

BRAND'S®

รุ่น 24

Summer Camp

2013

เอกสารประกอบการบรรยาย

วิชา PAT 1 คณิตศาสตร์

โดย อ.ตุลนันทน์ นวลเพ็ญ



ประสานงานอาจารย์และจัดพิมพ์โดย ชมรมบัณฑิตแนะแนว
แจกฟรี ห้ามจำหน่าย

BRANDS ซัมเมอร์แคมป์ 2013



เอกสารประกอบการบรรยาย

วิชา **PAT 1** **คณิตศาสตร์**

โดย **อ.ตุลนันทน์ นวลเพ็ญ**
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

เซต

เซตที่เท่ากัน

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ A และ B มีสมาชิกเหมือนกัน

สับเซต

$A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกของ A ทุกตัวเป็นสมาชิกของ B

สับเซตแท้

A เป็นสับเซตแท้ของ B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ แต่ $A \neq B$

สมบัติของสับเซต

1. เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต
2. $A \subset A$
3. จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ $2^n(A)$
4. จำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดของ A เท่ากับ $2^n(A) - 1$
5. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

เพาเวอร์เซต

เพาเวอร์เซตของ A คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของ A เขียนแทนด้วย $P(A)$

สมบัติของเพาเวอร์เซต

1. $\phi \in P(A)$
2. $A \in P(A)$
3. จำนวนสมาชิกของ $P(A)$ เท่ากับ $2^{n(A)}$
4. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subset P(B)$
5. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
6. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

การดำเนินการของเซต

1. ยูเนียน $A \cup B$ คือ เซตที่ได้จากการนำสมาชิกของ A , B ทั้งหมดมาอยู่ในเซตเดียวกัน
2. อินเตอร์เซกชัน $A \cap B$ คือ เซตที่ได้จากการนำสมาชิกของ A , B ที่ซ้ำกันมาอยู่ในเซตเดียวกัน
3. ผลต่าง $A - B$ คือ เซตที่ได้จากสมาชิกของ A แต่ตัดสมาชิกที่ซ้ำกับ B ออก
4. คอมพลีเมนต์ A' คือ เซตที่ได้จากสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ U แต่ตัดสมาชิกที่ซ้ำกับ A ออก

สมบัติของการดำเนินการของเซต

ให้ A , B และ C แทนเซตใดๆ และ μ แทนเอกภพสัมพัทธ์

- | | |
|---|--|
| 1. $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ |
| 2. $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| 3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| 4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 5. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ | $(A \cap B)' = A' \cup B'$ |
| 6. $A \cup \phi = A$ | $A \cup U = U$ |
| $A \cap \phi = \phi$ | $A \cup U = A$ |
| 7. $A \cup A' = U$ | $A \cap A' = \phi$ |
| 8. $A - B = A \cap B'$ | |

จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

1. $n(A') = n(U) - n(A)$
2. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
3. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
4. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องเซต

1. กำหนดให้ $A = \{\emptyset, 1, \{1\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ **ผิด** (PAT 1 มี.ค. 52)
 - 1) $\emptyset \subset A$
 - 2) $\{\emptyset\} \not\subset A$
 - 3) $\{1, \{1\}\} \subset A$
 - 4) $\{\{1\}, \{1, \{1\}\}\} \not\subset A$
2. กำหนดให้ $A = \{x|x \text{ เป็นจำนวนคู่บวก และ } x \leq 100\}$ และ $B = \{x|x \in A \text{ และ } 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$ จำนวนสมาชิกของเซต $P(B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
 - 1) 2^{16}
 - 2) 2^{17}
 - 3) 2^{18}
 - 4) 2^{19}
3. ในการสำรวจความเห็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 880 คน เพื่อสอบถามข้อมูลเกี่ยวกับการศึกษาต่อ ปรากฏผลดังนี้

มีผู้ต้องการศึกษาต่อ	725 คน
มีผู้ต้องการทำงาน	160 คน
มีผู้ต้องการศึกษาต่อหรือทำงาน	813 คน

 ผู้ที่ต้องการศึกษาต่อและทำงานด้วยมีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) 67 คน
 - 2) 72 คน
 - 3) 85 คน
 - 4) 90 คน
4. กำหนดให้ $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ **ผิด** (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) $\{1, 2\} \in A$
 - 2) $\{1, 2, 3\} \in A$
 - 3) $\{1, 2\} \subset A$
 - 4) $\{1, 2, 3\} \subset A$
5. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, \{0, 1, 2\}\}$ และ $P(A)$ แทนเซตกำลังของ A พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $A \cap P(A) = \{0, 1, 2\}$

ข. $n(A - P(A)) < n(P(A) - A)$

 ข้อใดต่อไปนี้ **เป็นจริง** (PAT 1 ต.ค. 52)
 - 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
 - 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
 - 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
 - 4) ก. ผิด และ ข. ผิด
6. ให้ $A = \{1, \{1\}\}$ และ $P(A)$ เป็นเพาเวอร์เซตของเซต A ข้อใดต่อไปนี้ **ผิด** (PAT 1 มี.ค. 53)
 - 1) จำนวนสมาชิกของ $P(A) - A$ เท่ากับ 3
 - 2) จำนวนสมาชิกของ $P(P(A))$ เท่ากับ 16
 - 3) $\{\{1\}\} \in P(A) - A$
 - 4) $\{\emptyset, A\} \in P(A)$
7. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ถ้า $n(A \cup B \cup C) = 91$, $n(A \cap B' \cap C') = 11$, $n[(B - A) \cap (B - C)] = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 20$, $n[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = 47$ และ $n(C) = 59$ แล้ว $n(A' \cap B' \cap C)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)

8. ให้ $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ และ $P(A)$ เป็นเพาเวอร์เซตของเซต A ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) จำนวนสมาชิกของ $P(A)$ เท่ากับ 16
 - 2) จำนวนสมาชิกของ $P(A) - \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ เท่ากับ 7
 - 3) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \subset P(A) - \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 - 4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \subset P(A)$
9. ในการสอบวิชาภาษาไทย วิชาภาษาอังกฤษ และวิชาคณิตศาสตร์ ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนเข้าสอบทั้งหมด 66 คน ปรากฏว่ามีนักเรียนที่สอบตกทั้งสามวิชาจำนวน 13 คน นักเรียนที่สอบได้ทั้งสามวิชา มีจำนวน 17 คน นักเรียนที่สอบได้วิชาภาษาไทยและวิชาภาษาอังกฤษ แต่สอบตกวิชาคณิตศาสตร์มีจำนวน 10 คน นักเรียนที่สอบได้วิชาภาษาไทย และวิชาคณิตศาสตร์แต่สอบตกวิชาภาษาอังกฤษ 11 คน นักเรียนที่สอบได้เพียงวิชาเดียว มีจำนวน 6 คน จำนวนนักเรียนที่สอบได้วิชาภาษาอังกฤษและวิชาคณิตศาสตร์ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
10. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S ให้ $A = \{x \in I \mid |x^2 - 1| < 8\}$ และ $B = \{x \in I \mid 3x^2 + x - 2 \geq 0\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) จำนวนสมาชิกของ $P(A - B)$ เท่ากับ 4
 - 2) จำนวนสมาชิกของ $P(I - (A \cup B))$ เท่ากับ 2
 - 3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
 - 4) $P(A - B) - P(A \cap B) = \{\emptyset\}$
11. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ถ้า $n(A) + n(B) + n(C) = 301$ และ $n(A \cup B \cup C) = 102$ แล้ว $n(A \cap B \cap C)$ มีค่าอย่างน้อยเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
12. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนจำนวน 750 คน พบว่ามีนักเรียนจำนวน 30 คน ไม่เล่นกีฬาเลย นอกนั้นเล่นกีฬาอย่างน้อยหนึ่งประเภทคือ ปิงปอง แบดมินตัน เทนนิส จากการสำรวจเฉพาะกลุ่มนักเรียนที่เล่นกีฬา พบว่ามีนักเรียนจำนวน 630 คน เล่นกีฬาเพียงประเภทเดียวเท่านั้น มีนักเรียนจำนวน 30 คน เล่นเทนนิสและปิงปอง มีนักเรียน 50 คน เล่นปิงปองและแบดมินตัน มีนักเรียน 40 คน เล่นเทนนิสและแบดมินตัน มีนักเรียนไม่เล่นเทนนิสจำนวน 250 คน จงหาว่ามีนักเรียนกี่คนที่เล่นเทนนิสเพียงอย่างเดียว (PAT 1 มี.ค. 54)

จำนวนจริง

สัญลักษณ์แทนเซต

- R แทน เซตของจำนวนจริง
Q แทน เซตของจำนวนตรรกยะ
Q' แทน เซตของจำนวนอตรรกยะ
I แทน เซตของจำนวนเต็ม
N แทน เซตของจำนวนนับ

จำนวนจริง ประกอบด้วย

- จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถเขียนอยู่ในรูปของเศษส่วนได้
เช่น 4, -2, 3.25, 0.85 เป็นต้น
- จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปของเศษส่วนได้
เช่น $\sqrt{3}$, 3.147258 ..., $\sqrt{5} + 1$, π , e เป็นต้น

สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

- สมบัติการสะท้อน $a = a$
- สมบัติการสมมาตร $a = b$ ก็ต่อเมื่อ $b = a$
- สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
- สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
- สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

สมบัติของการบวกและการคูณของจำนวนจริง

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	$a + b$ เป็นจำนวนจริง	$a \times b$ เป็นจำนวนจริง
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	0 เป็นเอกลักษณ์การบวก $a + 0 = a = 0 + a$	1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ $a \times 1 = a = 1 \times a$
สมบัติการมีอินเวอร์ส	จำนวนจริง a ใดๆ $-a$ เป็นอินเวอร์สการบวก	จำนวนจริง a ใดๆ แต่ $a \neq 0$ $\frac{1}{a}$ เป็นอินเวอร์สการคูณ
สมบัติการแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

สูตรสำหรับการแยกตัวประกอบ

1. กำลังสองสมบูรณ์

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

2. กำลังสามสมบูรณ์

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

3. ผลต่างกำลังสอง

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

4. ผลต่างกำลังสาม

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

การแก้สมการพหุนามกำลังสองตัวแปรเดียว

จาก $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ $a \neq 0$

1. แยกตัวประกอบและใช้หลักการที่ว่า $AB = 0$ จะได้ว่า $A = 0$ หรือ $B = 0$

2. ใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้วรากคำตอบ x จะมีสองคำตอบ

- ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แล้วรากคำตอบ x จะมีคำตอบเดียว

- ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้วรากคำตอบ x จะไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง
(ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้)

* ผลบวกของรากคำตอบของสมการเท่ากับ $-\frac{b}{a}$

** ผลคูณของรากคำตอบของสมการเท่ากับ $\frac{c}{a}$

*** ถ้าเป็นสมการพหุนามกำลังสามขึ้นไปให้ใช้วิธีการหารสังเคราะห์แยกตัวประกอบ

สมบัติการไม่เท่ากันของจำนวนจริง

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
3. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
4. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
5. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - d < b - c$
6. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$
7. ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $ac > bd$
8. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
9. ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
10. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$
11. ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $a^2 > b^2$
12. $a < b < c$ จะได้ว่า $a < b$ และ $b < c$

ช่วง

กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $a < b$

- $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
- $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$
- $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

การแก้อสมการ

- อสมการพหุนามดีกรีหนึ่ง ทำเหมือนการแก้สมการพหุนามดีกรีหนึ่ง
- อสมการพหุนามดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป ให้ทำดังนี้
 1. จัดรูปของอสมการโดยให้อสมการมีฝั่งใดฝั่งหนึ่งเป็นศูนย์และทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีดีกรีสูงสุดเป็นจำนวนบวก
 2. แยกตัวประกอบ ถ้าตัวไหนแยกไม่ได้(ใช้สูตรแล้วก็แยกไม่ได้)ให้ตัดทิ้ง
 3. ลงค่าที่ทำให้แต่ละวงเล็บเป็นศูนย์บนเส้นจำนวน โดยใช้หลักการดังนี้
ถ้าวงเล็บไหนยกกำลังด้วย**จำนวนคี่**แล้ว ให้เติมตัวเลขบนเส้นจำนวน 1 ครั้ง
ถ้าวงเล็บไหนยกกำลังด้วย**จำนวนคู่**แล้ว ให้เติมตัวเลขบนเส้นจำนวน 2 ครั้ง
 4. ตัวเลขบนเส้นจำนวนจะแบ่งเส้นจำนวนออกเป็นช่วงๆ ให้เติมเครื่องหมาย บวก ลบ บวก ลบ สลับกัน โดยเรียงจากช่วง**ขวาไปซ้าย**
 5. ถ้า $p(x) > 0$ หรือ $p(x) \geq 0$ แล้วให้เลือกช่วงที่เป็น**บวก**
ถ้า $p(x) < 0$ หรือ $p(x) \leq 0$ แล้วให้เลือกช่วงที่เป็น**ลบ**
 6. สรุปคำตอบ

ค่าสัมบูรณ์

บทนิยามให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบทของค่าสัมบูรณ์

กำหนดให้ a, b และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $|a| = |-a|$
2. $|a - b| = |b - a|$
3. $|ab| = |a| |b|$
4. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ เมื่อ $b \neq 0$
5. $|a^n| = |a|^n$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$
7. $|x - y| \geq |x| - |y|$

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ (เป้าหมาย คือ ต้องถอดค่าสัมบูรณ์ให้ได้)

1. $|p(x)| = c$
กรณี $c > 0$ จะได้ว่า $p(x) = c$ หรือ $p(x) = -c$
กรณี $c = 0$ จะได้ว่า $p(x) = 0$
กรณี $c < 0$ จะได้ว่า สมการไม่มีคำตอบ
2. $|p(x)| = |q(x)|$
จะได้ว่า $p(x) = q(x)$ หรือ $p(x) = -q(x)$
3. $|p(x)| = q(x)$
จะได้ว่า $p(x) = q(x)$ หรือ $p(x) = -q(x)$ แต่ $q(x) \geq 0$
4. กรณีอื่นๆ ถอดค่าสัมบูรณ์โดยบทนิยาม

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ (เป้าหมาย คือ ต้องถอดค่าสัมบูรณ์ให้ได้)

กำหนดให้ $c > 0$

1. $|p(x)| < c$ ก็ต่อเมื่อ $-c < p(x) < c$
 $|p(x)| \leq c$ ก็ต่อเมื่อ $-c \leq p(x) \leq c$
2. $|p(x)| > c$ ก็ต่อเมื่อ $p(x) < -c$ หรือ $c < p(x)$
 $|p(x)| \geq c$ ก็ต่อเมื่อ $p(x) \leq -c$ หรือ $c \leq p(x)$
3. $|p(x)| < |q(x)|$ ก็ต่อเมื่อ $[p(x)]^2 < [q(x)]^2$
 $|p(x)| \leq |q(x)|$ ก็ต่อเมื่อ $[p(x)]^2 \leq [q(x)]^2$
4. $|p(x)| \leq q(x)$ ก็ต่อเมื่อ $[p(x)]^2 \leq [q(x)]^2$ และ $q(x) \geq 0$
5. กรณีอื่นๆ ถอดค่าสัมบูรณ์โดยบทนิยาม

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องจำนวนจริง

1. กำหนดให้ $S = \{x \mid |x|^3 = 1\}$ เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต S (PAT 1 มี.ค. 52)
 - 1) $\{x \mid x^3 = 1\}$ 2) $\{x \mid x^2 = 1\}$ 3) $\{x \mid x^3 = -1\}$ 4) $\{x \mid x^4 = x\}$
2. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
 - 1) 2.1 2) 2.2 3) 3.3 4) 3.5
3. กำหนดให้ $A = \{x \mid |x - 1| \leq 3 - x\}$ และ a เป็นสมาชิกค่ามากที่สุดของ A ค่าของ a อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
 - 1) $(0, 0.5]$ 2) $(0.5, 1]$ 3) $(1, 1.5]$ 4) $(1.5, 2]$
4. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{(2x+1)(x-1)}{2-x} \geq 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^2 - 7x + 3 < 0$ ถ้า $A \cap B = [c, d]$ แล้ว $6c - d$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) 4 2) 5 3) 6 4) 7
5. กำหนดให้ $A = \{x \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3) \leq 15\}$ ถ้า a เป็นสมาชิกค่าน้อยที่สุดในเซต A และ b เป็นสมาชิกค่ามากที่สุดในเซต A แล้ว $(b - a)^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) 24 2) 16 3) 8 4) 4
6. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$ ถ้า a เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุดในเซต $S \cap (2, \infty)$ และ b เป็นจำนวนลบที่มีค่ามากที่สุดซึ่ง $b \notin S$ แล้ว $a^2 - b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) -9 2) -5 3) 5 4) 9
7. กำหนดให้ A, B และ C เป็นจำนวนนับที่มีค่าไม่เกิน 100 ถ้า $A + B = C$ และ $B + C = 2A$ แล้วค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ B อยู่ในข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) $[0, 40]$ 2) $[45, 60]$ 3) $[70, 85]$ 4) $[90, 100]$
8. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 27x - 27 = 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (36 + \sqrt{3})x - 36 = 0$ $A \cap B$ เป็นล้นเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 52)
 - 1) $[-3, \sqrt{5}, -0.9]$ 2) $[-1.1, 0]$ 3) $[0, 3\sqrt{5}]$ 4) $[1, 5\sqrt{3}]$

9. กำหนดให้ $S = \left\{ x \mid \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \geq \frac{x+2}{x^2 - 1} \right\}$ ช่วงในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ S (PAT 1 ต.ค. 52)
- 1) $(-\infty, -3)$ 2) $(-1, 0.5)$ 3) $(-0.5, 2)$ 4) $(1, \infty)$
10. กำหนดให้ $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 4 \right\}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid |3 - x| > 4\}$ 2) $A' \subset (-1, \infty)$
 3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\}$ 4) $A \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| < 7\}$
11. ถ้า $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{7x+1}\}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง แล้วผลบวกของสมาชิกใน S เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
12. ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $a * b = a^b$ สำหรับ $a, b \in \mathbb{N}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ สำหรับ $a, b, c \in \mathbb{N}$
- ก. $a * b = b * a$ ข. $(a * b) * c = a * (b * c)$
 ค. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ ง. $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$
- ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) ถูก 2 ข้อ คือ ข. และ ค. 2) ถูก 2 ข้อ คือ ค. และ ง.
 3) ถูก 1 ข้อ คือ ค. 4) ก., ข., ค. และ ง. ผิดทุกข้อ
13. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{|1-x|-2}{x+|x|-3} > 1 \right\}$ และ $A \cap [0, 1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 2) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 3) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 4) $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$
14. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{7x-1}\}$ และ $T = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 3x + 1, x \in S\}$ แล้วผลบวกของสมาชิกใน T เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
15. ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $a * b = \sqrt{a+b}$ สำหรับ $a, b \in \mathbb{N}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. $(a * b) * c = a * (b * c)$ สำหรับ $a, b, c \in \mathbb{N}$
 ข. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ สำหรับ $a, b, c \in \mathbb{N}$
- ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

16. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \left\{ x \in R \mid 2x^2 - 2x + 9 - 2\sqrt{2x^2 - 2x + 3} = 15 \right\}$ แล้วผลบวก

ของกำลังสองของสมาชิกในเซต A เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)

17. ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ

สำหรับ $a, b \in N$

$$a \ominus b = \begin{cases} a, & a > b \\ a, & a = b \\ b, & a < b \end{cases} \quad \text{และ} \quad a \Delta b = \begin{cases} b, & a > b \\ a, & a = b \\ a, & a < b \end{cases}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ สำหรับ $a, b, c \in N$

ก. $a \ominus b = b \ominus a$

ข. $a \ominus (b \ominus c) = (a \ominus b) \ominus c$

ค. $a \Delta (b \ominus c) = (a \Delta b) \ominus (a \Delta c)$

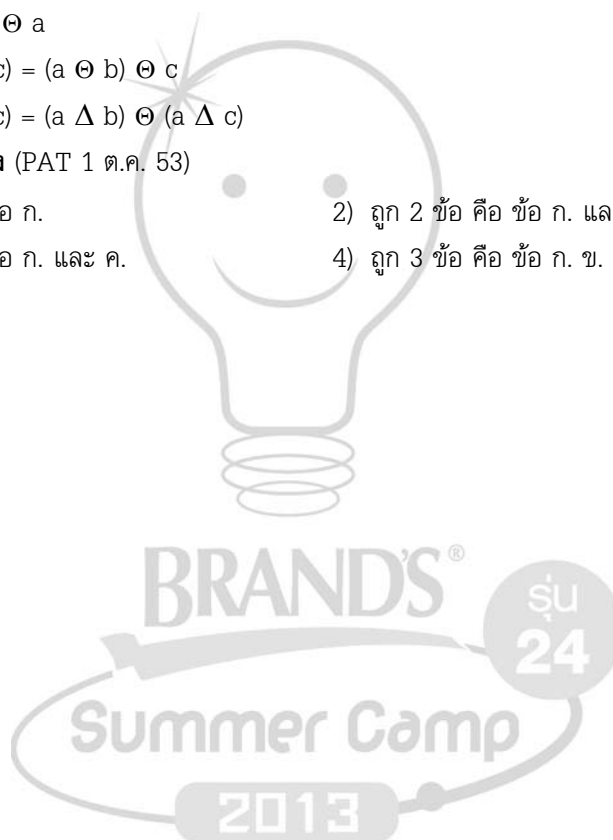
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 53)

1) ถูก 1 ข้อ คือ ข้อ ก.

2) ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ ก. และ ข.

3) ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ ก. และ ค.

4) ถูก 3 ข้อ คือ ข้อ ก. ข. และ ค.



ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

ประพจน์

คือ ประโยคบอกเล่า ที่มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ประโยคเปิด

คือ ประโยคบอกเล่าที่มีตัวแปร โดยเมื่อแทนค่าตัวแปรด้วยสมาชิกจากเอกภพสัมพัทธ์แล้ว จะเป็นประพจน์

ตัวเชื่อมของประพจน์

ได้แก่ และ $\wedge$ หรือ $\vee$
ถ้า ... แล้ว $\rightarrow$ ก็ต่อเมื่อ $\leftrightarrow$ นิเสธ $\sim$

ค่าความจริงของตัวเชื่อม

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

การสมมูลกันของประพจน์

p สมมูลกับ q ก็ต่อเมื่อ p มีค่าความจริงเหมือน q ทุกกรณี
เขียนแทนด้วย $p \equiv q$

ประพจน์ที่สมมูลกัน

การสลับที่	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
การเปลี่ยนกลุ่ม	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
การแจกแจง	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
นิเสธ	$\sim(\sim p) \equiv p$ $p \vee (\sim p) \equiv t$ $p \wedge (\sim p) \equiv f$ t แทน ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ f แทน ค่าความจริงที่เป็นเท็จเสมอ
เดอมอแกน	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
ถ้า ... แล้ว	$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
ก็ต่อเมื่อ	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

สัจนิรันดร์

คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ

การตรวจสอบสัจนิรันดร์

วิธีที่ 1 สร้างตารางหาค่าความจริง

วิธีที่ 2 สมมติประพจน์มีค่าความจริงเป็นเท็จแล้วหาค่าความจริงของประพจน์ย่อย

ถ้า ขัดแย้ง แล้ว ประพจน์เป็นสัจนิรันดร์

ถ้า ไม่ขัดแย้ง แล้ว ประพจน์ไม่เป็นสัจนิรันดร์

การอ้างเหตุผล

ให้ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ แทน เหตุ

และ c แทน ผล

การตรวจสอบการอ้างเหตุผล

1. ให้ $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots \wedge p_k) \rightarrow c$

2. ตรวจสอบแบบสัจนิรันดร์

ถ้า เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว การอ้างเหตุผล “สมเหตุสมผล”

ถ้า ไม่เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว การอ้างเหตุผล “ไม่สมเหตุสมผล”

การหาค่าความจริงของตัวบ่งปริมาณ

$\forall x[P(x)]$	จริง เมื่อ x ทุกตัวทำให้ $p(x)$ เป็นจริง เท็จ เมื่อมี x ทำให้ $p(x)$ เป็นเท็จ
$\exists x[P(x)]$	จริง เมื่อมี x ทำให้ $p(x)$ เป็นจริง เท็จ เมื่อ x ทุกตัวทำให้ $p(x)$ เป็นเท็จ
$\forall x\forall y[P(x, y)]$	จริง เมื่อ (x, y) ทุกคู่ทำให้ $P(x, y)$ เป็นจริง เท็จ เมื่อมี (x, y) ทำให้ $P(x, y)$ เป็นเท็จ
$\forall x\exists y[P(x, y)]$	จริง เมื่อ x ทุกตัวจับคู่กับ y บางตัวแล้วทำให้ $P(x, y)$ เป็นจริง เท็จ เมื่อมี x จับคู่กับ y ทุกตัวแล้วทำให้ $P(x, y)$ เป็นเท็จ
$\exists x\forall y[P(x, y)]$	จริง เมื่อมี x จับคู่กับ y ทุกตัวแล้วทำให้ $P(x, y)$ เป็นจริง เท็จ เมื่อ x ทุกตัวจับคู่กับ y บางตัวแล้วทำให้ $P(x, y)$ เป็นเท็จ
$\exists x\exists y[P(x, y)]$	จริง เมื่อมี (x, y) ทำให้ $P(x, y)$ เป็นจริง เท็จ เมื่อ (x, y) ทุกคู่ทำให้ $P(x, y)$ เป็นเท็จ

นิเสธกันของตัวบ่งปริมาณ

ตัวบ่งปริมาณ	นิเสธ
$\forall x[P(x)]$	$\exists x[\sim P(x)]$
$\exists x[P(x)]$	$\forall x[\sim P(x)]$
$\forall x\forall y[P(x, y)]$	$\exists x\exists y[\sim P(x, y)]$
$\forall x\exists y[P(x, y)]$	$\exists x\forall y[\sim P(x, y)]$
$\exists x\forall y[P(x, y)]$	$\forall x\exists y[\sim P(x, y)]$
$\exists x\exists y[P(x, y)]$	$\forall x\forall y[\sim P(x, y)]$

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องตรรกศาสตร์เบื้องต้น

- คณิตศาสตร์ (16) _____ โครงการแบรนด์ซัมเมอร์แคมป์ 2013 (รอบสามัญ)

7. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้มีความจริงเป็นเท็จ (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $(p \rightarrow q) \vee p$
 - 2) $(\sim p \vee q) \rightarrow q$
 - 3) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
 - 4) $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
8. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$ ค่าความจริงของ $\forall x \exists y [x^2 + x = y^2 + y]$ เป็นเท็จ
 - 2) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ค่าความจริงของ $\exists x [3^x = \log_3 x]$ เป็นจริง
 - 3) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง นิเสธของข้อความ $\forall x \exists y [(x > 0 \wedge y \leq 0) \wedge (xy < 0)]$ คือ $\exists x \forall y [(xy < 0) \rightarrow (x \leq 0 \vee y > 0)]$
 - 4) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็ม นิเสธของข้อความ $\forall x [x > 0 \rightarrow x^3 \geq x^2]$ คือ $\exists x [(x \leq 0) \wedge (x^3 < x^2)]$
9. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ ที่ประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$ มีความจริงเป็นเท็จ และประพจน์ $p \leftrightarrow r$ มีความจริงเป็นจริง ประพจน์ในข้อใดมีความจริงเป็นจริง (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $(q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r)$
 - 2) $q \rightarrow [p \vee (q \wedge \sim r)]$
 - 3) $(p \rightarrow s) \leftrightarrow (r \leftrightarrow q)$
 - 4) $(r \leftrightarrow s) \wedge [q \rightarrow (p \wedge r)]$
10. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $\forall x \forall y [x + y + 2 > 0]$ มีความจริงเป็นจริง
 - 2) $\forall x \exists y [x + y \geq 0]$ มีความจริงเป็นเท็จ
 - 3) $\exists x \forall y [x + y = 1]$ มีความจริงเป็นเท็จ
 - 4) $\exists x \exists y [x + y > 1]$ มีความจริงเป็นเท็จ
11. กำหนดให้ A, B และ C เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) ถ้า $A \leftrightarrow B$ มีความจริงเป็นจริง แล้ว $(B \wedge C) \Rightarrow (\sim A \Rightarrow C)$ มีความจริงเป็นจริง
 - 2) ประพจน์ $A \Rightarrow [(A \wedge B) \vee (B \vee C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
 - 3) ประพจน์ $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Rightarrow [(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
 - 4) ประพจน์ $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$ สมมูลกับประพจน์ $(A \wedge B) \Rightarrow C$
12. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง และ
- $$P(x) \text{ แทน } \sqrt{(x+1)^2} = x+1$$
- $$Q(x) \text{ แทน } \sqrt{x+1} > 2$$
- ข้อใดต่อไปนี้มีความจริงตรงข้ามกับประพจน์ $\exists x [P(x)] \Rightarrow \forall x [Q(x)]$ (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) $\exists x [\sim P(x)] \Rightarrow \forall x [\sim Q(x)]$
 - 2) $\exists x [P(x)] \Rightarrow \exists x [Q(x)]$
 - 3) $\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \forall x [P(x)]$
 - 4) $\exists x [P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \forall x [Q(x)]$

13. กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์โดยที่ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, $r \vee \sim p$ และ p มีค่าความจริงเป็นจริง ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ (PAT 1 มี.ค. 54)

- 1) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim r)] \Leftrightarrow \sim(q \wedge r)$
- 2) $[p \Rightarrow (r \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow q]$
- 3) $[p \Rightarrow \sim(r \wedge q)] \Leftrightarrow [r \Rightarrow (p \wedge q)]$
- 4) $[p \vee \sim(q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [r \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$

14. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ ช่วงเปิด $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

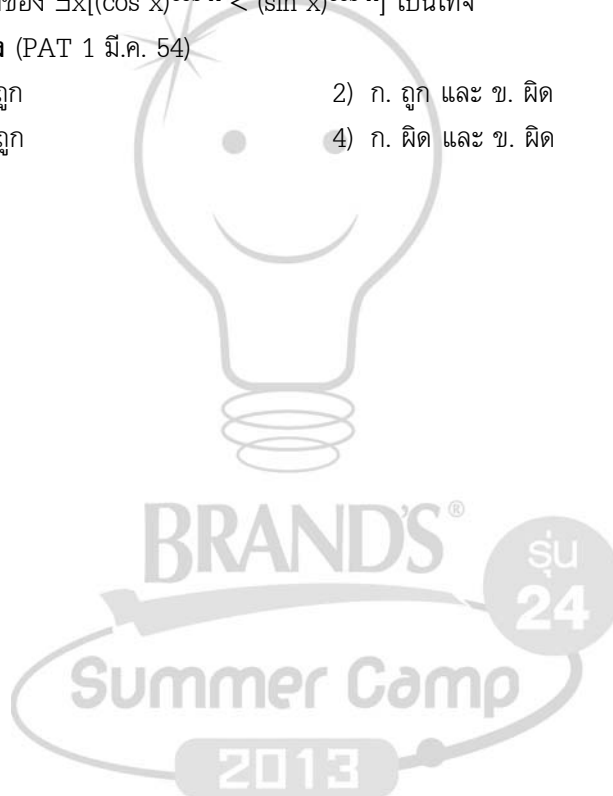
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าความจริงของ $\forall x[(\cos x)^{\sin x} < (\sin x)^{\cos x}]$ เป็นจริง

ข. ค่าความจริงของ $\exists x[(\cos x)^{\cos x} < (\sin x)^{\cos x}]$ เป็นเท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 54)

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด



ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

*** ให้ตัวแปรทุกตัวเป็นจำนวนเต็ม ***

การหารลงตัว

$a|b$ ก็ต่อเมื่อ $b = ac$

ทฤษฎีบทของการหารลงตัว

1. ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$
2. $a|b$ จะได้ว่า $a \leq b$
3. ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(bx + cy)$

จำนวนเฉพาะ

p เป็นจำนวนเฉพาะก็ต่อเมื่อ $-1, 1, -p, p$ หาร p ลงตัวเท่านั้น

ขั้นตอนการหาร

$$a = bq + r$$

เมื่อ a คือ ตัวตั้ง

b คือ ตัวหาร

q คือ ผลหาร

r คือ เศษ ($0 \leq r < |b|$)

ตัวหารร่วมมาก (ท.ร.ม.)

ท.ร.ม. ของ a, b เขียนแทนด้วย (a, b)

ท.ร.ม. ของ a, b และ c เขียนแทนด้วย (a, b, c)

การหา ท.ร.ม. โดยวิธียุคลิด ให้ $a > b$

$$\begin{array}{llll} \text{จาก} & a & = & bq_1 + r_1 \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < r_1 < |b| \\ & b & = & r_1q_2 + r_2 \quad \text{"} \quad 0 < r_2 < |r_1| \\ & r_1 & = & r_2q_3 + r_3 \quad \text{"} \quad 0 < r_3 < |r_2| \\ & r_2 & = & r_3q_4 + r_4 \quad \text{"} \quad 0 < r_4 < |r_3| \\ & \vdots & & \vdots \\ & r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n + 0 \end{array}$$

ดังนั้น $(a, b) = r_{n-1}$

*** ถ้า $(a, b) = d$ แล้ว จะมี x, y ที่เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้ $d = ax + by$

จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

$$(a, b) = 1$$

ตัวคูณร่วมน้อย(ค.ร.น.)

ค.ร.น. ของ a, b เขียนแทนด้วย $[a, b]$

ค.ร.น. ของ a, b และ c เขียนแทนด้วย $[a, b, c]$

*** ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก $ab = (a, b)[a, b]$

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

1. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ และ r เป็นเศษเหลือจากการหาร n^2 ด้วย 11 จำนวนในข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ r ไม่ได้ (PAT 1 มี.ค. 52)

1) 1
2) 3
3) 5
4) 7
2. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2551 ซึ่งสอดคล้องกับ $P(n) = Q(n)$ สำหรับ $n = 1, 2, \dots, 2551$ และ $P(2552) = Q(2552) + 1$ ค่าของ $P(0) - Q(0)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

1) 0
2) 1

3) -1
4) หาไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ
3. ถ้า a เป็น ห.ร.ม. ของ 403 และ 465 และ b เป็น ห.ร.ม. ของ 431 และ 465 และ $a - b$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
4. ให้

A เป็นเซตของจำนวนเฉพาะบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 10
 B เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 10
 C เป็นเซตของฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
 และ ห.ร.ม. ของ a และ $f(a)$ ไม่เท่ากับ 1 สำหรับทุกค่า $a \in A$ จำนวนสมาชิกในเซต C เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
5. สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ นิยาม $a * b$ หมายถึง $a = kb$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วข้อใดต่อไปนี้ **เป็นจริง** (PAT 1 ต.ค. 53)

1) ถ้า $x * y$ และ $y * z$ แล้ว $(x + y) * z$
2) ถ้า $x * y$ และ $x * z$ แล้ว $x * (yz)$

3) ถ้า $x * y$ และ $x * z$ แล้ว $x * (y + z)$
4) ถ้า $x * y$ แล้ว $y * x$
6. กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับระบบสมการ $xyz = 2, x + \frac{1}{z} = 32, y + \frac{1}{x} = 81$ และ $z + \frac{1}{y} = \frac{p}{q}$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ ห.ร.ม. ของ p และ q เท่ากับ 1 แล้วค่าของ $|p - q|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)

1) 3,925
2) 4,832
3) 4,951
4) 5,182
7. ถ้า d เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ จำนวน 3456, 2561 และ 1308 หารด้วย d มีเศษเหลือเท่ากันคือ r แล้ว $d + r$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)
8. กำหนดให้ $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ และ $1a5, 6b9$ เป็นจำนวนสามหลัก ถ้า $6b9 - 1a5 = 454$ และ $6b9$ หารด้วย 9 ลงตัว แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

ฟังก์ชัน

ผลคูณคาร์ทีเซียน

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ และ } y \in B\}$

ความสัมพันธ์

- ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียน ซึ่งได้จากการเลือกคู่อันดับที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ความสัมพันธ์กำหนดไว้
- $r \subset A \times B$ แทน r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
- $r \subset A \times A$ แทน r เป็นความสัมพันธ์ใน A
- จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก A ไป B เท่ากับ $2^{n(A) \times n(B)}$

อินเวอร์สของความสัมพันธ์

อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

การทำ r^{-1}

1. ความสัมพันธ์ r เขียนแบบแจกแจงสมาชิก ให้สลับที่กันระหว่างตัวหน้าและตัวหลังของคู่อันดับทุกคู่
2. ความสัมพันธ์ r เขียนแบบบอกเงื่อนไข ทำได้ 3 แบบดังนี้

จาก $r = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \text{เทอมของ } x\}$

แบบที่ 1 สลับที่ระหว่าง x กับ y และ เปลี่ยน $A \times B$ เป็น $B \times A$ เงื่อนไขยังเหมือนเดิม

$$r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid y = \text{เทอมของ } x\}$$

แบบที่ 2 จากแบบที่ 1 เปลี่ยน x เป็น y เปลี่ยน y เป็น x

$$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x = \text{เทอมของ } y\}$$

แบบที่ 3 จากแบบที่ 2 เปลี่ยนสมการเงื่อนไขให้อยู่ในเทอมของ x

$$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid y = \text{เทอมของ } x\}$$

3. ความสัมพันธ์ r เขียนเป็นรูปกราฟ ให้สมการเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสะท้อน เงาสะท้อนของ r จะเป็นกราฟ r^{-1}

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

โดเมนของความสัมพันธ์ r คือ $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือ $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

1. ความสัมพันธ์ r เขียนแบบแจกแจงสมาชิก

โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทุกคู่

เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทุกคู่

2. ความสัมพันธ์ r เขียนแบบบอกเงื่อนไข

โดเมนของ r คือ เซตของ x ทั้งหมดที่ทำให้ y หาค่าได้

(จัดรูปของสมการเงื่อนไขให้อยู่ในรูปเทอมของ x หรือใกล้เคียง)

เรนจ์ของ r คือ เซตของ y ทั้งหมดที่ทำให้ x หาค่าได้

(จัดรูปของสมการเงื่อนไขให้อยู่ในรูปเทอมของ y หรือใกล้เคียง)

หลักการของจำนวนจริงที่ใช้สำหรับหาโดเมนและเรนจ์

(1) $\frac{1}{\square} = \Delta$	$\square \neq 0$ และ $\Delta \neq 0$
(2) $\sqrt[n]{\square} = \Delta$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก	$\square \geq 0$ และ $\Delta \geq 0$
(3) $\square^n = \Delta$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่บวก	$\square \in \mathbb{R}$ และ $\Delta \geq 0$
(4) $ \square = \Delta$	$\square \in \mathbb{R}$ และ $\Delta \geq 0$

*** $D_r = R_{r^{-1}}$ และ $R_r = D_{r^{-1}}$

3. ความสัมพันธ์ r เขียนเป็นรูปกราฟ

โดเมนของ r หาได้จากเงาสะท้อนของกราฟบนแกน x

เรนจ์ของ r หาได้จากเงาสะท้อนของกราฟบนแกน y

ฟังก์ชัน

- ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ x ไปจับคู่กับ y เพียงค่าเดียวเท่านั้น
- ฟังก์ชันจาก A ไป B มีสมบัติคือ $D_f = A$ และ $R_f \subset B$
- ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B มีสมบัติคือ $D_f = A$ และ $R_f = B$
- ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง คือฟังก์ชันที่ y มี x มาจับคู่เพียงค่าเดียวเท่านั้น
- ฟังก์ชันเพิ่ม
ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
- ฟังก์ชันลด
ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$

พีชคณิตของฟังก์ชัน

คือการนำฟังก์ชันสองฟังก์ชันมา บวก ลบ คูณ หารกัน ภายใต้เงื่อนไขของ x

- เงื่อนไขของ x ที่ทำให้พีชคณิตของฟังก์ชันหาค่าได้ คือ

$$(1) \quad D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$(2) \quad D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

