a a = 1$$

$$3. \log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$$

$$4. \log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$5. \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} = \frac{1}{\log_x a}$$

$$6. \log_a x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$7. y^{\log_a x} = x^{\log_a y}$$

$$8. a^{\log_a x} = x$$

ข้อควรรู้ $\log_{10} x = \log x$, $\log_e x = \ln x$

$$\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 = 1 - \log 2$$

การแก้สมการ log

$$1. \log_a x = \log_a y \rightarrow x = y$$

$$2. \log_a x = \log_b x \rightarrow x = 1$$

การแก้อสมการ log

$$1. \log_a x > \log_a y$$

$$2. \log_a x > \log_b x$$

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $x < y$

$$\text{จัดรูปเป็น } \frac{\log_c x}{\log_c a} > \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

ถ้า $a > 1$ แล้ว $x > y$

!!! การแก้สมการ / อสมการ log ต้องตรวจคำตอบ

$$\log_\Delta \square \rightarrow \square > 0 \text{ และ } \Delta > 0 \text{ แต่ } \Delta \neq 1$$

42. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $3^{(1+2x)} + 9^{(2-x)} = 244$ แล้วเซต A เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี (PAT 1 ต.ค. 55)

1) $(-1, 4)$

2) $(-2, 0.5)$

3) $(0, 5)$

4) $(-3, 0)$

43. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $\log_2(x + 7)^2 + 4\log_4(x - 3) = 3\log_8(64x^2 - 256x + 256)$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

44. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริงและ ถ้า

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^{2x} - 34(15^{x-1}) + 5^{2x} = 0\} \text{ และ}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \log_5(5^{1/x} + 125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}\right\}$$

แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

45. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x - 2\log_{64} x = 7$

แล้ว x สอดคล้องกับสมการ $x - 3\sqrt{x} = 4$

(ข) ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ

$$(1 - a)\log_3 2 = 2 - \log_3 5$$

$$(3 + b)\log_5 2 = 2 - \log_5 3 \text{ และ}$$

$$(3 + c)\log_7 2 = 4\log_7 3 - \log_7 5$$

$$\text{แล้ว } 2a + b - c = 2 + 5\log_2 5 - 9\log_2 3$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

46. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุดที่เป็นคำตอบของสมการ $\sqrt{14 + 3x - x^2} - \sqrt{9 + 5x - x^2} = 1$ แล้วค่าของ

$$\left| \frac{4 - 12x^{-1} + 9x^{-2}}{3x^{-2} - 2x^{-1}} \right| \text{ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)}$$

47. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $\log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + \log_6 5$

และให้ B แทนเซตคำตอบของสมการ $x + \sqrt{1 - x^2} = 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}$

จำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

48. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{3x+2} + 2\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x+10} + 6\sqrt{3x+1} = 14$

และให้ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^2 - 6x + 11 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 25$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

49. กำหนดให้ $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2^{2x} - 2^{x+2} > 2^{x+1/2} - \sqrt{32} \right\}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง จงหาจำนวนสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มของ $R - A$ (PAT 1 ธ.ค. 54)

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

50. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $(x-2)^{x^2+2} < (x-2)^{2x+10}$ เมื่อ $x > 2$ แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 55)

1) (2, 3)

2) (3.5, 5)

3) (2.5, 4)

4) (4, 7)

51. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $x^2 \log_4(x^2 + 2x - 1) + x \log_{1/2}(x^2 + 2x - 1) = 2x - x^2$ และให้ $B = \{x^2 \mid x \in A\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

■เอกลักษณ์ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

■ สูตร ผลบวก/ผลต่าง

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

มุม 3 เท่า

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

มุม 2 เท่า

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

มุม $\frac{1}{2}$ เท่า

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

■ สมบัติของอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สมบัติ arc มุมลบ

$$\arcsin (-x) = -\arcsin x$$

$$\arctan (-x) = -\arctan x$$

$$\operatorname{arccsc} (-x) = -\operatorname{arccsc} x$$

$$\arccos (-x) = \pi - \arccos x$$

$$\operatorname{arccot} (-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

$$\operatorname{arcsec} (-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$$

สมบัติส่วนกลับ

$$\arcsin x = \operatorname{arccsc} \frac{1}{x}$$

$$\arccos x = \operatorname{arcsec} \frac{1}{x}$$

$$\arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}; x > 0$$

สมบัติยูบ arctan

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}; xy < 1$$

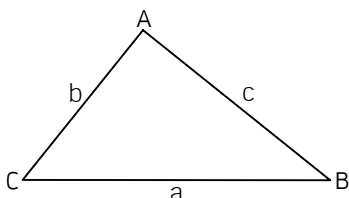
สมบัติคู่ co-function

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}$$

■ ฟังก์ชันตรีโกณมิติกับเรขาคณิต



Law of Sine

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Law of Cosine

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

52. $\cot \left(\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

2) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

3) $\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

4) $\sqrt{3}$

53. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B และมุม C เป็นมุมแหลม โดยที่ $25 \cos B - 13 \cos C = 15$, $65(\cos B + \cos C) = 77$ และด้านตรงข้ามมุม C ยาว 20 หน่วย ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

54. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ และมุม A มีขนาดเป็นสองเท่าของมุม B ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) $c^2 = a^2 + ab$

2) $c^2 = b^2 + ab$

3) $a^2 = b^2 + bc$

4) $a^2 = c^2 + bc$

55. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้ามุม A มีขนาดมากกว่า 90° มุม B มีขนาด 45° และ $\sqrt{2}c = (\sqrt{3} - 1)a$ แล้ว $\cos^2(A - B - C) + \cos^2 B + \cos^2 C$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)

56. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ โดยที่ $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ แล้ว $\sin C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ต.ค. 55)

- 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) 1

57. ค่าของ $\sec^2 \left(2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} \right)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

58. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $3 \sin (x - y) = 2 \sin (x + y)$ แล้ว $(\tan^3 x)(\cot^3 y)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 57)

- 1) 8 2) 27 3) 64 4) 125

59. กำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $16 \sin^3 \theta \cos^2 \theta = 2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta$

(ข) $\sin 3\theta = (\sin 2\theta + \sin \theta)(2 \cos \theta - 1)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 57)

- 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

60. ถ้า $\cos 5\theta = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

61. กำหนดให้ $\sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ โดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ถ้า $a = \frac{\tan \theta - \tan 2\theta}{\cos \theta - \cos 2\theta}$ และ $b = \frac{\sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta}$ แล้วค่าของ $a^4 + b^4$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)

62. กำหนดให้ $0^\circ < \theta < 15^\circ$ ค่าของ $\arctan\left(\frac{3 \cos \theta}{1 - 3 \sin \theta}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{\cos \theta}{3 - \sin \theta}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 เม.ย. 57)

- 1) $\arctan (\cot \theta)$ 2) $\arctan (\tan \theta)$ 3) $\arctan (\sin \theta)$ 4) $\arctan (\cos \theta)$

63. ให้ A แทนเซตคำตอบของจำนวนจริง $x \in [0, 2\pi)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $2^{(1+3\sin x)} - 5 \cdot 2^{2\sin x} + 2^{(2+\sin x)} = 1$ จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)

64. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $\sin^2 B = \sin A \cos A$

แล้ว $\cos 2B = 2 \cos^2 (45^\circ + A)$

(ข) ถ้า $0 \leq A, B \leq \frac{\pi}{2}$ สอดคล้องกับ $\sin A = \sqrt{2} \sin B$ และ $\sqrt{3} \sec B = \sqrt{2} \sec A$ แล้ว

$$\sin 10A + \cos 10B = 0.5$$

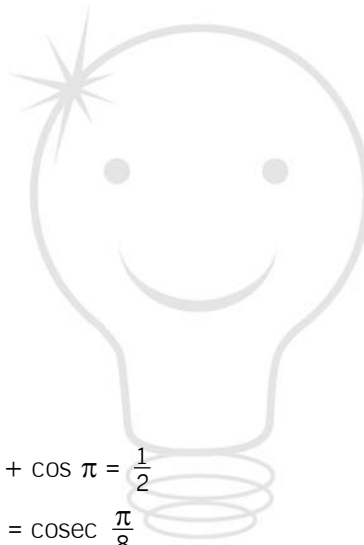
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด



65. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \pi = \frac{1}{2}$

(ข) $\tan \frac{7\pi}{16} - \tan \frac{3\pi}{8} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$

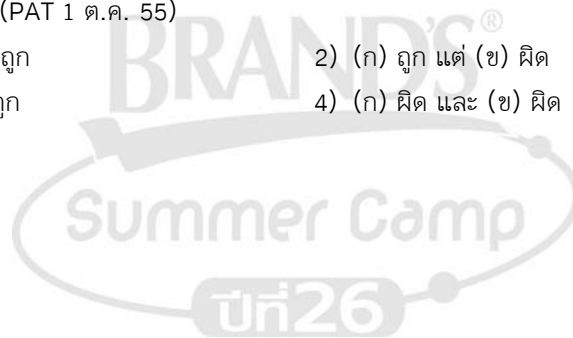
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 55)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด



ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

■ ลิมิตอนันต์

เศษส่วนพหุนาม

1. ดีกรีสูงสุดของ “เศษ < ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 2n + 3}{n^4 + 4} = 0$$

2. ดีกรีสูงสุดของ “เศษ = ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n^2 - 4n + 1}{4n^3 + 2n^2 - 3} = \frac{3}{4}$$

3. ดีกรีสูงสุดของ “เศษ > ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2}{n^2 + 2n + 1} \rightarrow \text{หาค่าไม่ได้}$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1. ฐานสูงสุดของ “เศษ < ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{5^n + 1} = 0$$

2. ฐานสูงสุดของ “เศษ = ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{4 \cdot 3^n + 2^n} = \frac{3}{4}$$

3. ฐานสูงสุดของ “เศษ > ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 1}{3^{n+1} + 2^n} \rightarrow \text{หาค่าไม่ได้}$$