- พีชคณิตของฟังก์ชัน

$$(1) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(2) \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(3) \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(4) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชันผกผันของ f จะหาได้ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$$\text{ให้} \quad f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

$$\text{จะได้} \quad f^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid x = f(y)\}$$

$$f^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid f^{-1}(x) = y\}$$

หลักการการหาฟังก์ชันผกผัน

$$f(\square) = \Delta \quad \text{จะได้} \quad \square = f^{-1}(\Delta)$$

ฟังก์ชันประกอบ

- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ และจะหาค่าได้ก็เมื่อ $R_g \cap D_f \neq \emptyset$

$$- \quad D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g \text{ และ } f(x) \in D_f\}$$

- สมบัติของฟังก์ชันประกอบ

$$(1) \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(2) \quad (f \circ f^{-1})(x) = x \text{ และ } (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ แต่ } (f \circ f^{-1})(x) \neq (f^{-1} \circ f)(x)$$

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องฟังก์ชัน

1. กำหนดให้ $f(x) = 3x - 1$ และ $g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ ค่าของ $f^{-1}(g(2) + g(-8))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
(PAT 1 มี.ค. 52)

1) $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$

2) $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$

3) $\frac{1 - \sqrt{2}}{-3}$

4) $\frac{1 + \sqrt{2}}{-3}$
2. กำหนดให้ $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y = -1\}$ ถ้า $a, b > 0$ และ $a \in D_r, b \in R_r$ แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

1) 2.5

2) 3

3) 3.5

4) 4
3. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ เมื่อ $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$
และ $g(x) = 2^x$ เมื่อ $x \in (-\infty, 0]$
ข้อใดต่อไปนี้ถูก (PAT 1 มี.ค. 52)

1) $R_g \subset D_f$

2) $R_f \subset D_g$

3) f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

4) g ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1
4. กำหนดให้ $f(x) = x - 5$ และ $g(x) = x^2$ ถ้า a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $g \circ f(a) = (f \circ g)(a)$ แล้ว $(fg)(a)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

1) -25

2) -18

3) 18

4) 25
5. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + x + 1$ และ a, b เป็นค่าคงตัวโดยที่ $b \neq 0$ ถ้า $f(a + b) = f(a - b)$ แล้ว a^2 อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

1) (0, 0.5)

2) (0.5, 1)

3) (1, 1.5)

4) (1.5, 2)
6. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid x \in [-1, 1] \text{ และ } y = x^2\}$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $r^{-1} = \{(x, y) \mid x \in [0, 1] \text{ และ } y = \pm \sqrt{|x|}\}$
 ข. กราฟของ r และกราฟของ r^{-1} ตัดกัน 2 จุด

 ข้อใดต่อไปนี้ถูก (PAT 1 ก.ค. 52)

1) ก. และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. และ ข. ผิด

7. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ ถ้า $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ เป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ และทั่วถึง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = f(1)f(2) \dots f(n)$ แล้วค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ $f(1) - f(n)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

 - 2
 - 5
 - 8
 - 11

8. กำหนดให้ $S = [-2, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in S \times S \mid x^2 + 2y^2 = 2\}$ ช่วงในข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นสับเซตของ $D_r - R_r$ (PAT 1 ต.ค. 52)

 - $(-1.4, -1.3)$
 - $(-1.3, -1.2)$
 - $(1.2, 1.4)$
 - $(1.4, 1.5)$

9. ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = 2f(x)$ แล้ว $g \circ f(3) + f \circ g^{-1}(3)$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

10. ถ้า $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = \frac{x}{1+x}$ แล้ว $(f^{-1} + g^{-1})(2)$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

11. กำหนดให้ $y_1 = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 1

$$y_2 = f(y_1), y_3 = f(y_2), \dots$$

$$y_n = f(y_{n-1}) \text{ สำหรับ } n = 2, 3, 4, \dots$$

$y_{2553} + y_{2010}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)

 - $\frac{x-1}{x+1}$
 - $\frac{x^2+1}{x-1}$
 - $\frac{x^2+1}{2x}$
 - $\frac{1+2x-x^2}{x-1}$

12. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ และ $g(x) = \sqrt{f(x)} - \sqrt{x-1}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_g = (2, \infty)$

ข. ค่าของ $x > 0$ ที่ทำให้ $g(x) = 0$ มีเพียง 1 ค่าเท่านั้น

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 53)

 - ก. ถูก และ ข. ถูก
 - ก. ถูก และ ข. ผิด
 - ก. ผิด และ ข. ถูก
 - ก. ผิด และ ข. ผิด

13. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันใดๆ กำหนดการดำเนินการ $\otimes$ ของ f และ g ดังนี้ $(f \otimes g)(x) = f(g(x)) - g(f(x))$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = 2x + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ $(f \otimes g)(1)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)

14. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง โดยที่ $f(x) = \frac{x+3}{x+6}$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{-6x}{x-1}$ ถ้า $g(a) = 2$ แล้ว a อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)

 - $[-1, 1)$
 - $[1, 3)$
 - $[3, 5)$
 - $[5, 7)$

15. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า f_1, f_2, f_3, f_4, g และ h เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R โดยที่ $f_1(x) = x + 1, f_2(x) = x - 1, f_3(x) = x^2 + 4, f_4(x) = x^2 - 4$
 $(f_1 \circ g)(x) + (f_2 \circ h)(x) = 2$ และ $(f_3 \circ g)(x) - (f_4 \circ h)(x) = 4x$
 ค่าของ $(g \circ h)(1)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)

16. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ความสัมพันธ์ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน (PAT 1 ต.ค. 53)

 - ความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x = \sqrt{4 - y^2} \text{ และ } xy \geq 0\}$
 - ความสัมพันธ์ $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } xy > 0\}$
 - ความสัมพันธ์ $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid ||x| - |y|| = 1\}$
 - ความสัมพันธ์ $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid |x - y| = 1\}$

17. ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และให้ $f : I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(n + 1) = f(n) + 3n + 2$ สำหรับ $n \in I$ ถ้า $f(-100) = 15,000$ แล้ว $f(0)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)

18. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง
 ให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x - 5\}$ และ $g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$
 ถ้า $a \in R$ และ $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 4$ แล้ว $(f \circ g)(2a)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)

19. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 25x^4 + 16y^2 + 2 = 10x^2 + 8y\}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

 - r ไม่เป็นฟังก์ชัน
 - $D_r \neq R_r$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (PAT 1 มี.ค. 54)

 - ก. ถูก และ ข. ถูก
 - ก. ถูก และ ข. ผิด
 - ก. ผิด และ ข. ถูก
 - ก. ผิด และ ข. ผิด

20. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติสอดคล้องกับ $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq -1$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 54)

- 1) $f(f(x)) = -x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
- 2) $f(-x) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 1$
- 3) $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 0$
- 4) $f(-2-x) = -2 - f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

21. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และให้ $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + a^2x - 75}{x^5 + b^2x - 270}$ เมื่อ $a, b \in I$ ถ้า

$A = \{(a, b) \in I \times I \mid f(3) = 0\}$ และ $B = \{(a, b) \in I \times I \mid \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} < 3\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

22. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม ถ้า $f : I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติดังนี้

- ก. $f(1) = 1$
- ข. $f(2x) = 4f(x) + 6$
- ค. $f(x+2) = f(x) + 12x + 12$

แล้วค่าของ $f(7) + f(16)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)



เรขาคณิตวิเคราะห์

เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น

1. ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

3. จุดระหว่างจุดสองจุด

ให้ $P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ และ $|P_1P| : |P_2P| = m : n$

$$(x, y) = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \right)$$

4. ความชันของเส้นตรง

ให้เส้นตรงผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

$$\text{ความชัน } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

สมบัติของความชัน

1. $m > 0$ เส้นตรงเอียงขวา(ทำมุมแหลมกับแกน x)
2. $m < 0$ เส้นตรงเอียงซ้าย(ทำมุมป้านกับแกน x)
3. $m = 0$ เส้นตรงขนานกับแกน X
4. m หาค่าไม่ได้ เส้นตรงขนานกับแกน Y
5. ℓ_1 ขนานกับ ℓ_2 ก็ต่อเมื่อ $m_{\ell_1} = m_{\ell_2}$
6. ℓ_1 ตั้งฉากกับ ℓ_2 ก็ต่อเมื่อ $m_{\ell_1} \cdot m_{\ell_2} = -1$

5. สมการเส้นตรง

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

โดยที่ m คือ ความชันของเส้นตรง

(x_1, y_1) คือ จุดที่เส้นตรงผ่าน

สมการเส้นตรงรูปทั่วไป คือ $Ax + By + C = 0$

จะได้ $m = -\frac{A}{B}$

6. ระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรง

ให้ d แทน ระยะห่างระหว่างจุด $P(x_1, y_1)$ กับเส้นตรง $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

7. ระยะห่างของเส้นตรงที่ขนานกัน 2 เส้น

ให้ d แทน ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ กับ $Ax + By + C_2 = 0$

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ภาคตัดกรวย

1. วงกลม

สมการวงกลมรูปมาตรฐาน $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

โดยที่ (h, k) คือ จุดศูนย์กลางของวงกลม

r คือ รัศมี

สมการวงกลมรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

จะได้
$$(h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right)$$

และ
$$r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$$

2. พาราโบลา

- สมการพาราโบลารูปมาตรฐาน $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

ถ้า $c > 0$ เป็นรูปพาราโบลาหงาย

- จุดยอด คือ (h, k)

- จุดโฟกัส คือ $(h, k + c)$

- สมการเส้นไดเรกตริกซ์ คือ $y = k - c$

ถ้า $c < 0$ เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ

- จุดยอด คือ (h, k)

- จุดโฟกัส คือ $(h, k - c)$

- สมการเส้นไดเรกตริกซ์ คือ $y = k + c$

- สมการพาราโบลารูปมาตรฐาน $(x - h)^2 = 4c(y - k)$

ถ้า $c > 0$ เป็นรูปพาราโบลาตะแคงขวา

- จุดยอด คือ (h, k)

- จุดโฟกัส คือ $(h + c, k)$

- สมการเส้นไดเรกตริกซ์ คือ $x = h - c$

ถ้า $c < 0$ เป็นรูปพาราโบลาตะแคงซ้าย

- จุดยอด คือ (h, k)

- จุดโฟกัส คือ $(h - c, k)$

- สมการเส้นไดเรกตริกซ์ คือ $x = h + c$

*** ความกว้างของพาราโบลา ณ จุดโฟกัส (ลาตัสเรกตัม) เท่ากับ $|4c|$

3. วงรี

วงรีแนวนอน

- สมการรูปมาตรฐาน $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
- จุดศูนย์กลาง คือ (h, k)
- จุดโฟกัส คือ $(h \pm c, k)$
- จุดยอด คือ $(h \pm a, k)$
- จุดปลายแกนโท คือ $(h, k \pm b)$

วงรีแนวตั้ง

- สมการรูปมาตรฐาน $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
- จุดศูนย์กลาง คือ (h, k)
- จุดโฟกัส คือ $(h, k \pm c)$
- จุดยอด (จุดปลายแกนเอก) คือ $(h, k \pm a)$
- จุดปลายแกนโท คือ $(h \pm b, k)$

สมบัติอื่นๆ ของวงรี

- แกนเอกยาว $2a$ หน่วย, แกนโทยาว $2b$ หน่วย
- a จะมีค่ามากกว่า b และ c
- $a^2 = b^2 + c^2$
- ผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ บนวงรีไปยังจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$ หน่วย
- ลาดัสเรกตัม เท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

4. ไฮเพอร์โบลา

ไฮเพอร์โบลาแนวนอน

- สมการรูปมาตรฐาน $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
- จุดศูนย์กลาง คือ (h, k)
- จุดโฟกัส คือ $(h \pm c, k)$
- จุดยอด (จุดปลายแกนตามขวาง) คือ $(h \pm a, k)$
- จุดปลายแกนสังยุค คือ $(h, k \pm b)$
- สมการเส้นกำกับ คือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

ไฮเพอร์โบลาแนวตั้ง

- สมการรูปรมาตรฐาน $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$
- จุดศูนย์กลาง คือ (h, k)
- จุดโฟกัส คือ $(h, k \pm c)$
- จุดยอด (จุดปลายแกนตามขวาง) คือ $(h, k \pm a)$
- จุดปลายแกนลึงยุค คือ $(h \pm b, k)$
- สมการเส้นกำกับ คือ $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

สมบัติอื่นๆ ของไฮเพอร์โบลา

- แกนตามขวางยาว $2a$ หน่วย, แกนลึงยุคยาว $2b$ หน่วย
- c จะมีค่ามากกว่า a และ b
- $c^2 = a^2 + b^2$
- ผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2a$ หน่วย
- ลาดัสเรกตัม เท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์

- กำหนดให้ $A = \{a \mid \text{เส้นตรง } y = ax \text{ ไม่ตัดกราฟ } y^2 = 1 + x^2\}$
และ $B = \{b \mid \text{เส้นตรง } y = x + b \text{ ตัดกราฟ } y^2 = 1 - x^2 \text{ สองจุด}\}$
เซต $\{d \mid d = c^2, c \in B - A\}$ เท่ากับช่วงในข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
1) $(0, 1)$ 2) $(0, 2)$ 3) $(1, 2)$ 4) $(0, 4)$
- ถ้าเส้นตรงหนึ่งผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา $y^2 - 4y + 4x = 0$ และตัดเส้นโดเรทริกซ์ที่จุด (a, b) แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
1) 4 2) 5 3) 6 4) 7
- กำหนดให้ วงกลมรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 1)$ ถ้าเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $x = 1$ เส้นหนึ่งมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงกลมที่กำหนด (PAT 1 มี.ค. 52)
1) $(0, 1)$ 2) $(0, 2)$ 3) $(1, 0)$ 4) $(3, 0)$
- กำหนดให้ วงรีรูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 3, 0)$ และผ่านจุด $\left(2, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงรีที่กำหนด (PAT 1 มี.ค. 52)
1) $(-4, 0)$ 2) $\left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ 3) $(6, 0)$ 4) $(0, -3\sqrt{2})$

5. กำหนดให้เส้นตรง l_1 และ l_2 สัมผัสวงกลม $(x - 5)^2 + y^2 = 20$ ที่จุด P และ Q ตามลำดับ และจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q ถ้า l_1 มีสมการเป็น $x - 2y + 5 = 0$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรง l_2 (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 2) $(8, -1)$ 3) $(1, -8)$ 4) $(15, 0)$
6. กำหนดให้
- $$S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 17\}$$
- $$A = \{(x, y) | x^2 - y^2 = 1\}$$
- $$B = \{(x, y) | y^2 - x^2 = 1\}$$
- ถ้า $p \in S \cap A$ และ $q \in S \cap B$ แล้วระยะทางน้อยสุดที่เป็นไปได้ระหว่างจุด p และ q เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) $3\sqrt{2} - 4$ 2) $3\sqrt{2} - 2$ 3) $2\sqrt{3} - 2$ 4) $2\sqrt{3} - 3$
7. ระยะทางจากโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = -8x$ ไปยังเส้นตรง $2x + y = 6$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) $2\sqrt{5}$ หน่วย 2) $5\sqrt{2}$ หน่วย 3) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ หน่วย 4) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ หน่วย
8. กำหนดให้วงรี E มีโฟกัสทั้งสองอยู่บนวงกลม C ซึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 1$ ถ้า E สัมผัสกับ C ที่จุด $(1, 0)$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บน E (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 3) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 4) $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$
9. กำหนดให้ $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ และ $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0\}$ ถ้า $p \in A$ และ $q \in B$ แล้ว ระยะทางมากที่สุดที่เป็นไปได้ระหว่างจุด p และ q เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 52)
- 1) $5\sqrt{2}$ หน่วย 2) $2 + 5\sqrt{2}$ หน่วย 3) $2\sqrt{5}$ หน่วย 4) $5 + 2\sqrt{5}$ หน่วย
18. กำหนดให้ E เป็นวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุดยอดของไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = 1$ ถ้า E ผ่านจุด $(0, 1)$ แล้ว จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บน E (PAT 1 ต.ค. 52)
- 1) $\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 2) $(1, \sqrt{2})$ 3) $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 4) $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
11. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้าวงกลม $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(2, 1)$ และมีเส้นตรง $x - y + 2 = 0$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม แล้ว $|a + b + c|$ (PAT 1 ต.ค. 52)
12. พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(-1, 0)$ และมีจุดกำเนิดเป็นโฟกัส ถ้าเส้นตรง $y = x$ ตัดพาราโบลาที่จุด P และจุด Q แล้วระยะทางระหว่างจุด P กับจุด Q เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

13. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่งมีสมการเป็น $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$ แล้วไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรีและผ่านจุด $(-3, 1 + \sqrt{8})$ มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $5y^2 - 4x^2 - 10\sqrt{8}y - 32x - 25 = 0$ 2) $3y^2 - 2x^2 - 6\sqrt{8}y - 8x + 15 = 0$
 3) $y^2 - 4x^2 - 2y - 16x - 19 = 0$ 4) $y^2 - 7x^2 - 2y - 28x - 28 = 0$
14. จุด A(-3, 1), B(1, 5), C(8, 3) และ D(2, -3) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ข้อใดต่อไปนี้ผิด (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) ด้าน AB ขนานกับด้าน DC
 2) ผลบวกความยาวของด้าน AB กับ DC เท่ากับ $10\sqrt{2}$ หน่วย
 3) ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด D มีค่าเท่ากับ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ หน่วย
 4) ระยะตั้งฉากจากจุด B ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด D มีค่าเท่ากับ $\frac{9}{2}$ หน่วย
15. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี A(0, 0) และ B(2, 2) เป็นจุดยอดและ C(x, y) เป็นจุดยอดในจตุภาค (quadrant) ที่ 2 ที่ทำให้ด้าน AC ยาวเท่ากับด้าน BC ถ้าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ 4 ตารางหน่วย แล้วจุด C อยู่บนเส้นตรงในข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $x - y + 4 = 0$ 2) $4x + 3y - 1 = 0$ 3) $2x - y - 3 = 0$ 4) $x + y - 5 = 0$
16. กำหนดวงกลมรูปหนึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนจุดศูนย์กลางและจุดโฟกัสด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 90x + 64y + 17 = 0$ แล้ววงกลมดังกล่าวมีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $\frac{25\pi}{4}$ ตารางหน่วย 2) $\frac{25\pi}{2}$ ตารางหน่วย
 3) 4π ตารางหน่วย 4) 5π ตารางหน่วย
17. รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม $\hat{ABC}$ เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ถ้าพิกัดของจุด A และจุด B คือ (-4, 3) และ (-1, 2) ตามลำดับ แล้วสมการเส้นตรงในข้อใดผ่านจุด C (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $x + 8y - 27 = 0$ 2) $8x + y - 27 = 0$ 3) $4x - 5y + 3 = 0$ 4) $-5x + 4y + 3 = 0$
18. พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$ เป็นสมการวงกลมที่สัมผัสกับเส้นตรง ซึ่งมีสมการเป็น $21x + 20y + 168 = 0$
 ข. $y^2 + 16x - 6y = 71$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (-5, 3) และจุดโฟกัสที่ (-1, 3)
- ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

19. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A(-2, 3), B(2, 8), C(4, 4) และ D(0, -3) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 53)

 - 16 ตารางหน่วย
 - 32 ตารางหน่วย
 - $10\sqrt{13}$ ตารางหน่วย
 - $26\sqrt{10}$ ตารางหน่วย

20. จุด A(1, 0) และ จุด B(b, 0) เมื่อ $b > 1$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด (-1, 0) และสัมผัสกับวงกลมวงนี้ มีความชันเท่ากับ $\frac{4}{3}$ แล้ว b เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)

21. ให้เส้นตรง $x - y + 2 = 0$ ตัดกับวงกลม $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ ที่จุด A และจุด B ถ้า (a, b) เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $y = 2$ เป็นแกนของพาราโบลาและพาราโบลานี้ผ่านจุด A และจุด B แล้ว a + b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)

 - $\frac{11}{4}$
 - $\frac{9}{4}$
 - $\frac{7}{4}$
 - $\frac{5}{4}$

22. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 25y^2 + 24x - 100y - 164 = 0$ มีจุดยอดอยู่ที่จุดยอดของวงรี $4x^2 + 25y^2 + 24x + 100y + 36 = 0$ และมีแกนล้อยู่ยาวเท่ากับแกนโทของวงรี

ข. วงรี $4x^2 + 25y^2 + 24x + 100y + 36 = 0$ มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนพาราโบลา $y^2 + 4y - 4x + 12 = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 54)

 - ก. ถูก และ ข. ถูก
 - ก. ถูก และ ข. ผิด
 - ก. ผิด และ ข. ถูก
 - ก. ผิด และ ข. ผิด

23. กำหนดให้ $a > \tan 60^\circ$ และ A(a, 3), B(7, 8) และ C(-4, 9) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม A เป็นมุมฉาก ให้ L เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้พาราโบลา $ky = x^2 + 2k$ มีจุดร่วมกับเส้นตรง L เพียงจุดเดียว (PAT 1 มี.ค. 54)

เมตริกซ์

การเท่ากันของเมตริกซ์

ให้เมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และเมตริกซ์ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

จะได้ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$

การบวกลบเมตริกซ์

ให้เมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และเมตริกซ์ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

การคูณเมตริกซ์ด้วยค่าคงที่

ให้ c เป็นค่าคงที่ และ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$c \cdot A = [c \cdot a_{ij}]_{m \times n}$$

การคูณกันของเมตริกซ์

ให้เมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ เมตริกซ์ $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ และ $C = A \times B$ จะได้ C มีมิติเท่ากับ $m \times p$

สมบัติการคูณกันของเมตริกซ์

1. $AB \neq BA$
2. $(AB)C = A(BC)$
3. $A(B \pm C) = AB \pm AC$
4. $(B \pm C)A = BA \pm CA$
5. $AI = A = IA$ เมื่อ I คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์

เมตริกซ์จัตุรัส

คือ เมตริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$

*** สมาชิกของเมตริกซ์ในตำแหน่งที่ i เท่ากับ j เรียกว่า “สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก”

เมตริกซ์เอกลักษณ์ (I)

- เป็นเมตริกซ์จัตุรัส
- สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเท่ากับ 1 ที่เหลือเท่ากับ 0

เมตริกซ์สมมาตร

- A เป็นเมตริกซ์สมมาตรก็ต่อเมื่อ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและ $a_{ij} = a_{ji}$

เมตริกซ์เสมือนสมมาตร

- A เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตรก็ต่อเมื่อ เป็นเมตริกซ์จัตุรัสและ $a_{ij} = -a_{ji}$

เมตริกซ์ทรานสโพส

เมตริกซ์ A ทรานสโพส เขียนแทนด้วย A^t

เกิดจากการสลับแถวที่ i เป็นหลักที่ i และ สลับหลักที่ j เป็นแถวที่ j

สมบัติของทรานสโพส

- $(A^t)^t = A$
- $(c \cdot A)^t = c \cdot A^t$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
- $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$

ดีเทอร์มิแนนต์ (det)

- det มีค่าเป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียวเฉพาะเมตริกซ์จัตุรัส
- ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$
- เมตริกซ์เอกฐานหรือซิงกูลาร์เมตริกซ์ คือ $\det(A) = 0$
- เมตริกซ์มิใช่เอกฐานหรือนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ คือ $\det(A) \neq 0$
- ให้ $A = [a]$ จะได้ $|A| = a$
- ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $|A| = ad - bc$
- ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ จะได้ $|A| = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$
- การหาค่า $\det$ โดยใช้โคแฟกเตอร์ช่วย

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } |A| = a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A) + a_{14}C_{14}(A) \quad (\text{เลือกแถวที่ 1})$$

$$\text{หรือ } |A| = a_{21}C_{21}(A) + a_{22}C_{22}(A) + a_{23}C_{23}(A) + a_{24}C_{24}(A) \quad (\text{เลือกแถวที่ 2})$$

$$\text{หรือ } |A| = a_{12}C_{12}(A) + a_{22}C_{22}(A) + a_{32}C_{32}(A) + a_{42}C_{42}(A) \quad (\text{เลือกหลักที่ 2})$$

ไมเนอร์

ไมเนอร์ของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย $M_{ij}(A)$ ซึ่งเท่ากับ $|A|$ ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ออก

โคแฟกเตอร์

โคแฟกเตอร์ของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย $C_{ij}(A)$ ซึ่งเท่ากับ $(-1)^{i+j}M_{ij}(A)$

เมตริกซ์ผกผัน

เมตริกซ์ผกผันของ A เขียนแทนด้วย $\text{adj}(A)$ ซึ่งเท่ากับ $[C_{ij}(A)]^t$

อินเวอร์สของเมตริกซ์

ให้ A เป็นนอน-ซิงกูลาร์เมตริกซ์

อินเวอร์สของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^{-1} ซึ่งเท่ากับ $\frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$

$$\text{จาก} \quad A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

$$\text{จะได้} \quad \text{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$$

สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ ให้ A, B เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

1. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
2. $|A^t| = |A|$
3. $|c \cdot A| = c^n \cdot |A|$ เมื่อ c คือค่าคงที่และ n คือมิติของเมตริกซ์ A
4. $|A^n| = |A|^n$
5. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
6. $|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ เมื่อ n คือมิติของเมตริกซ์ A
7. ถ้าเมตริกซ์ A มีแถวสองแถวหรือหลักสองหลักใดของเมตริกซ์ซ้ำกัน แล้ว $|A| = 0$
8. ถ้าเมตริกซ์ A มีแถวหรือหลักใดเป็นศูนย์ทั้งหมด แล้ว $|A| = 0$
9. ถ้าสลับสองแถวหรือสองหลักของเมตริกซ์ A แล้วค่า $|A|$ ตัวใหม่จะเป็นจำนวนตรงข้ามของ $|A|$ ค่าเดิม
10. ถ้านำค่าคงที่ c คูณแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่ง แล้ว จะได้ $c|A|$
11. ถ้านำค่าคงที่คูณหลักใดหลักหนึ่งแล้วนำไปบวกกับอีกหลักหนึ่ง แล้ว ค่า $\det$ จะยังได้เท่าเดิม
12. ถ้านำค่าคงที่คูณแถวใดแถวหนึ่งแล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง แล้ว ค่า $\det$ จะยังได้เท่าเดิม

Row Operation

หลักการ คือ ถ้านำค่าคงที่คูณแถวใดแถวหนึ่งแล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง แล้ว ค่า $\det$ จะยังได้เท่าเดิม

ประโยชน์ของ Row Operation

1. หาค่า $\det$ ของเมตริกซ์ได้ง่ายขึ้น
2. ใช้หาอินเวอร์สของ A ในรูปแบบ $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$

กฎของคราเมอร์

$$\text{จากระบบสมการ} \quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

นำมาเขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } x = \frac{\begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}, y = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}, z = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}$$

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องเมตริกซ์

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 1 & y \end{bmatrix}$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $C_{11}(A) = 13$ และ $C_{21}(A) = 9$ แล้ว

$\det(A)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

- 1) -33 2) -30 3) 30 4) 33

2. กำหนดให้ $A^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ สมาชิกในแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ A^{-1} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(PAT 1 มี.ค. 52)

- 1) $-\frac{2}{3}$ 2) -2 3) $\frac{2}{3}$ 4) 2

3. ถ้า x, y, z สอดคล้องกับระบบสมการ

$$2x - 2y - z = -5$$

$$x - 3y + z = -6$$

$$-x + y - z = 4$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 52)

- 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 2) $x + y + z = 2$ 3) $xyz = 6$ 4) $\frac{xy}{z} = -2$

4. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 และ $\det(A) = 4$ ถ้า I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ และ $A - 3I$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แล้ว $\det(A + 3I)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)

1) 0 2) 6 3) 13 4) 26

5. ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น

$$2x - 2y - z = 1$$

$$x - 3y + z = 7$$

$$-x + y - z = -5$$

แล้ว $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)

1) 0 2) 2 3) 5 4) 8

6. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่ง $2A - B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ และ $A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ แล้ว $(AB)^{-1}$ คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)

1) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

7. กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ สอดคล้องสมการ $AX = C$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

และ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ถ้า $(2A + B)X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ต.ค. 52)

1) 3 2) 6 3) 9 4) 12

8. ถ้า $\det \left(2 \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \right) = \frac{1}{x-1}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ต.ค. 52)

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

9. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ สมาชิกในแถวที่ 3 หลักที่ 1 ของ A^{-1} เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

10. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 โดยที่ $2A - B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ และ $A - 2B = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

ค่าของ $\det(A^4 B^{-1})$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)

11. ให้ x, y, z และ w สอดคล้องกับสมการ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -1 \\ z & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix}$ ค่าของ $4w - 3z + 2y - x$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
12. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det(2A^t + BC^2 + B^tC)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) -1 2) 0 3) 2 4) 6
13. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง ถ้า $3 \begin{bmatrix} 5^a & b \\ 2^c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^a & 6 \\ d-1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5^a+b \\ 2^c & 2d \end{bmatrix}$ แล้วค่าของ $b + c$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
14. ให้ a, b, c, d, t เป็นจำนวนจริง ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $\det A = t \neq 0$ และ $\det(A + t^2A^{-1}) = 0$ แล้วค่าของ $\det(A - t^2A^{-1})$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
15. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$ ถ้า $A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ แล้วค่าของ xyz เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) -3 2) -1 3) 0 4) 1
16. กำหนดให้ X เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับสมการ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ แล้วค่าของ $\det(2X^t(X + X^t))$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
17. กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็มและ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มี $\det A = 3$ ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 โดยที่ $BA + BA^{-1} = 2I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณมิติ 2×2 แล้วค่าของ $\det B$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) $[1, 2]$ 2) $[-1, 0]$ 3) $[0, 1]$ 4) $[-2, -1]$
18. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \operatorname{cosec} 10^\circ & \sqrt{3} \\ \sec 10^\circ & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos^2 70^\circ & \sin 40^\circ \\ 0 & \cos^2 50^\circ \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} \cos^2 20^\circ & 0 \\ \sin 80^\circ & \cos^2 10^\circ \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det[A(B + C)]$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

การหารากที่สองของ $x \pm 2\sqrt{y}$

$$\text{จาก } x \pm 2\sqrt{y} = (\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2$$

$$\text{จะได้ } x = m + n$$

$$\text{และ } y = mn$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

- $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mid y = a^x\}$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$
- ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว จะเป็นฟังก์ชันลด
- ถ้า $1 < a$ แล้ว จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม
- a^x จะมีค่ามากกว่า 0 เสมอ

สมการเอกซ์โพเนนเชียล

$$\text{- ถ้า } a^m = a^n \text{ แล้ว } m = n$$

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

$$\text{จาก } a^m < a^n$$

$$\text{กรณี } 0 < a < 1 \text{ จะได้ } m > n$$

$$\text{กรณี } 1 < a \text{ จะได้ } m < n$$

ฟังก์ชันลอการิทึม

- $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid y = \log_a x\}$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$
- ตัวเลขหลัง $\log$ ต้องเป็นบวกเสมอ
- จาก $a^m = n$ ก็ต่อเมื่อ $m = \log_a n$

สมบัติของ $\log$

$$1. \log_a 1 = 0$$

$$2. \log_a a = 1$$

$$3. \log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$$

$$4. \log_a M - \log_a N = \log_a \left(\frac{M}{N}\right)$$

$$5. \log_a M^p = p \log_a M$$

$$6. \log_a^p M = \frac{1}{p} \log_a M$$

$$7. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$8. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$9. a^{\log_a M} = M$$

สมการลอการิทึม

$$\text{จาก } \log_a M = \log_a N \text{ จะได้ } M = N$$

อสมการลอการิทึม

$$\text{จาก } \log_a M < \log_a N$$

$$\text{กรณี } 0 < a < 1 \text{ จะได้ } M > N$$

$$\text{กรณี } 1 < a \text{ จะได้ } M < N$$

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

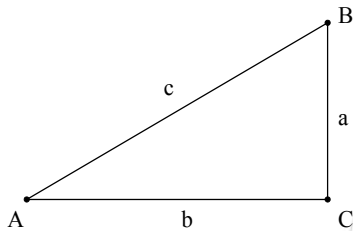
1. ถ้า $4^{x-y} = 128$ และ $3^{2x+y} = 81$ แล้วค่าของ y เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 52)
 1) -2 2) -1 3) 1 4) 2
2. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 52)
 1) [0, 4) 2) [4, 8) 3) [8, 12) 4) [12, 16)
3. กำหนดสมการ $\left(\frac{4}{15}\right)^x + \left(\frac{9}{25}\right)^x = 1$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
 ก. ถ้า a เป็นคำตอบของสมการ แล้ว $a > 1$
 ข. ถ้าสมการมีคำตอบ แล้วคำตอบจะมีเพียงคำตอบเดียว
 ข้อใดต่อไปนี้ถูก (PAT 1 มี.ค. 52)
 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด
4. คำตอบของสมการ $\log_{\sqrt{2}} (4 - x) = \log_2 (9 - 4x) + 1$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)
 1) [-10, -6) 2) [-6, -2) 3) [-2, 2) 4) [2, 6)
5. กำหนดให้ $x, y > 0$ ถ้า $x^y = y^x$ และ $y = 5x$ แล้วค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)
 1) [0, 1) 2) [1, 2) 3) [2, 3) 4) [3, 4)
6. กำหนดให้ $a, b, c > 1$ ถ้า $\log_a d = 30$, $\log_b d = 50$ และ $\log_{abc} d = 15$ แล้วค่าของ $\log_c d$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)
 1) 75 2) 90 3) 120 4) 150
7. ถ้า $x > 0$ และ $8^x + 8 = 4^x + 2^{x+3}$ แล้วค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี (PAT 1 ต.ค. 52)
 1) [0, 1) 2) [1, 2) 3) [2, 3) 4) [3, 4)
8. กำหนด $\log_y x + 4 \log_x y = 4$ แล้ว $\log_y x^3$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
9. รากที่มีค่าน้อยที่สุดของสมการ $2^{\log(x-2)} \cdot 2^{\log(x-3)} = 2^{\log 2}$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
10. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกและ $y \neq 1$ ถ้า $\log_y 2x = a$ และ $2^y = b$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 53)
 1) $\frac{1}{2} (\log_2 b)^a$ 2) $2 (\log_2 b)^a$ 3) $\frac{a}{2} (\log_2 b)$ 4) $2a (\log_2 b)$
11. เซตคำตอบของอสมการ $72^x + 72 < 2^{3x+3} + 3^{2x+2}$ เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 53)
 1) $(\log_8 7, \log_9 8)$ 2) $(\log_9 8, \log_8 9)$ 3) $(\log_8 9, \log_7 8)$ 4) $(\log_9 10, \log_8 9)$

12. ถ้าสมการ $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + a = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริงบวก แล้วค่าของ a ที่เป็นไปได้อยู่ในช่วงข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $(-\infty, -3)$ 2) $(-3, 0)$ 3) $(0, 1)$ 4) $(1, 3)$
13. กำหนดให้ $A = 7^{(7^7)}$, $C = 7^{77}$, $C = 77^7$ และ $D = (77^7)^7$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $B < A < C < D$ 2) $B < C < A < D$ 3) $C < B < D < A$ 4) $C < A < D < B$
14. พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. $2^{3/2} < 3^{4/3}$ ข. $\log_2 \left(\frac{3}{8}\right) < \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)$ (ก.ค. 53)
- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด
3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด
15. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $3^{2x+2} - 28(3^x) + 3 = 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log x + \log(x-1) = \log(x+3)$ แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
16. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $3^{5x} \cdot 9^{x^2} = 27$ และ $y = \frac{(\log_2 3)(\log_4 5)(\log_6 7)}{(\log_4 3)(\log_6 5)(\log_8 7)}$ ค่าของ x^y เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $-\frac{1}{8}$ 2) $\frac{1}{8}$ 3) -27 4) 27
17. กำหนด $a = 2^{48}$, $b = 3^{36}$ และ $c = 5^{24}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $\frac{1}{b} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a}$ 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ 3) $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{1}{c}$ 4) $\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b}$
18. ถ้า a , b และ c เป็นรากของสมการ $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง แล้ว $\log_{27} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) $\frac{1}{9}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) 1
19. เซตคำตอบของสมการ $\log_3 x^2 - \log_{27} x^3 = 6$ ตรงกับเซตคำตอบของสมการในข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) $\log_{1/4} \log_{1/3} \log_{1/2} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = 0$
2) $2 \log_2 (x+1) - \log_2 (x^2 - 14x + 41) = 1$
3) $3^{(1+\sqrt{x^2-8x-5})} + 3^{(2-\sqrt{x^2-8x-5})} = 28$
4) $\log_{3x} 3 + \log_{27} 3x + \frac{4}{3} = 0$

20. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และถ้า $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \log_2 (-x^2 + 7x - 10) + 3\sqrt{\cos\left(\pi\sqrt{x^2 + 7}\right)} - 1 = 1 \right\}$
แล้วผลบวกของสมาชิกในเซต B เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
21. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2 + 4x + 1)} = 1\}$ จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
22. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 ถ้า $(\log_b a)(\log_d c) = 1$ แล้วค่าของ $a^{(\log_b c - 1)b^{(\log_c d - 1)c^{(\log_d a - 1)d^{(\log_a b - 1)a}})}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
23. ถ้า A แทนเซตคำตอบของ $2(\log_3 x - 1)^{1/2} + \log_{1/3} x^3 + 4 > 0$ แล้วเซต A เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) (0, 3) 2) (1, 4) 3) (2, 5) 4) (2, 9)
24. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง
- $$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2 + 3x + 7} < \left(\frac{1}{4}\right)^{2x + 11} \right\}$$
- $$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 6x + 5}{x + 1} \geq 0 \right\}$$
- $B \cap A'$ เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0\}$ 2) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$
3) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ 4) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$
25. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ ถ้า $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^{2x} - 34(15^{x-1}) + 5^{2x} = 0\}$ และ $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \log_5 (5^{1/x} + 125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x} \right\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)
26. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด โดยที่ $n(P(A)) = \log_{\sqrt{2}} 4$, $n(P(B)) = (\sqrt{5})^{\log_5 256}$ และ $n(P(A \cup B)) = 3^{2 \log_9 32}$ เมื่อ P(S) แทนเพาเวอร์เซตของเซต S จงหาค่าของ $n(P(A) \cup P(B))$ (PAT 1 มี.ค. 54)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

บทนิยาม กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



ไซน์ (sine) ของมุม $A = \sin A = \frac{a}{c}$
 โคไซน์ (cosine) ของมุม $A = \cos A = \frac{b}{c}$
 แทนเจนต์ (tangent) ของมุม $A = \tan A = \frac{a}{b}$

เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ

$$\csc A = \frac{1}{\sin A}, \sec A = \frac{1}{\cos A}, \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad \tan^2 A + 1 = \sec^2 A \quad 1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

Co-function ของตรีโกณมิติ

$$\sin A = \cos (90^\circ - A), \cos A = \sin (90^\circ - A)$$

$$\csc A = \sec (90^\circ - A), \sec A = \csc (90^\circ - A)$$

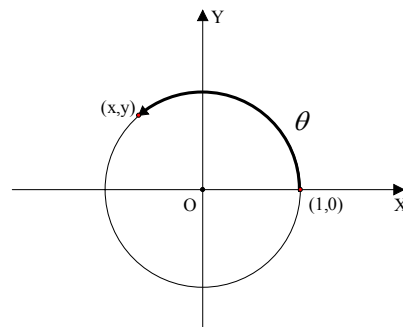
$$\tan A = \cot (90^\circ - A), \cot A = \tan (90^\circ - A)$$

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$*** \pi = 180^\circ ***$$

มุม	sin	cos	tan
30° หรือ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45° หรือ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60° หรือ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}$

วงกลมรัศมี 1 หน่วย



θ ความยาวของส่วนโค้งรูปวงกลมมีหน่วยเป็นเรเดียน

ให้ $\cos \theta$ แทนค่าของ x

และ $\sin \theta$ แทนค่าของ y

- $\theta > 0$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
- $\theta < 0$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

เครื่องหมายของฟังก์ชันในแต่ละจุดภาค

จุดภาค	sin, cosec	cos, sec	tan, cot
1	+	+	+
2	+	-	-
3	-	-	+
4	-	+	-

การยุบมุม

ให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

มุมที่วัดจากแกน X	มุมที่วัดจากแกน Y
- $n\pi \pm \theta$	- $\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \theta$
- ได้ฟังก์ชันเดิม	- ได้ Co-function
- เครื่องหมายตามจุดภาคของมุม	- เครื่องหมายตามจุดภาคของฟังก์ชันเดิม