■ อนุกรม เลขคณิต / เรขาคณิต

	จำกัด	อนันต์
อนุกรมเลขคณิต	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	$0 + 0 + 0 + \dots = 0$
อนุกรมเรขาคณิต	$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$	$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} ; r < 1$

■ อนุกรมเศษส่วนย่อย

$$\sum \frac{1}{n(n+d)} = \frac{1}{d} \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+d} \right)$$

$$\sum \frac{1}{n(n+d)(n+2d)} = \frac{1}{2d} \sum \left(\frac{1}{n(n+d)} - \frac{1}{(n+d)(n+2d)} \right)$$

66. กำหนดให้ $a_n = \frac{n^2}{16n^2 - 4}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 เม.ย. 57)
- 1) 17 2) 25 3) 145 4) 257

67. กำหนดให้ $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(6 - 3a_n)}{\sqrt{n^2 + 5n + 1}}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)

68. กำหนดให้ $a_n = \sqrt{n^2 + 16n + 3} - \sqrt{n^2 + 2}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a_n}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)
- 1) 0 2) 1 3) 2 4) 8

69. กำหนดให้ $a_n = \sin \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) - \cos n\pi$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ และ $b_n = 6 \cos \left(2n\pi - \frac{\pi}{3} \right)$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ผลบวกของอนุกรม $\frac{a_1}{b_1} + \left(\frac{a_2}{b_2} \right)^2 + \left(\frac{a_3}{b_3} \right)^3 + \dots + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^n + \dots$ เท่ากับ

ข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 55)

1) $\frac{2}{5}$

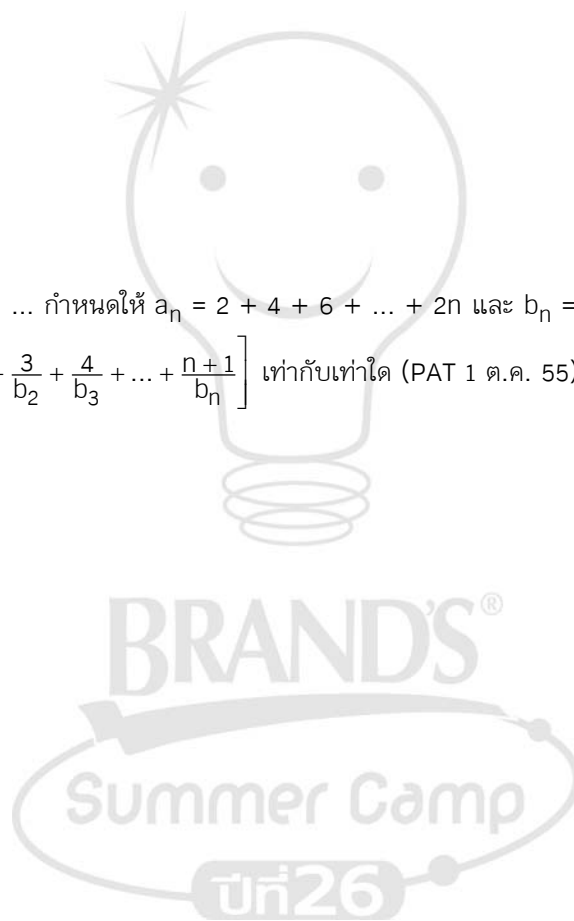
2) $-\frac{2}{5}$

3) 2

4) -2

70. สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ กำหนดให้ $a_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ และ $b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{b_1} + \frac{3}{b_2} + \frac{4}{b_3} + \dots + \frac{n+1}{b_n} \right]$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)



เฉลยตัวอย่างข้อสอบ

- | | | | | |
|---------|----------|--------|---------|----------|
| 1. 1) | 2. 1) | 3. 3) | 4. 3) | 5. 3) |
| 6. 4) | 7. 4) | 8. 3) | 9. 3) | 10. 2) |
| 11. 2) | 12. 1) | 13. 4) | 14. 55 | 15. 360 |
| 16. 675 | 17. 1) | 18. 3 | 19. 234 | 20. 4) |
| 21. 3) | 22. 14.5 | 23. 1) | 24. 3) | 25. 2) |
| 26. 4) | 27. 3) | 28. 2) | 29. 9 | 30. 4) |
| 31. 1) | 32. 763 | 33. 4) | 34. 3) | 35. 4) |
| 36. 2) | 37. 3) | 38. 1) | 39. 4) | 40. 320 |
| 41. 2) | 42. 1) | 43. 5 | 44. 4 | 45. 1) |
| 46. 4 | 47. 3 | 48. 11 | 49. 2) | 50. 3) |
| 51. 4 | 52. 4) | 53. 54 | 54. 3) | 55. 2 |
| 56. 3) | 57. 2 | 58. 4) | 59. 1) | 60. 681 |
| 61. 153 | 62. 2) | 63. 3 | 64. 2) | 65. 3) |
| 66. 4) | 67. 3 | 68. 3) | 69. 3) | 70. 2.25 |