ผลบวก - ผลต่างของมุม

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\cot (A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot A \pm \cot B}$$

มุมสองเท่า

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

มุมสามเท่า

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

มุมครึ่งเท่า

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$$

$$2 \cos A \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B)$$

ผลบวกและผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$
$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \cot x$	$(0, \pi)$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$y = \sec x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$y = \operatorname{arcsec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$y = \csc x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$y = \operatorname{arccsc} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันและอินเวอร์สฟังก์ชัน มีดังนี้

- $\sin (\arcsin x) = x$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$
 $\arcsin (\sin x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- $\cos (\arccos x) = x$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$
 $\arccos (\cos x) = x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$
- $\tan (\arctan x) = x$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$
 $\arctan (\tan x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
- $\cot (\operatorname{arccot} x) = x$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$
 $\operatorname{arccot} (\cot x) = x$ เมื่อ $0 < x < \pi$
- $\sec (\operatorname{arcsec} x) = x$ เมื่อ $x \leq -1$ หรือ $x \geq 1$
 $\operatorname{arcsec} (\sec x) = x$ เมื่อ $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$
- $\csc (\operatorname{arccsc} x) = x$ เมื่อ $x \leq -1$ หรือ $x \geq 1$
 $\operatorname{arccsc} (\csc x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ หรือ $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

รูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ

กฎของโคไซน์

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

กฎของไซน์

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ

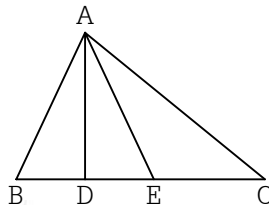
$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- ถ้า $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ แล้วค่าของ $\sin 2\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 52)
1) $\frac{4}{13}$ 2) $\frac{9}{13}$ 3) $\frac{4}{9}$ 4) $\frac{13}{9}$
- กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม A เท่ากับ 60° , $BC = \sqrt{6}$ และ $AC = 1$ ค่าของ $\cos (2B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 52)
1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{3}{4}$
- ให้ $-1 \leq x \leq 1$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2552}$ แล้วค่าของ $\sin \left(\frac{\pi}{2552} \right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 52)
1) $2x$ 2) $1 - 2x^2$ 3) $2x^2 - 1$ 4) $-2x$
- ค่าของ $\left(\frac{\sin 30^\circ - \cos 30^\circ}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ} \right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)
1) -1 2) 1 3) 2 4) -2
- กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม และ D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC ถ้า $AB = 4$ หน่วย, $AC = 3$ หน่วย และ $AD = \frac{5}{2}$ หน่วย แล้วด้าน BC ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)
1) 3 2) 4 3) 5 4) 6
- ถ้า $\arcsin (5x) + \arcsin (x) = \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\tan (\arcsin x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)
1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4) $\frac{1}{2}$

7. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้าน AB ยาว $\sqrt{2}$ หน่วย ถ้า $BC^3 + AC^3 = 2BC + 2AC$ แล้ว $\cot C$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
- 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) $\sqrt{3}$
8. ถ้า $1 - \cot 20^\circ = \frac{x}{1 - \cot 25^\circ}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
9. ถ้า $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{3}{2}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ แล้ว $\arccos(\tan 3\theta)$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
10. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\sin x + \cos x = a$ และ $\sin x - \cos x = b$ แล้วค่าของ $\sin 4x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $\frac{1}{2}(a^3b - ab^3)$ 2) $\frac{1}{2}(ab^3 - a^3b)$ 3) $ab^3 - a^3b$ 4) $a^3b - ab^3$
11. กำหนดให้ $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $x \neq 1$ ถ้า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $f(\sec^2 \theta)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $\sin^2 \theta$ 2) $\cos^2 \theta$ 3) $\tan^2 \theta$ 4) $\cot^2 \theta$
12. ให้ α และ β เป็นมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$
 ถ้า $\cos \left(\arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right) + \sin \left(\arccos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right) = 1$ แล้ว $\sin \beta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
13. ค่าของ $\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
14. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$ แล้วค่าของ $\sin \left(\frac{\pi}{15} + \arccos(x^2) \right)$ อยู่ในช่วงใด (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$
15. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ แล้ว $\frac{1}{a} \cos A + \frac{1}{b} \cos B + \frac{1}{c} \cos C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$ 2) $\frac{(a + b + c)^2}{abc}$ 3) $\frac{(a + b + c)^2}{2abc}$ 4) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$
16. ถ้า $\sin 15^\circ$ และ $\cos 15^\circ$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + ax + b = 0$ แล้ว ค่าของ $a^4 - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) -1 2) 1 3) 2 4) $1 + 3\sqrt{2}$

17. ให้ $T(x) = \sin x - \cos^2 x + \sin^3 x - \cos^4 x + \sin^5 x - \cos^6 x + \dots$ แล้วค่าของ $3T\left(\frac{\pi}{3}\right)$ เท่ากับ
ข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) $4\sqrt{3} - 1$ 2) $5\sqrt{3} - 1$ 3) $6\sqrt{3} - 1$ 4) $7\sqrt{3} - 1$
18. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูป



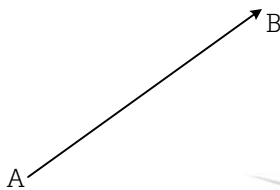
- ถ้ามุม $\hat{ABC} = 30^\circ$, $\hat{BAC} = 135^\circ$ และ AD และ AE แบ่งมุม $\hat{BAC}$ ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กันแล้ว $\frac{EC}{BC}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4) $\sqrt{2}$
19. ค่าของ $\frac{\tan \left[\operatorname{arccot} \frac{1}{5} - \operatorname{arccot} \frac{1}{3} + \operatorname{arctan} \frac{7}{9} \right]}{\sin \left[\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} \right]}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
20. กำหนดให้ $(\sin 1^\circ)(\sin 3^\circ)(\sin 5^\circ)\dots(\sin 89^\circ) = \frac{1}{2^n}$ ค่าของ $4n$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
21. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการ $5(\sin a + \cos a) + 2 \sin a \cos a = 0.04$ ค่าของ $125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75 \sin a \cos a$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
22. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos B = \frac{5}{13}$ ค่าของ $\cos C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) $\frac{16}{65}$ 2) $-\frac{16}{65}$ 3) $\frac{48}{65}$ 4) $-\frac{33}{65}$
23. ค่าของ $\cot(\operatorname{arccot} 7 + \operatorname{arccot} 13 + \operatorname{arccot} 21 + \operatorname{arccot} 31)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) $\frac{11}{4}$ 2) $\frac{13}{4}$ 3) $\frac{9}{2}$ 4) $\frac{25}{2}$
24. ค่าของ $\log_2(1 + \tan 1^\circ) + \log_2(1 + \tan 2^\circ) + \dots + \log_2(1 + \tan 44^\circ)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)
25. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ มีความยาวตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c หน่วยตามลำดับ ถ้า $a^2 + b^2 = 31c^2$ แล้วค่าของ $3 \tan C (\cot A + \cot B)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)
26. ให้ A เป็นเซตคำตอบของ $\cos x = \cos \left(\frac{x}{4} \right)$ จำนวนสมาชิกในเซต $A \cap (0, 24\pi)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

เวกเตอร์ในสามมิติ

เวกเตอร์

ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์

ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์



$\vec{AB}$ เป็นสัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ AB โดยมีจุดเริ่มต้นที่ A และจุดสิ้นสุดที่ B
 $|\vec{AB}|$ เป็นสัญลักษณ์แทนขนาด ของ $\vec{AB}$

การขนานกันของเวกเตอร์

$\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสอง มีทิศทางเดียวกัน หรือ ทิศทางตรงกันข้าม

การเท่ากันของเวกเตอร์

$\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสอง มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\vec{u} = \vec{v}$

นิเสธของเวกเตอร์

นิเสธของ $\vec{u}$ คือ เวกเตอร์มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$

การบวกเวกเตอร์

ผลบวกของ $\vec{AB}$ และ $\vec{BC}$ เขียนแทนได้ด้วย $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

การลบเวกเตอร์

ผลลบของ $\vec{u}$ ด้วย $\vec{v}$ หมายถึง ผลบวกของ $\vec{u}$ และนิเสธของ $\vec{v}$ เขียนแทน ด้วย $\vec{u} - \vec{v}$ นั่นคือ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

$a\vec{u}$ โดย $a \in \mathbb{R}$ และ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีใช่ $\vec{0}$ จะได้

- ถ้า $a = 0$ จะได้ $a\vec{u} = \vec{0}$
- ถ้า $a > 0$ จะได้ $|a\vec{u}| = a|\vec{u}|$ โดย $a\vec{u}$ กับ $\vec{u}$ มีทิศทางเดียวกัน
- ถ้า $a < 0$ จะได้ $|a\vec{u}| = |a||\vec{u}|$ โดย $a\vec{u}$ กับ $\vec{u}$ มีทิศทางตรงกันข้ามกัน

ทฤษฎีเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

สำหรับ $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$

- $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง $a \neq 0$ ที่ทำให้ $\vec{u} = a\vec{v}$
- $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ ถ้า $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ แล้ว $a = 0$ และ $b = 0$

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

จุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2, y_2)$ จะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1, z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2, y_2, z_2)$ จะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

บทนิยาม	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $c = d$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d, b = e$ และ $c = f$
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + d \\ b + e \\ c + f \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - d \\ b - e \\ c - f \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ	$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ

ขนาดของเวกเตอร์ในสองมิติ และสามมิติ

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และขนาดของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสองมิติและสามมิติ

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ สามารถเขียนเป็น $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$

และ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ สามารถเขียนเป็น $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

โคไซน์แสดงทิศทาง

$\vec{OP} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ กำหนด $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เป็นมุมที่วัดจากแกนพิกัดด้านบวกทั้งสามตามลำดับไปยัง $\vec{OP}$

จะได้ $\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{OP}|}$, $\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{OP}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{OP}|}$

ผลคูณเชิงสเกลาร์

ให้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$

เวกเตอร์สองมิติ ให้ $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ และ $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

เวกเตอร์สามมิติ ให้ $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ และ $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง เวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$
2. ถ้า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
3. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
4. $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ของ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ คือเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$

หรือ $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$

เขียนแทนด้วย $\vec{u} \times \vec{v}$ อ่านว่า “เวกเตอร์ยูครอสเวกเตอร์”

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

- กำหนด $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

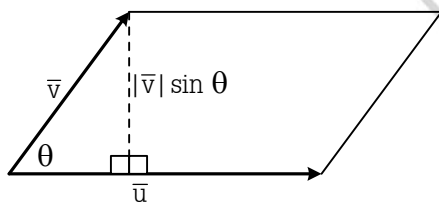
$$\vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$$

$$(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$$

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

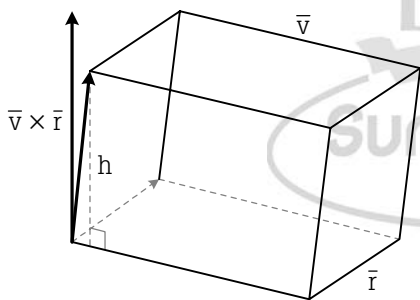
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$
- ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ จะได้ว่า $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
- ถ้า $\vec{u} \neq \vec{0}$ และ $\vec{v} \neq \vec{0}$ จะได้ว่า $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$
เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$
- ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และไม่ขนานกัน
จะได้ว่า $\vec{u} \times \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$

ปริมาตรรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน



ปริมาตรของรูปทรงเท่ากับ $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

1. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน M เป็นจุดบนด้าน AD ซึ่ง $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AD}$ และ N เป็นจุดบนเส้นทแยงมุม AC ซึ่ง $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AC}$ ถ้า $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$ แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

1) $\frac{2}{15}$
2) $\frac{1}{5}$
3) $\frac{1}{3}$
4) 1
2. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ถ้าเวกเตอร์ $\vec{u} + 2\vec{v}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $2\vec{u} + \vec{v}$ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

1) $-\frac{4}{5}$
2) 0
3) $\frac{1}{5}$
4) $\frac{3}{5}$
3. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย ถ้าเวกเตอร์ $3\vec{u} + \vec{v}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{u} + 3\vec{v}$ แล้วเวกเตอร์ $5\vec{u} - \vec{v}$ มีขนาดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

1) 3 หน่วย
2) $3\sqrt{2}$ หน่วย
3) 4 หน่วย
4) $4\sqrt{2}$ หน่วย
4. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \neq |\vec{u}| |\vec{v}|$ ถ้า $a(\vec{v} - 2\vec{u}) + 3\vec{u} = b(2\vec{u} + \vec{v})$ แล้วค่าของ a อยู่ในช่วงข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

1) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$
2) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$
3) $\left[1, \frac{3}{2}\right)$
4) $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$
5. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ซึ่ง $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ และ $\vec{u} + \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u} - \vec{v}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$
ข. $\vec{u} + 2\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $2\vec{u} - \vec{v}$

 ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (PAT 1 ต.ค. 52)

1) ก. ถูก และ ข. ถูก
2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก
4) ก. ผิด และ ข. ผิด
6. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี D เป็นจุดบนด้าน AC และ F เป็นจุดบนด้าน BC ถ้า $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{DF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC}$ แล้ว $\frac{a}{b}$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
7. ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ กำหนดโดย $\vec{a} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - 3p\vec{k}$ และ $\vec{b} = -2p\vec{i} + 2\vec{j} + p\vec{k}$ เมื่อ p เป็นจำนวนจริง ถ้า $\vec{a}$ ตั้งฉากกับ $\vec{b}$ และขนาดของ $\vec{b}$ เท่ากับ 3 แล้ว ค่าของ p อยู่ในช่วงข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)

1) $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$
2) $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$
3) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$
4) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

8. ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ กำหนดโดย $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง ถ้า $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 3$, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ เมื่อ q, r เป็นจำนวนจริง และ $\vec{w}$ ขนานกับ $-\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$ แล้วค่าของ $a + 4b + 2c$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
9. กำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ โดยที่ $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$, $|\vec{v}| = 3$ และ $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$ ค่าของ $|\vec{u} + \vec{v}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{10}$ 3) $\sqrt{13}$ 4) 4
10. กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ให้ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ โดยที่ $\vec{u} \cdot \vec{w} = -11$ และ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 8$ ถ้า θ เป็นมุมแหลมที่เวกเตอร์ $\vec{w}$ ทำมุมกับเวกเตอร์ $5\vec{i} + \vec{j}$ แล้ว $\tan \theta + \sin 2\theta$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
11. กำหนดให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบและ x, y เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ และ $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ถ้า $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ และ $5x + 5y = 21$ แล้วค่าของ $\vec{u} \cdot \vec{w}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) 5 2) 6 3) 10 4) 14
12. กำหนดให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v})$
- 2) ถ้า $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (|\vec{u}| |\vec{v}|)^2$ แล้ว $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$
- 3) ถ้า $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 4$ และ $|\vec{w}| = 7$ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$
- 4) $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$
13. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ โดยที่ $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 3$ และ $\vec{u}$ ทำมุม 60° กับ $\vec{v}$ ค่าของ $\frac{|\vec{u} + \vec{v}|}{2\vec{u} - \vec{v}}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) $\sqrt{\frac{13}{19}}$ 2) $\sqrt{\frac{13}{7}}$ 3) 1 4) $\sqrt{\frac{7}{19}}$
14. กำหนดให้ $A(a, b)$, $B(4, -6)$ และ $C(1, -4)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า P เป็นจุดบนด้าน AB ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A เท่ากับ $\frac{3}{5}$ ของระยะระหว่าง A และ B และเวกเตอร์ $\vec{CP} = \vec{i} + 2\vec{j}$ แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน

ประกอบด้วย จำนวนจริง และจำนวนจินตภาพ

การเขียนจำนวนเชิงซ้อน

ใช้ z แทนจำนวนเชิงซ้อน

$$z = a + bi$$

โดยที่ a คือ ส่วนจริง $\text{Re}(z)$

b คือ ส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$

และ กำหนดให้ $i = \sqrt{-1}$

ค่าของ i^n

- 4 ทหาร n แล้วเหลือเศษ 1 จะมีค่าเท่ากับ i
- 4 ทหาร n แล้วเหลือเศษ 2 จะมีค่าเท่ากับ -1
- 4 ทหาร n แล้วเหลือเศษ 3 จะมีค่าเท่ากับ $-i$
- 4 ทหาร n ลงตัว จะมีค่าเท่ากับ 1

การดำเนินการของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$

1. $z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$

สังยุค (Conjugate)

ค่าสังยุคของ $z = a + bi$ เท่ากับ $\bar{z} = a - bi$

สมบัติของสังยุค

1. $\overline{\bar{z}} = z$
2. $\overline{cz} = c\bar{z}$
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
5. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

ค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์หรือขนาดของ $z = a + bi$ คือ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

สมบัติของค่าสัมบูรณ์

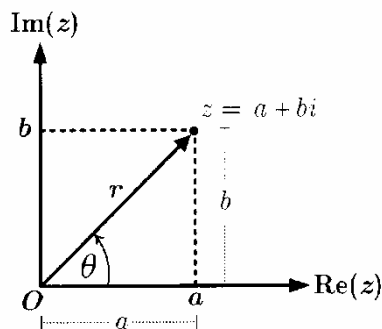
1. $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
4. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ เมื่อ $|z_2| \neq 0$
5. $|z^n| = |z|^n$
6. $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $|z| \neq 0$
7. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 + |z_2|^2$

อินเวอร์สของจำนวนเชิงซ้อน

อินเวอร์สของ z คือ $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

จากรูป



จะได้ว่า $z = a + bi$

เปลี่ยนเป็น $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ โดยที่ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในรูปของเชิงขั้ว

กำหนดให้ $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2))$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2))$
3. $|z_1|^n = r^n (\cos (n\theta_1) + i \sin (n\theta_1))$

รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

$$z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) \right) \text{ เมื่อแทนค่า}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

กำหนดให้ $P(x) = 0$ เป็นสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ของพจน์ทุกพจน์เป็นจำนวนจริงจะได้ว่า

ถ้า $z = a + bi$ เป็นรากคำตอบของ $P(x)$ แล้ว $\bar{z} = a - bi$ จะเป็นรากคำตอบของ $P(x)$ ด้วย

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องจำนวนเชิงซ้อน

- กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $z^2 + z + 1 = 0$ เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต S (PAT 1 มี.ค. 52)
 - $\{-\cos 120^\circ - i \sin 60^\circ, \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\}$
 - $\{\cos 120^\circ + i \sin 60^\circ, -\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\}$
 - $\{-\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ, -\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\}$
 - $\{\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ, -\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\}$
- กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1 + z_2|^2 = 5$ และ $|z_1 - z_2|^2 = 1$ ค่าของ $|z_1|^2 + |z_2|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
- กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $z^4 + 1 = 0$ ค่าของ $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
- กำหนดให้ $z_1 \cdot z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1 + z_2| = 3$ และ $z_1 \cdot \bar{z}_2 = 3 + 4i$ ค่าของ $|z_1|^2 + |z_2|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
- กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับ $z^3 - 2z^2 + 2z = 0$ และ $z \neq 0$ ถ้าอาร์กิวเมนต์ของ z อยู่ในช่วง $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ แล้ว $\frac{z^4}{(\bar{z})^2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 52)
 - $-2i$
 - $1 - i$
 - $1 + i$
 - $2i$
- กำหนดให้ w, z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $\bar{w} = z - 2i$ และ $|w|^2 = z + 6$ ถ้าอาร์กิวเมนต์ของ w อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ และ $w = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

7. ให้ $z_1, z_2, z_3, \dots$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = 0, z_{n+1} = z_n^2 + i$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ ค่าสัมบูรณ์ของ z_{111} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) $\sqrt{110}$
8. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ และ $\bar{z}_2$ แทนสังยุค (Conjugate) ของ z_2 ถ้า $5z_1 + 2z_2 = 5$ และ $\bar{z}_2 = 1 + 2i$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้วค่าของ $|5z_1^{-1}|$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
9. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $z_1^{-1} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ เมื่อ $i^2 = -1$ และ $5z_1 + 2z_2 = 5$ แล้ว $\bar{z}_2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $3 - 2i$ 2) $3 + 2i$ 3) $1 - 2i$ 4) $1 + 2i$
10. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
11. พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $z^2 = \frac{2+i}{2+i} + \frac{3+4i}{1+2i} + \frac{5+15i}{3-i}$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ แล้วค่าสัมบูรณ์ของ z เท่ากับ $\sqrt{37}$
- ข. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{-5+2i}{x+yi} = \frac{10}{i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}$ แล้วค่าของ $x+y = 15$
- ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด
12. ถ้า $(1+bi)^3 = -107 + ki$ เมื่อ b, k เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ แล้ว $|k|$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
13. กำหนดให้ a, b และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|a| \neq |b|, |a| \neq 1$ และ $|b| \neq 1$ ถ้า $|az+b| = |\bar{b}z+\bar{a}|$ แล้ว $|z|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
14. ถ้า $x - 1 + i$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x) = x^3 + ax^3 + 4x + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) 17 2) 13 3) 8 4) 5
15. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$ และ $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$ ค่าของ $\frac{|11\bar{z}_1| - |5z_2|}{|z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2|}$ เท่ากับเท่าใด ($\bar{z}$ แทนสังยุค (Conjugate) ของ z) (PAT 1 มี.ค. 54)

ลำดับและอนุกรม

ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

เขียนแทนในรูป $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ลำดับเลขคณิต

$$\text{ผลต่างร่วม } d = a_{n+1} - a_n$$

$$\text{พจน์ทั่วไป } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ลำดับเรขาคณิต

$$\text{อัตราส่วนร่วม } r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\text{พจน์ทั่วไป } a_n = a_1 r^{n-1}$$

ลิมิตของลำดับ a_n เขียนแทนด้วย $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาค่าได้ จะเรียกว่า ลำดับลู่เข้า หรือลำดับคอนเวอร์เจนต์

ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาค่าไม่ได้ จะเรียกว่า ลำดับลู่ออก หรือลำดับไดเวอร์เจนต์

การหาค่า limit ของลำดับอนันต์

กำหนดให้ $k > 1$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n$ หาค่าไม่ได้

$$\text{- } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}\right)^n = 0$$

ทฤษฎีของ limit

ถ้า a_n และ b_n เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์และ c เป็นค่าคงที่แล้ว

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ โดยที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^k$

สัญลักษณ์แทนการบวก

ใช้สัญลักษณ์ $\sum$ อ่านว่า “ซิกมา”

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

สมบัติของ $\sum$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$1. \sum_{i=1}^n c = c \cdot n$$

$$2. \sum_{i=1}^n (c \cdot a_i) = c \sum_{i=1}^n a_i$$

$$3. \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\text{ข้อตกลง } \sum_{i=1}^n i \text{ สามารถเขียนแทนด้วย } \sum n$$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ $\sum$

$$1. \sum n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \sum n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมสามารถเขียนแทนด้วย S_n

$$\text{นั่นคือ } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = \sum a_n$$

$$\text{และ } a_n = S_n - S_{n-1}$$

อนุกรมเลขคณิตจำกัด

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \text{ หรือ } S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

อนุกรมเรขาคณิตจำกัด

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

อนุกรมอนันต์

$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \text{โดยที่ } S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

- ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าได้ จะเรียกว่า อนุกรมลู่เข้า หรือ อนุกรมคอนเวอร์เจนต์

- ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ หาค่าไม่ได้ จะเรียกว่า อนุกรมลู่ออก หรือ อนุกรมไดเวอร์เจนต์

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \text{ โดยที่ } -1 < r < 1$$

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องลำดับและอนุกรม

1. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2b + 1}{2n^2a - 1} = 1$ แล้วผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right)^n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
 - 1) $\frac{1}{3}$
 - 2) $\frac{2}{3}$
 - 3) 1
 - 4) หาค่าไม่ได้
2. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับที่สอดคล้องกับ $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n ถ้า $\sum_{n=1}^{10} a_n = 31$ แล้ว $\sum_{n=1}^{2552} a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
 - 1) $2^{1275} - 1$
 - 2) $2^{1276} - 1$
 - 3) $2^{2552} - 1$
 - 4) หาค่าไม่ได้
3. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$ แล้วค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ a_2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
 - 1) 4
 - 2) 2
 - 3) 1
 - 4) หาค่าไม่ได้เพราะ a_2 มีค่ามากได้อย่างไม่มีขีดจำกัด
4. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n - a_1}{n} \right) = 5$ ถ้า $a_9 + a_5 = 100$ แล้ว a_{100} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) 500
 - 2) 515
 - 3) 520
 - 4) หาไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ
5. ถ้า $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^k}{1 + 8 + 27 + \dots + n^3} \right)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกแล้ว แล้วค่าของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) 0
 - 2) 2
 - 3) 4
 - 4) 8
6. ถ้า $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4 - n^2} = A$ แล้ว $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) $\frac{3}{4} + A$
 - 2) $\frac{5}{4} + A$
 - 3) $\frac{3}{4} - A$
 - 4) $\frac{5}{4} - A$
7. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} = 1$ สำหรับทุกจำนวนนับ n ถ้า $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 250$ แล้ว $|a_{2552} - 2.5|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
 - 1) $1 + \sqrt{5}$
 - 2) $2 + \sqrt{5}$
 - 3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
 - 4) $2\sqrt{5}$

8. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า ลำดับ a_n ลู่เข้า แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

ข. ถ้า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n}{2^n}\right)$ ลู่เข้า

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (PAT 1 ต.ค. 52)

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

9. ถ้า a_n เป็นลำดับเลขคณิตซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n} \right) = 4$ แล้ว $\sqrt{\frac{a_{17} - a_9}{2}}$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 12n + 27n + \dots + 3n^3}{1 + 8 + 27 + \dots + n^3} \right)$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

11. ผลบวกของอนุกรม $3 + \frac{11}{4} + \frac{33}{16} + \dots + \frac{3^n + 2^n - 2}{4^{n-1}} + \dots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)

1) $\frac{20}{3}$

2) $\frac{29}{3}$

3) $\frac{31}{3}$

4) $\frac{40}{3}$

12. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ $a_n = \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{n^2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)

13. กำหนดให้ $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k(k+1)} + k\sqrt{k+1}} \right)$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)

14. กำหนดให้ x, y, z เป็นลำดับเรขาคณิต มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ r และ $x \neq y$ ถ้า $x, 2y, 3z$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้วค่า r เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{2}$

4) 2

15. กำหนดให้อนุกรมต่อไปนี้ $A = \sum_{k=1}^{1000} (-1)^k$, $B = \sum_{k=3}^{20} k^2$, $C = \sum_{k=1}^{100} k$, $D = \sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ค่าของ $A + B + C + D$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)

1) 7,917

2) 7,919

3) 7,920

4) 7,922

16. ค่าของ $\frac{\sum_{n=1}^{44} \cos n}{\sum_{n=1}^{44} \sin n} - \frac{\sum_{n=1}^{44} \sin n}{\sum_{n=1}^{44} \cos n}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)

17. ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2 a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$
ถ้า $a_1 = 100$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
18. กำหนดให้ β เป็นจำนวนจริง และให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ นิยามโดย $a_n = \frac{\beta n - 7}{n + 2}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้าผลบวก 9 พจน์แรกมีค่ามากกว่าผลบวก 7 พจน์แรกของลำดับ $\{a_n\}$ เป็นจำนวนเท่ากับ a_{108} แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
19. กำหนดให้ $a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$
ค่าของ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{20}}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
20. ให้ k เป็นค่าคงที่ และถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n^5 + n) + 3n^4 + 2}{(n + 2)^5} = 15 + 6 + \frac{12}{5} + \dots + 15\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \dots$ แล้ว k มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
21. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n} a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 53)
1) 4 2) $\frac{16}{3}$ 3) 8 4) 16
22. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยมีสมบัติ ดังนี้
ก. $a_{15} - a_{13} = 3$
ข. ผลบวก m พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ เท่ากับ 325
ค. ผลบวก $4m$ พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ เท่ากับ 4900
แล้วพจน์ a_{2m} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 53)
1) $\frac{61}{2}$ 2) $\frac{121}{2}$ 3) $\frac{125}{2}$ 4) 119
23. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = 2$ และ $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1})$ สำหรับ $n = 2, 3, \dots$ แล้วค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
24. บทนิยาม ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
เรียกพจน์ a_n ว่า พจน์คู่ ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ
เรียกพจน์ a_n ว่า พจน์คี่ ถ้า n เป็นจำนวนคี่
กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่มีจำนวนพจน์เป็นจำนวนคู่ และผลบวกของพจน์คี่ทั้งหมด เท่ากับ 36 และผลบวกของพจน์คู่ทั้งหมดเท่ากับ 56 ถ้าพจน์สุดท้ายมากกว่าพจน์แรก เป็นจำนวนเท่ากับ 38 แล้วลำดับเลขคณิต $\{a_n\}$ นี้ มีทั้งหมดกี่พจน์ (PAT 1 ต.ค. 53)

25. ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $b_1 = -3$ และ $b_{n+1} = \frac{1+b_n}{1-b_n}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ b_{1000} เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
26. ค่าของ $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1})}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
27. กำหนดให้ $S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \dots$
 ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{S_n}} \right)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
28. ถ้าผลคูณของลำดับเรขาคณิต 3 จำนวนที่เรียงติดกัน เท่ากับ 343 และผลบวกของทั้งสามจำนวนนี้ เท่ากับ 57 แล้วค่ามากที่สุดที่สุดในบรรดา 3 จำนวนนี้ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
29. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_{n+1} = n^2 - a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ a_1 ที่ทำให้ $a_{101} = 5100$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 54)
 1) 50 2) 25 3) 1 4) 0
30. กำหนดให้ 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ $2a + 14, 2b - 1, 3b - a$ และ $a + 3b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง พจน์ที่ 1000 ของลำดับเลขคณิตนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 54)
 1) 3,997 2) 3,999 3) 4,001 4) 4,003
31. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $2a, 3b, 4c$ เป็นลำดับเรขาคณิต และ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ เป็นลำดับเลขคณิต
 ค่าของ $\frac{a}{c} + \frac{c}{a}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)
32. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = 1$ และ $a_n + 1 \leq a_{n+1}$ และ $a_{n+5} \leq a_n + 5$
 สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ แล้วค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + 6 - k) \right)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)
33. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $xf(x) + f(1-x) = 2x - x^2$
 เมื่อ $x \in R$ แล้ว ค่าของ $\sum_{x=25}^{54} (x + f(x))$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

แคลคูลัสเบื้องต้น

ลิมิตของฟังก์ชัน

การพิจารณาว่า เมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริง a ใดๆ จะพิจารณาทั้ง 2 กรณี คือ

- เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x < a$ จะกล่าวว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \rightarrow a^-$
 - เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ จะกล่าวว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \rightarrow a^+$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

การหาลิมิตของฟังก์ชัน $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ให้แทนค่า $x = a$ ใน $f(x)$

- ถ้าแทนออกมาแล้วเป็นจำนวนจริงให้ตอบค่านั้นได้
- ถ้าแทนออกมาแล้วเป็น $\frac{k}{0}$ โดยที่ $k \neq 0$ ให้ตอบว่า หาค่าไม่ได้
- ถ้าแทนออกมาแล้วเป็น $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ เรียกว่า รูปแบบไม่กำหนด ต้องจัดรูปฟังก์ชันใหม่ดังนี้
 1. การแยกตัวประกอบ
 2. การหาจำนวนที่เหมาะสมคูณทั้งเศษและส่วน

ทฤษฎีบทลิมิตของฟังก์ชัน

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ R

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, n \in \mathbb{I}^+$
4. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ เมื่อ L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL, c$ เป็นค่าคงตัว
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$

$$\begin{aligned}
4. \quad \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ เมื่อ } M \neq 0 \\
5. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n &= \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n, n \in \mathbb{I}^+ \\
6. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, n \in \mathbb{I}^+ - \{1\} \text{ และ } \sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อฟังก์ชัน f มีสมบัติต่อไปนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ [นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$]
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

อัตราการเปลี่ยนแปลง

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนไปเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ และค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ ไปเป็น $f(x + h)$ แล้ว

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ใช้สัญลักษณ์ $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y' แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x

โดยที่ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$
2. $\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
3. $\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$
4. $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0$
5. $\frac{d}{dx} [f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
6. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

อนุพันธ์อันดับสูง

คือ การหาอนุพันธ์ไปเรื่อยๆ ใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^ny}{dx^n}$ หรือ $\frac{d^n[f(x)]}{dx^n}$ แทน $f^{(n)}(x)$

ความชันของเส้นโค้ง

ถ้า $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง ดังนั้น

1. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ $= f'(x)$
2. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(x_1, y_1) = f'(x_1)$
3. ความชันของเส้นปกติที่จุด $(x_1, y_1) = \frac{-1}{f'(x_1)}, f'(x_1) \neq 0$
4. สมการเส้นตรงที่มี ความชัน $= m$ และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b)

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุกๆ x ใน (a, b) แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกๆ x ใน (a, b) แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

ถ้า x_0 อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f โดยที่ $f'(x_0) = 0$ หรือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x_0 แล้วจะเรียกว่า x_0 ว่าค่าวิกฤต (Critical value) ของฟังก์ชัน f และ จุด $(x_0, f(x_0))$ บนกราฟของฟังก์ชัน f เรียกว่า จุดวิกฤต (Critical point)

การทดสอบค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I ซึ่งมีค่าวิกฤต x_0 ของ f และพิจารณา $f'(x)$ บนช่วง เว้นแต่ที่ $x = x_0$

1. ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจาก $+$ เป็น $-$ ผ่าน x_0 แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$
2. ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจาก $-$ เป็น $+$ ผ่าน x_0 แล้ว f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน

วิธีการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$

1. หาค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f บนช่วงเปิด (a, b)
2. หาค่าของฟังก์ชันที่ค่าวิกฤตทุกๆ ค่า และค่าของฟังก์ชัน ณ จุดปลายของฟังก์ชัน f นั่นคือ หาค่า $f(a)$ และ $f(b)$
3. จะได้ว่า ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f คือ ค่าฟังก์ชันที่มากที่สุดและ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f คือ ค่าฟังก์ชันที่น้อยที่สุด

การอินทิเกรต

ฟังก์ชัน $F(x)$ จะถูกเรียกว่าเป็น ปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ถ้า $F'(x) = f(x)$

สูตรการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว

1. $\int k dx = kx + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
3. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
4. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

อินทิกรัลจำกัดเขต

อินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x)$ ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ โดยที่ฟังก์ชัน $F(x)$ เป็นปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

อินทิกรัลจำกัดเขตกับการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน x ในช่วง $x = a$ และ $x = b$ หาได้ดังนี้

- ขั้นตอนที่ 1** หาจุดตัดแกน x ซึ่งอยู่ในช่วง $[a, b]$
- ขั้นตอนที่ 2** หาค่าสัมบูรณ์ของอินทิกรัลจำกัดเขตในแต่ละช่วงของ x ที่ต่อเนื่องกัน
- ขั้นตอนที่ 3** พื้นที่ที่ต้องการเท่ากับผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของอินทิกรัลจำกัดเขตทั้งหมดที่ทำได้

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น

1. กำหนดให้

A แทนพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 1 - x^2$ และแกน x

B แทนพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ใต้เส้นโค้ง $y = \frac{x^2}{4}$ เหนือแกน x จาก $x = -c$ ถึง $x = c$

ค่าของ c ที่ทำให้ $A = B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

- 1) $\sqrt{2}$ 2) 2 3) $2\sqrt{2}$ 4) 4

2. กำหนดให้ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนเซตในข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

- 1) $(-3, -2) \cup (2, 3)$ 2) $(-3, -2) \cup (1, 2)$ 3) $(-1, 0) \cup (2, 3)$ 4) $(-1, 0) \cup (1, 2)$

3. ถ้า $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right)$ แล้วค่าของ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{f(4+h) - f(4)}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

- 1) 1 2) $\frac{16}{5}$ 3) $\frac{7}{5}$ 4) $\frac{1}{5}$

4. ถ้า $f'(x) = 3x^2 + x - 5$ และ $f(0) = 1$ แล้ว $\int_{-1}^1 f(x)dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) $\frac{5}{3}$ 2) $\frac{7}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{3}$
5. ถ้า f, g และ h สอดคล้องกับ $f(1) = g(1) = h(1) = 1$ และ $f'(1) = g'(1) = h'(1) = 2$ แล้วค่าของ $(fg + h)'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) 1 2) 2 3) 4 4) 6
6. เส้นตรงซึ่งตัดตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ที่จุด $x = 1$ คือ เส้นตรงในข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) $13x - 2y - 11 = 0$ 2) $13x + 2y - 15 = 0$
 3) $2x - 13y + 11 = 0$ 4) $2x + 13y - 15 = 0$
7. ถ้า $f'(x) = x^3 - 1$ และ $\int_0^1 f(x)dx = 0$ แล้ว $|f(1)|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
8. กำหนดให้ $f(x) = ax^2 + b\sqrt{x}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $b \neq 0$ ถ้า $2f'(1) = f(1)$ แล้ว $\frac{f(4)}{f'(9)}$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
9. กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าสูงสุดที่ $x = 1$ ถ้า $f''(x) = -4$ ทุก x และ $f(-1) + f(3) = 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
10. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = 3x^{2/3}$, $g(1) = 8$ และ $g'(1) = \frac{2}{3}$ ค่าของ $(fog)'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) 1 4) $\frac{4}{3}$
11. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2} & ; x < 2 \\ a - b & ; x = 2 \\ x^2 + ax + 1 & ; x > 2 \end{cases}$
- ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงแล้ว ค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
12. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f'(x) = 3\sqrt{x} + 4$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ $f(1) = 5$ แล้วค่าของ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x^2) - 2}{f(x)}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
13. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f''(x) = 6x + 4$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(2, 19)$ เท่ากับ 19 แล้ว ค่าของ $f(1)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)

14. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า f เป็นฟังก์ชันลด และ $f(f(f(x))) = 16x + 45$ แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)

1) -11 2) -5 3) 11 4) 5

15. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^3 - 1|}{x - 1} & , -1 < x < 1 \\ ax + b & , 1 \leq x < 5 \\ 5 & , x \geq 5 \end{cases}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-1, \infty)$ แล้วค่าของ ab เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)

1) $\frac{5}{4}$ 2) $-\frac{7}{4}$ 3) 15 4) -10

16. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(1, 2)$ มีค่าเท่ากับ 4 และ $\int_{-1}^2 f(x)dx = 12$ แล้ว $f(-1) + f''(-1)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)

17. กำหนดให้ $h(x) = f(x)g(x)$ โดยที่ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) เท่ากับ $2 - 2x$ และเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 5 ถ้า g เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งมีสมบัติ $g(2) = g'(2) = 5$ แล้ว $h'(2)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)

18. โรงงานผลิตตุ๊กตาแห่งหนึ่ง มีต้นทุนในการผลิตตุ๊กตา x ตัว โรงงานจะต้องเสียค่าใช้จ่าย $x^3 - 450x^2 + 60,200x + 10,000$ บาท ถ้าขายตุ๊กตาราคาตัวละ 200 บาท โรงงานจะต้องผลิตตุ๊กตาก็ตัวจึงจะได้กำไรมากที่สุด (PAT 1 ก.ค. 53)

19. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่ $x = 1$ และ

ให้ g เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1} & ; x > 1 \\ \frac{f(x)}{|x|+7} & ; x \leq 1 \end{cases}$

ถ้าฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องที่ $x = 1$ แล้วค่าของ $(g \circ f)(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 53)

1) $2 - \sqrt{3}$ 2) 2 3) $2 - \sqrt{7}$ 4) $\sqrt{7} - 2$

20. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่ $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b$

ถ้ามีฟังก์ชันพหุนาม $Q(x)$ โดยที่ $f(x) = (Q(x))^2$ แล้วค่าของ $\int_0^1 f(x)dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(PAT 1 ต.ค. 53)

1) $\frac{71}{30}$ 2) $\frac{31}{30}$ 3) $\frac{11}{30}$ 4) $\frac{1}{30}$

21. ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f(2x + 1) = 4x^2 + 14x$ ค่าของ $f(f'(f''(2553)))$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)

22. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^3 + x^2} + x}{x^2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) -1 4) 1
23. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มี $f''(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $f(0) = 2$ และกราฟของ f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(1, -5)$ แล้ว $2a + 3b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) -12 2) 20 3) 42 4) 48
24. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $g(x) = \frac{1}{2x+3}$ เมื่อ $x \neq -\frac{3}{2}$ ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่ $(f \circ g)(x) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว $f''\left(\frac{1}{2}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) -8 4) 8
25. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุก $x \in R$ โดยที่ $g(x) = x^2 - 2x + 5$, $(g \circ f)(x) = x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 5$ และ $f(0) = 0$ ค่าของ $(f' \circ g')(1) + (g' \circ f')(0)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)
26. กำหนดให้เส้นโค้ง $y = f(x)$ สัมผัสกับเส้นตรง $2x - y + 3 = 0$ ที่จุด $(0, 3)$ และ $\int_0^2 f''(x) dx = -3$ ถ้า $g(x) = \sqrt{x+2} f(x)$ และ $g'(2) = 0$ แล้ว $f(2)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)
27. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{2x+10} - \sqrt{x+13}} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ a & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$
- โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 3$ แล้ว a เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

ความน่าจะเป็น

กฎการคูณ

จำนวนวิธีทำงานทั้งหมด = ผลคูณของทางเลือกที่เกิดขึ้นได้ในแต่ละขั้นตอน

กฎการบวก

จำนวนวิธีทำงานทั้งหมด = ผลบวกของแต่ละกรณีที่เกิดขึ้นได้

แฟกทอเรียล

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$$

การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

รูปแบบ	จำนวนวิธี
ของ n ชิ้นนำมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น	$n!$
ของ n ชิ้นนำมา r ชิ้นเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น	$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
ของ n ชิ้นนำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม(พลิกไม่ได้)	$(n-1)!$
ของ n ชิ้นนำมาเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม(พลิกได้)	$\frac{(n-1)!}{2}$
ของ n ชิ้น อย่างหนึ่งซ้ำกัน p ชิ้น อีกอย่างซ้ำกัน q ชิ้น นำมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น	$\frac{n!}{p!q!}$
ของ m + n + p ชิ้นแบ่งออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ m, n, p ชิ้น	$\frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$
ของ kn ชิ้นแบ่งออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ n ชิ้นทั้งหมด k กลุ่ม	$\frac{(kn)!}{(n!)^k k!}$
ของ n ชิ้นเลือกมา r ชิ้น	$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
เลือกของจาก n ชิ้น	2^n
เลือกของอย่างน้อยหนึ่งชิ้นจาก n ชิ้น	$2^n - 1$
เลือกของอย่างน้อยหนึ่งชิ้นจากของ n ชิ้น แบบที่หนึ่งซ้ำกัน p ชิ้น แบบที่สองซ้ำกัน q ชิ้น โดยที่ n = p + q	$(p+1)(q+1) - 1$

ความน่าจะเป็น

S คือ เซตของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด

E คือ เซตของเหตุการณ์ที่ต้องการ

n(S) คือ จำนวนของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด

n(E) คือ จำนวนของเหตุการณ์ที่ต้องการ

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องการ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

สมบัติของความน่าจะเป็น

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(E) = 1 - P(E')$
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

ทฤษฎีบททวินาม

สูตรการกระจาย

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}x^0y^n$$

สมบัติของทฤษฎีบททวินาม

1. พจน์ที่ $r + 1$ ของการกระจายหาได้จาก $T_{r+1} = \binom{n}{r}x^{n-r}y^r$
2. $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ เรียกว่า “สัมประสิทธิ์ทวินาม” มีผลบวกทั้งหมดเท่ากับ 2^n

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องความน่าจะเป็น

1. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ เซต $S = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง}\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
1) 12 2) 24 3) 36 4) 39
2. คุณลุง คุณป้า ลูกชาย และลูกสาว มาเยี่ยมครอบครัวเรา ซึ่งมี 4 คนคือ คุณพ่อ คุณแม่ ตัวฉัน และน้องชาย ในการจัดที่นั่งรอบโต๊ะอาหารกลมที่มี 8 ที่นั่ง โดยให้คุณลุงนั่งติดกับคุณพ่อ คุณป้านั่งติดกับคุณแม่ ลูกชายของคุณลุงนั่งติดกับน้องชายของฉัน และลูกสาวของคุณลุงนั่งติดกับฉัน จะมีจำนวนวิธีจัดได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
1) 96 วิธี 2) 192 วิธี 3) 288 วิธี 4) 384 วิธี
3. ข้าวสารบรรจุถุงแล้วกองหนึ่งประกอบด้วย ข้าวหอมมะลิ 4 ถุง ข้าวเสาไห้ 3 ถุง ข้าวขาวตาแห้ง 2 ถุง และข้าวบัสมาตี 1 ถุง สุ่มหยิบข้าวจากกองนี้มา 4 ถุง ความน่าจะเป็นที่จะได้ข้าวครบทุกชนิด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
1) $\frac{4}{35}$ 2) $\frac{3}{35}$ 3) $\frac{2}{5}$ 4) $\frac{1}{4}$
4. กิตติและสมาน กับเพื่อนๆ รวม 7 คน ไปเที่ยวต่างจังหวัดด้วยกัน ในการค้างแรมที่มีบ้านพัก 3 หลัง หลังแรกพักได้ 3 คน ส่วนหลังที่สองและหลังที่สามพักได้หลังละ 2 คน ซึ่งแต่ละหลังมีความแตกต่างกัน พวกเขาจึงตกลงที่จะจับสลากว่าใครจะได้พักที่บ้านหลังใด ความน่าจะเป็นที่กิตติและสมานจะได้พักบ้านหลังเดียวกันในหลังที่หนึ่งหรือหลังที่สาม เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
1) $\frac{4}{21}$ 2) $\frac{5}{21}$ 3) $\frac{8}{21}$ 4) $\frac{10}{21}$

5. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ ในการสุ่มหยิบเลข n จำนวนพร้อมๆ กันจากเซต $\{1, 2, \dots, 2n\}$ ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคู่ทั้งหมดเท่ากับ $\frac{1}{20}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคู่เพียง 1 จำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
- 1) $\frac{1}{20}$ 2) $\frac{3}{20}$ 3) $\frac{9}{20}$ 4) $\frac{11}{20}$
6. ต้องการสร้างจำนวนคู่บวก 4 หลัก จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 7, 8 โดยแต่ละจำนวนที่สร้างขึ้นไม่มีเลขโดดในหลักใดที่ซ้ำกันเลย จะมีจำนวนวิธีที่สร้างได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) 180 2) 156 3) 144 4) 136
7. จำนวนเต็มที่มีค่าตั้งแต่ 100 ถึง 999 ที่หารด้วย 2 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) 250 2) 283 3) 300 4) 303
8. ลูกโป่งหนึ่งบรรจุลูกกวาดรสสตรอเบอรี่ 5 ลูก รสช็อคโกแลต 4 ลูก รสกาแฟ และรสมินท์อย่างละ 2 ลูก หากสุ่มหรือหยิบลูกกวาดจากลูกโป่งนี้มา 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกกวาดต่างรสกันทั้งหมด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) $\frac{57}{143}$ 2) $\frac{58}{143}$ 3) $\frac{59}{143}$ 4) $\frac{60}{143}$
9. กำหนดให้ $A = \{(0, n) \mid n = 1, 2, \dots, 10\}$ และ $B = \{(1, n) \mid n = 1, 2, \dots, 10\}$ ในการเลือกจุดสองจุดที่แตกต่างกันจากเซต A และอีกหนึ่งจุดจากเซต B เพื่อเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมบนระนาบ ความน่าจะเป็นจะได้รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) $\frac{8}{45}$ 2) $\frac{9}{45}$ 3) $\frac{10}{45}$ 4) $\frac{11}{45}$
10. ในลิ้นชักมีถุงเท้าสีขาว 4 คู่ สีดำ 3 คู่ และสีน้ำเงิน 2 คู่ แต่ไม่ได้จัดเรียงไว้เป็นคู่ๆ ถ้าสุ่มหยิบถุงเท้ามา 2 ข้าง ความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าสีเดียวกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{43}{153}$ 4) $\frac{49}{153}$
11. ลูกโป่งหนึ่งบรรจุลูกแก้วสีแดง 5 ลูก สีเขียว 4 ลูก และสีเหลือง 3 ลูก ถ้าหยิบลูกแก้วจากถุงทีละลูก 3 ครั้ง โดยไม่ใส่คืน แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้ว ลูกที่หนึ่ง สอง และสาม เป็นสีแดง สีเขียว และสีเหลือง ตามลำดับเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 52)
- 1) $\frac{1}{21}$ 2) $\frac{1}{22}$ 3) $\frac{3}{22}$ 4) $\frac{3}{25}$
12. กล้องโบนึ่งบรรจุหลอดไฟ 12 หลอด เป็นหลอดขั้วรูต 3 หลอด ถ้าหยิบหลอดไฟ จากกล่องมา 4 หลอด แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ หลอดขั้วรูตไม่เกิน 1 หลอด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 52)
- 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{14}{99}$ 4) $\frac{14}{55}$

13. ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก หนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มรวมเป็น 7 โดยที่มีลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้มไม่น้อยกว่า 4 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 52)
- 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{12}$
14. มีสิ่งของซึ่งแตกต่างกันอยู่ 8 ชิ้น ต้องแบ่งให้คน 2 คน คนหนึ่งได้ 6 ชิ้น และอีกคนหนึ่งได้ 2 ชิ้น จะมีจำนวนวิธีแบ่งกี่วิธี (PAT 1 ต.ค. 52)
15. ในการแข่งขันฟุตบอลฤดูกาลหนึ่ง มีทีมเข้าร่วมการแข่งขัน 7 ทีม จัดแข่งแบบพบกันหมด (แต่ละทีมต้องลงแข่งกับทีมอื่นทุกทีม) จะต้องจัดการแข่งขันกี่นัด (PAT 1 ต.ค. 52)
16. กล่องใบหนึ่งบรรจุเสื้อยืด 13 สีๆ ละ 4 ตัว โดยที่ เสื้อยืดในแต่ละสีมีขนาด S, M, L และ XL ตามลำดับ สุ่มหยิบเสื้อจากกล่องมา 3 ตัวพร้อมๆ กัน ความน่าจะเป็นที่จะได้เสื้อยืดที่มีสีเหมือนกัน 2 ตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) $\frac{72}{425}$ 2) $\frac{72}{5525}$ 3) $\frac{3}{221}$ 4) $\frac{3}{22100}$
17. กำหนดให้ S เป็นแซมเปิลสเปซ และ A, B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ใน S จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$
- ข. ถ้า $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ และ $P(A \cup B') = 0.7$ แล้ว $P(A - B) = 0.4$
- ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด
18. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ จำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่า 300 โดยสร้างมาจากตัวเลขในเซต และตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
19. คณะกรรมการชุดหนึ่งมี 7 คน ประกอบด้วย ประธาน รองประธาน เลขานุการ และกรรมการอีก 4 คน จำนวนวิธีที่จัดกลุ่มคน 7 คนที่นั่งประชุมรอบโต๊ะกลม โดยให้ประธานและรองประธานนั่งติดกันเสมอ แต่เลขานุการไม่นั่งติดกับรองประธานเท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
20. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมๆ กัน ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของหน้าลูกเต๋าทิ้งสองเท่ากับ 7 หรือผลคูณของหน้าลูกเต๋าทิ้งสองเท่ากับ 12 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) $\frac{1}{18}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{2}{9}$ 4) $\frac{4}{9}$
21. ข้อสอบปรนัย 20 ข้อ คะแนนเต็ม 50 คะแนน โดยกำหนดข้อ 1-10 ข้อละ 4 คะแนน ข้อ 11-20 ข้อละ 1 คะแนน ถ้าหากนักเรียนตอบข้อใดถูกต้อง จะได้คะแนนเต็มของข้อนั้น แต่ถ้าตอบผิดหรือไม่ตอบ จะได้คะแนน 0 คะแนน จะมีกี่วิธีที่นักเรียนคนหนึ่ง จะทำข้อสอบชุดนี้ได้คะแนนรวม 45 คะแนน (PAT 1 ก.ค. 53)
22. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ จงหาจำนวนสับเซตของ A ทั้งหมดที่ประกอบด้วยสมาชิก 8 ตัวที่แตกต่างกันโดยที่ ผลรวมของสมาชิกทั้ง 8 ตัว เป็นพหุคูณของ 5 (PAT 1 ก.ค. 53)

23. ในการสอบถามนักเรียน จำนวน 100 คน ปรากฏว่า มี 50 คน ชอบวิชาคณิตศาสตร์ มี 40 คน ชอบวิชาฟิสิกส์ มี 33 คน ชอบวิชาภาษาอังกฤษ มี 5 คน ชอบทั้งสามวิชา มี 10 คน ชอบวิชาภาษาอังกฤษอย่างเดียว มี 12 คน ชอบวิชาฟิสิกส์อย่างเดียว และมี 20 คน ชอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาฟิสิกส์พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งไม่ชอบทั้งสามวิชา เท่ากับ 0.15
ข. ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งชอบวิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว เท่ากับ 0.40
- ข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ (PAT 1 ต.ค. 53)
- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด
24. กำหนดให้ a, b, c, d, e, f เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a < b < c < d < e < f$ ถ้าผลบวกของสองจำนวนที่แตกต่างกันในเซต $\{a, b, c, d, e, f\}$ มีทั้งหมด 15 จำนวน คือ 37, 50, 67, 72, 80, 89, 95, 97, 102, 110, 112, 125, 132, 147 และ 155 แล้วค่าของ $c + d$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
25. มีเลขโดด 3, 4, 6 และ 7 นำมาจัดเรียงสร้างจำนวน 4 หลัก โดยที่แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน จะมีจำนวน 4 หลักทั้งหมดกี่จำนวนที่หารด้วย 44 ไม่ลงตัว (PAT 1 ต.ค. 53)
26. โยนเหรียญบาท (เที่ยงตรง) หนึ่งเหรียญ จำนวน 10 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ได้หัวอย่างน้อย 2 ครั้งติดกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) $\frac{193}{512}$ 2) $\frac{314}{512}$ 3) $\frac{9}{64}$ 4) $\frac{55}{64}$
27. มีถุงยังชีพ 5 ถุง ต้องการแจกให้ครอบครัวที่ถูกน้ำท่วม 4 ครอบครัว ครอบครัวละไม่เกิน 2 ถุง ความน่าจะเป็นที่ครอบครัวของนายสมชายซึ่งเป็นหนึ่งในสี่ครอบครัวนั้นไม่ได้รับของแจกเลยเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)
- 1) 0.15 2) 0.2 3) 0.4 4) 0.6
28. จงหาจำนวนลำดับเซต $\{a_1, a_2, a_3\}$ ของเซต $\{1, 2, 3, \dots, 14\}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ $a_2 - a_1 \geq 3$ และ $a_3 - a_2 \geq 3$ (PAT 1 มี.ค. 54)
29. ถ้า S เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่สร้างมาจากเลขโดด 1, 2, 3 หรือ 4 โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน แล้วเศษเหลือจากการหาร S ด้วย 9 เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

สถิติ

ตารางแจกแจงความถี่

ความถี่ (f)	คือ จำนวนข้อมูลที่อยู่ในอันตรภาคชั้นนั้น
ความถี่สะสม ($\sum f$)	คือ ผลรวมของความถี่ในอันตรภาคชั้นนั้นกับความถี่ของอันตรภาคชั้นที่ต่ำกว่า
ขอบล่าง (L)	(ผลบวกระหว่างคะแนนต่ำสุดของชั้นนั้นกับคะแนนสูงสุดของชั้นที่ต่ำกว่า) $\div 2$
ขอบบน	(ผลบวกระหว่างคะแนนสูงสุดของชั้นนั้นกับคะแนนต่ำสุดของชั้นที่สูงกว่า) $\div 2$
จุดกึ่งกลางชั้น	(ผลบวกระหว่างขอบบนกับขอบล่าง) $\div 2$
ความกว้างของชั้น (I)	ขอบบน - ขอบล่าง
ความถี่สัมพัทธ์	เท่ากับ $\frac{f}{N}$

ค่ากลางของข้อมูล

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\bar{x}$

ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ $\bar{x} = \frac{\sum x}{N}$

ข้อมูลที่ได้แจกแจงความถี่ $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N}$

สมบัติของค่าเฉลี่ย

- ถ้า $y_i = ax_i + b$ แล้ว $\bar{y} = a\bar{x} + b$
- $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์เสมอ
- $\sum_{i=1}^N (x_i - k)^2$ จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $k = \bar{x}$

ค่าเฉลี่ยรวม

$$\bar{x}_{\text{รวม}} = \frac{\sum_{i=1}^k N_i \bar{x}_i}{N}$$

ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^k w_i x_i}{\sum_{i=1}^k w_i}$$

มัธยฐาน(Me)

ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ เรียงข้อมูลจากน้อยไปมากและดูค่าของข้อมูลตำแหน่งที่ $\frac{N+1}{2}$

$$\text{ข้อมูลที่แจกแจงความถี่ } Me = L_{Me} + \left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_{Me}} \right) I$$

สมบัติของมัธยฐาน

$$\sum_{i=1}^N |x_i - k| \text{ มีค่าต่ำสุดเมื่อ } k = Me$$

ฐานนิยม(Mo)

ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ ดูค่าของข้อมูลที่มีจำนวนความถี่มากที่สุด
(ฐานนิยมมีค่าได้ไม่เกิน 3 ค่า)

$$\text{ข้อมูลที่แจกแจงความถี่ } Mo = L_{Mo} + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) I$$

เมื่อ d_1 คือ ผลต่างของความถี่ชั้นที่ฐานนิยมอยู่กับความถี่ของชั้นที่ต่ำกว่า
และ d_2 คือ ผลต่างของความถี่ชั้นที่ฐานนิยมอยู่กับความถี่ของชั้นที่สูงกว่า

ตำแหน่งของข้อมูล ควอร์ไทล์ (Q_r), เดไซล์ (D_r) และเปอร์เซ็นต์ไทล์ (P_r)

ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

- เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก
- หาดำแหน่งจากสูตร

1. ตำแหน่ง $Q_r = \frac{r(N+1)}{4}$

2. ตำแหน่ง $D_r = \frac{r(N+1)}{10}$

3. ตำแหน่ง $P_r = \frac{r(N+1)}{100}$

- ดูค่าข้อมูลจากตำแหน่งที่ได้ถ้าตำแหน่งของข้อมูลไม่ใช่จำนวนเต็มให้เทียบบัญญัติไตรยางค์หาค่า

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่

- หาค่าตำแหน่งจากสูตร

1. ตำแหน่ง $Q_r = \frac{rN}{4}$

2. ตำแหน่ง $D_r = \frac{rN}{10}$

3. ตำแหน่ง $P_r = \frac{rN}{100}$

- แทนค่าตำแหน่งในสูตร

$$1. Q_r = L_{Q_r} + \left(\frac{\frac{rN}{4} - \sum f_L}{f_{Q_r}} \right) I$$

$$2. D_r = L_{D_r} + \left(\frac{\frac{rN}{10} - \sum f_L}{f_{D_r}} \right) I$$

$$3. P_r = L_{P_r} + \left(\frac{\frac{rN}{100} - \sum f_L}{f_{P_r}} \right) I$$

การวัดการกระจายของข้อมูล

พิสัย

ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ ค่าสูงสุด - ค่าต่ำสุด

ข้อมูลที่ได้แจกแจงความถี่ ขอบบนของชั้นสูงสุด - ขอบล่างของชั้นต่ำสุด

ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ (Q.D.)

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย(M.D.)

ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

$$M.D. = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$$

ข้อมูลที่ได้แจกแจงความถี่

$$M.D. = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N}$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน(S.D.)

ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่

$$S.D. = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

$$S.D. = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

ข้อมูลที่ได้แจกแจงความถี่

$$S.D. = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

สมบัติของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

1. มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ

2. ถ้ามีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงว่าข้อมูลทุกจำนวนมีค่าเท่ากันหมด

3. จาก $y_i = ax_i + b$ มี s_y เป็นค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุด x แล้ว $s_y = |a| \cdot s_x$

ความแปรปรวน เท่ากับ $S.D.^2$

ความแปรปรวนรวม เท่ากับ $\frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2}{N_1 + N_2}$ เมื่อ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$

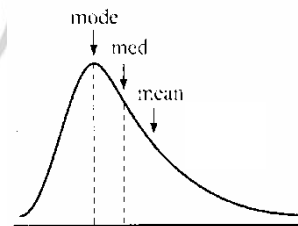
เท่ากับ $\frac{\sum x_1^2 + \sum x_2^2}{N_1 + N_2} - (\bar{x}_{รวม})^2$ เมื่อ $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

การวัดการกระจาย

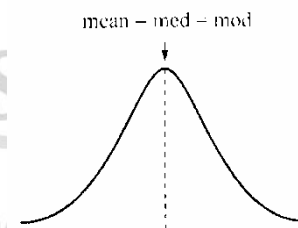
สัมประสิทธิ์พิสัย	เท่ากับ	$\frac{x_{max} - x_{min}}{x_{max} + x_{min}}$
สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์	เท่ากับ	$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย	เท่ากับ	$\frac{M.D.}{\bar{x}}$
สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน	เท่ากับ	$\frac{S.D.}{\bar{x}}$

เส้นโค้งกับการกระจายข้อมูล

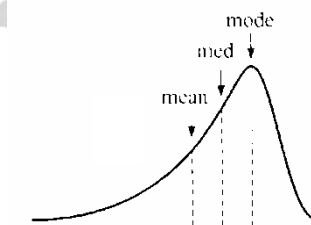
เส้นโค้งเบ้ขวา : $Mo < Me < \bar{x}$



เส้นโค้งปกติ : $Mo = Me = \bar{x}$



เส้นโค้งเบ้ซ้าย : $Mo > Me > \bar{x}$



ค่ามาตรฐาน (z) $z = \frac{x_i - \bar{x}}{S.D.}$

สมบัติของพื้นที่ใต้โค้งปกติ

1. เป็นรูปสมมาตร
2. พื้นที่ใต้โค้งมีค่าเท่ากับ 1.00 หรือ 100%
3. ข้อมูลทางด้านซ้ายของแกนสมมาตร ($z = 0$) จะเป็นลบ ด้านขวาจะเป็นบวก

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องสถิติ

1. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 99 จำนวน เรียงลำดับจากน้อยไปมากได้เป็น $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับมัธยฐาน แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (PAT 1 มี.ค. 52)

$$\begin{array}{ll} 1) \sum_{i=1}^{49} x_i = \sum_{i=51}^{99} x_i & 2) \sum_{i=1}^{49} (x_{50} - x_i) = \sum_{i=51}^{99} (x_{50} - x_i) \\ 3) \sum_{i=1}^{49} |x_{50} - x_i| = \sum_{i=51}^{99} |x_{50} - x_i| & 4) \sum_{i=1}^{49} (x_{50} - x_i)^2 = \sum_{i=51}^{99} (x_{50} - x_i)^2 \end{array}$$

2. โรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่ง มีนักเรียน 80 คน โดยการแจกแจงของอายุนักเรียนเป็นดังตาราง

อายุ (ปี)	3.5	4	4.5	5	5.5	6
จำนวนนักเรียน (คน)	a	15	10	20	b	5

ถ้าค่าเฉลี่ยของอายุนักเรียนมีค่า 4.5 ปี แล้วส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของอายุนักเรียนมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (PAT 1 มี.ค. 52)

$$1) \frac{5}{16} \quad 2) \frac{7}{16} \quad 3) \frac{9}{16} \quad 4) \frac{11}{16}$$

3. ถ้าตารางแจกแจงความถี่แสดงน้ำหนักของเด็กจำนวน 40 คน เป็นดังนี้

น้ำหนัก (กิโลกรัม)	จำนวน
9-11	15
12-14	5
15-17	5
18-20	10
21-23	5

ถ้า $\bar{x}$ แทนค่าเฉลี่ยของน้ำหนักเด็กกลุ่มนี้ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง (PAT 1 มี.ค. 52)

- 1) $\bar{x} = 17.444$ และมีฐานน้อยกว่าฐานนิยม
- 2) $\bar{x} = 14.875$ และมีฐานน้อยกว่าฐานนิยม
- 3) $\bar{x} = 17.444$ และมีฐานมากกว่าฐานนิยม
- 4) $\bar{x} = 14.875$ และมีฐานมากกว่าฐานนิยม

8. จากการแจกแจงข้อมูลเงินเดือนของพนักงานบริษัทแห่งหนึ่งพบว่า

เดโชล์ที่	1	3	5	7	9
เงินเดือน (บาท)	10,000	15,000	20,000	25,000	40,000

ถ้านายเอกและนายศมีเงินเดือนรวมกันเท่ากับ 40,000 บาท และมีพนักงานจำนวนที่ได้เงินเดือนมากกว่า นายยอยู่ประมาณ 30% ของพนักงานทั้งหมด แล้วเปอร์เซ็นต์ของจำนวนพนักงานที่ได้เงินเดือนน้อยกว่า นายเอกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

- 1) 10% 2) 30% 3) 50% 4) 70%

9. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ ถ้าหยาบข้อมูล x และ y จากข้อมูลชุดนี้มาพิจารณา พบว่า 13.14% ของข้อมูลมีค่ามากกว่า x และ x มากกว่า y อยู่ 2% ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน แล้วจำนวนข้อมูล (คิดเป็นเปอร์เซ็นต์) ที่มีค่าน้อยกว่า y เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง z เป็นดังนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

z	1.00	1.10	1.12	1.14	1.16
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.3413	0.3643	0.3686	0.3729	0.3770

- 1) 36.43% 2) 37.29% 3) 86.43% 4) 87.29%

10. คะแนนสอบวิชาความถนัดของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้าผลรวมของค่ามาตรฐานของคะแนน ของนายแดงและนายดำเท่ากับ 0 และ ผลรวมของคะแนนนายแดงและนายดำเป็น 4 เท่าของส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน แล้วสัมประสิทธิ์ของความแปรผันของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)

- 1) 0.5 2) 1 3) 1.5 4) 2

11. กำหนดให้ความสูงของคนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ ถ้าจะมีคนสูงกว่า 145 เซนติเมตร และ 165 เซนติเมตรอยู่ 84.13% และ 15.87% ตามลำดับ แล้วสัมประสิทธิ์ของความแปรผันของความสูงของคนกลุ่ม นี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 52)

z	1.00	1.12	1.14	1.16
พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานจาก 0 ถึง z	0.3413	0.3686	0.3729	0.3770

- 1) $\frac{1}{31}$ 2) $\frac{2}{31}$ 3) $\frac{3}{31}$ 4) $\frac{4}{31}$

12. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ หยาบข้อมูล x_1, x_2, x_3 มาคำนวณค่ามาตรฐานปรากฏว่าได้ค่า เป็น z_1, z_2, z_3 ตามลำดับ ถ้า $z_1 + z_2 = z_3$ แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 52)

- 1) $x_1 + x_2 - x_3$ 2) $x_1 - x_2 - x_3$ 3) $x_3 - x_2 - x_1$ 4) $x_1 + x_2 + x_3$

13. ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงจากน้อยไปมากเป็นดังนี้ 1, 4, x, y, 9, 10 ถ้ามัธยฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย ของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ $\frac{8}{3}$ แล้ว $y - x$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
14. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวนและมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 12 ถ้าควอไทล์ที่ 1 และ 3 ของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ 5 และ 20 ตามลำดับ แล้วเดซิล์ที่ 5 ของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
15. กำหนดตารางแจกแจงความถี่แสดงอายุของคนในหมู่บ้านแห่งหนึ่ง เป็นดังนี้

อายุ (ปี)	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
จำนวน (คน)	5	10	A	20	10	10

- ถ้าอายุเฉลี่ยของคนในหมู่บ้านนี้เท่ากับ 33.33 ปี แล้ว จำนวนคนในหมู่บ้านนี้เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
16. นักเรียนห้องหนึ่งสอบวิชาคณิตศาสตร์ได้คะแนนเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 40 คะแนน ถ้านักเรียนชายสอบได้คะแนนเฉลี่ยเลขคณิต 35 คะแนน และนักเรียนหญิงสอบได้คะแนนเฉลี่ยเลขคณิต 50 คะแนน อัตราส่วนของนักเรียนชายต่อนักเรียนหญิงตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 53)
- 1) 3 : 2 2) 2 : 3 3) 2 : 1 4) 1 : 2
17. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเท่ากับ 72 คะแนน ความแปรปรวน (ประชากร) เท่ากับ 600 ถ้ามีนักเรียนมาเพิ่มอีก 1 คน ซึ่งสอบได้ 60 คะแนน ทำให้ค่าเฉลี่ยเปลี่ยนไปเป็น 70 คะแนน ความแปรปรวนของข้อมูลชุดใหม่เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
18. จากการสำรวจน้ำหนักของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 4 คน มี 2 คน น้ำหนักเท่ากันและหนักน้อยกว่าอีก 2 คนที่เหลือ ถ้าฐานนิยม มัธยฐาน และพิสัยของน้ำหนักของนักเรียน 4 คนนี้คือ 45, 46 และ 6 กิโลกรัม ตามลำดับ แล้วความแปรปรวนของน้ำหนักของนักเรียน 4 คนนี้เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
19. ในการสอบคัดเลือกเข้าศึกษาต่อของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ถ้าสอบได้คะแนน 700 คะแนน แปลงคะแนนเป็นค่ามาตรฐานได้ 4 แต่ถ้าสอบได้ 400 คะแนน แปลงเป็นค่ามาตรฐานได้ -2 แล้วสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากับร้อยละเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 53)
20. ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 30 คน มีคะแนนเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 60 คะแนน และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 ถ้าผลรวมของค่ามาตรฐานของคะแนนของนักเรียนกลุ่มนี้เพียง 29 คน เท่ากับ 2.5 แล้วนักเรียนอีก 1 คนที่เหลือ สอบได้คะแนนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) 35 2) 58 3) 60 4) 85
21. มีนักเรียน 5 คน ร่วมกันบริจาคเงิน ได้เงินรวม 360 บาท ความแปรปรวน (ประชากร) เท่ากับ 660 ถ้ามีนักเรียนเพิ่มอีก 1 คน มาร่วมบริจาคเป็นเงิน 60 บาท ความแปรปรวน จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 53)
- 1) เพิ่มขึ้น 80 2) เพิ่มขึ้น 90 3) ลดลง 80 4) ลดลง 90

22. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง ถ้านักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้สอบได้ 55 คะแนน คิดเป็นคะแนนมาตรฐานได้เท่ากับ 0.5 และสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (Coefficient of Variation) ของคะแนนนักเรียนห้องนี้ เท่ากับ 20% คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนห้องนี้เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ก.ค. 53)
23. สร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง โดยให้ความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้วปรากฏว่ามีฐานของคะแนนการสอบเท่ากับ 57 คะแนนซึ่งอยู่ในช่วง 50–59 ถ้ามักเรียนที่สอบได้คะแนนต่ำกว่า 49.5 คะแนน อยู่จำนวน 12 คน และมีนักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 59.5 คะแนน อยู่จำนวน 20 คน จงหาว่านักเรียนกลุ่มนี้มีทั้งหมดกี่คน (PAT 1 ก.ค. 53)
24. นักเรียนกลุ่มหนึ่ง จำนวน 50 คน มีส่วนสูงแสดงดังตารางต่อไปนี้

ส่วนสูง (เซนติเมตร)	จำนวนนักเรียน (คน)
156–160	6
161–165	15
166–170	21
171–175	8

ให้ a เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของส่วนสูง และ b เป็นส่วนสูง โดยที่มีจำนวนนักเรียน 75% ของนักเรียนทั้งหมด ที่มีส่วนสูงน้อยกว่า b ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 53)

- 1) $a = 166.1$ และ $b = 168.73$ 2) $a = 166.1$ และ $b = 169.43$
 3) $a = 166.7$ และ $b = 168.73$ 4) $a = 166.7$ และ $b = 169.43$

25. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. ในการสอบของนักเรียน 3 คน พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบ เท่ากับ 80 คะแนน ค่ามัธยฐานเท่ากับ 75 คะแนน และพิสัย เท่ากับ 25 คะแนน คะแนนสอบของนักเรียนที่ได้คะแนนต่ำสุด เท่ากับ 70 คะแนน
- ข. ข้อมูลชุดที่หนึ่งมี 5 จำนวน คือ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 และข้อมูลชุดที่สองมี 4 จำนวน คือ x_1, x_2, x_3, x_4 โดยที่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน ถ้า a และ b เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่หนึ่งและชุดที่สองตามลำดับ แล้ว $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 53)

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

26. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 2 ห้อง ซึ่งทำคะแนนเฉลี่ยได้ 60 คะแนน โดยห้องแรกมีนักเรียนจำนวน 40 คน และห้องที่สองมีนักเรียนจำนวน 30 คน ถ้าคะแนนสอบในห้องแรก เปอร์เซ็นไทล์ที่ 50 มีค่า 64 คะแนน และฐานนิยมมีค่าเป็น 66 คะแนน แล้วคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนห้องที่สองมีค่าเท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)
27. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 6 จำนวน คือ 2, 3, 6, 11, a, b ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับ 8 และค่ามัธยฐาน เท่ากับ 7 แล้ว $|a - b|$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 53)

28. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์คะแนนเต็ม 60 คะแนน มีนักเรียนเข้าสอบ 30 คน นาย ก. เป็นนักเรียนคนหนึ่ง ที่เข้าสอบในครั้งนี้ นาย ก. สอบได้ 53 คะแนน และมีจำนวนนักเรียนที่มีคะแนนสอบน้อยกว่า 53 คะแนนอยู่ 27 คน ถ้ามีการจัดกลุ่มคะแนนสอบเป็นช่วงคะแนนโดยมีอันตรภาคชั้นกว้างเท่าๆ กัน คะแนนสอบของนาย ก. อยู่ในช่วงคะแนน 51–60 จำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนนในช่วงคะแนน 51–60 มีทั้งหมดกี่คน (PAT 1 มี.ค. 54)

1) 3 2) 4 3) 5 4) 9

29. กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน ที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง z

z	1.14	1.24	1.34	1.44
พื้นที่	0.373	0.392	0.410	0.425

ความสูงของนักเรียน 2 กลุ่ม มีการแจกแจงปกติ ดังนี้

กลุ่ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
นักเรียนหญิง	158 เซนติเมตร	4 เซนติเมตร
นักเรียนชาย	169.06 เซนติเมตร	5 เซนติเมตร

ถ้านักเรียนหญิงคนหนึ่งมีความสูงตรงกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 91 ของกลุ่มนักเรียนหญิงนี้ แล้วจำนวนนักเรียนชายที่มีความสูงน้อยกว่าความสูงของนักเรียนหญิงคนนี้ คิดเป็นร้อยละเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 54)

1) 12.7 2) 11.4 3) 10.7 4) 9.4

30. บริษัทผลิตหลอดไฟต้องการรับประกันคุณภาพผลิตภัณฑ์ของบริษัท โดยจะเปลี่ยนเป็นหลอดใหม่ถ้าหลอดเดิมชำรุด บริษัทจะรับประกันไม่เกิน 4.1% ของจำนวนที่ผลิต หลอดไฟมีอายุใช้งานเฉลี่ย 2500 ชั่วโมง มีสัมประสิทธิ์ของความแปรผันเท่ากับ 0.20 ถ้าคาดว่าตามปกติคนจะใช้หลอดไฟวันละ 5 ชั่วโมง บริษัทนี้ควรกำหนดเวลาประกันมากที่สุดกี่วัน

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน ที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง z

z	1.34	1.44	1.54	1.74	1.84
พื้นที่	0.410	0.425	0.438	0.459	0.467

(PAT 1 มี.ค. 54)

1) 362 วัน 2) 352 วัน 3) 346 วัน 4) 326 วัน

ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

ให้ x เป็นตัวแปรต้น(ค่าที่โจทย์กำหนด) และ y เป็นตัวแปรตาม(ค่าที่ต้องการทำนาย)

1. สมการเส้นตรง

$$\begin{array}{llll} \text{จาก} & y & = & ax + b \\ \text{จะได้} & \sum y & = & a \sum x + bn \end{array} \quad \dots(1)$$

$$\text{และ} \quad \sum xy = a \sum x^2 + b \sum x \quad \dots(2)$$

2. สมการพาราโบลา

$$\begin{array}{llll} \text{จาก} & y & = & ax^2 + bx + c \\ \text{จะได้} & \sum y & = & a \sum x^2 + b \sum x + cn \end{array} \quad \dots(1)$$

$$\sum xy = a \sum x^3 + b \sum x^2 + c \sum x \quad \dots(2)$$

$$\text{และ} \quad \sum x^2y = a \sum x^4 + b \sum x^3 + c \sum x^2 \quad \dots(3)$$

อนุกรมเวลา

มีตัวแปรต้น (x) เป็นเวลา เช่น เดือน ปี โดยให้เราสมมติตัวเลขขึ้นมาแทนเวลาดังกล่าว

หลักการสมมติค่า x ให้ดูจากจำนวนค่าของ x ดังนี้

- จำนวนที่ สมมติ x เป็น ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- จำนวนคู่ สมมติ x เป็น ..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

1. ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (X) และวิชาฟิสิกส์ (Y) ของนักเรียน 100 คนของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ได้พจน์ต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่าคงตัวจากสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีรูปแบบการเป็น $Y = a + bX$ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{100} y_i = 1000, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 2000, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 4000$$

ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนายสมชายเท่ากับ 15 คะแนน แล้วคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ (โดยประมาณ) ของนายสมชายเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)

- 1) 16 คะแนน 2) 16.67 คะแนน 3) 17 คะแนน 4) 17.67 คะแนน.

2. ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 (X) และ ปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (Y) จากตัวอย่างอาหารจำนวน 100 ตัวอย่าง พบว่า ความแปรปรวนของปริมาณสารชนิดที่ 1 มีค่าเท่ากับ 1.75, ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของปริมาณสารชนิดที่ 2 มีค่าเท่ากับ 0.5, $\sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 100$ และ $\sum_{i=1}^{100} x_i^2$ ถ้าสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูป $Y = a + bX$ แล้ว เมื่อพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 อยู่ 4 หน่วย จะพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (โดยประมาณ) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
- 1) 0.5 หน่วย 2) 1 หน่วย 3) 1.5 หน่วย 4) 2 หน่วย

3. กำหนดให้ข้อมูล x และ y มีความสัมพันธ์กันดังตารางต่อไปนี้

X	1	2	3	3
Y	1	3	4	6

ถ้าสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูป $Y = a + bX$ แล้วเมื่อ $X = 10$ ค่าของ Y เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)

4. ข้อมูลความสูง (เซนติเมตร) และน้ำหนัก (กิโลกรัม) ของนักเรียนหญิง 4 คน ดังนี้

นักเรียนหญิง	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4
ความสูง (เซนติเมตร)	150	152	154	156
น้ำหนัก (กิโลกรัม)	45	45	48	50

ถ้าส่วนสูงและน้ำหนักของนักเรียนมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นเส้นตรง $y = a + 0.9x$ เมื่อ x เป็นส่วนสูง และ y เป็นน้ำหนัก และ นักเรียนที่มีส่วนสูง 155 เซนติเมตร จะมีน้ำหนักกี่กิโลกรัม (PAT 1 มี.ค. 54)

กำหนดการเชิงเส้น

ขั้นตอนการทำโจทย์

1. ให้สิ่งของในโจทย์เป็นตัวแปร x และตัวแปร y
2. สร้างสมการจุดประสงค์(สิ่งที่โจทย์ต้องการรู้)
3. สร้างอสมการข้อจำกัดจากเงื่อนไข(ส่วนใหญ่เป็นสมการเส้นตรง)ของโจทย์
4. วาดกราฟของอสมการเงื่อนไข การวาดกราฟเส้นตรงให้หาจุดตัดแกน X แกน Y แล้วลากเส้นตรงเชื่อม
5. เลือกพื้นที่แรเงาโดยการสุ่มเลือกจุดใดก็ได้แทนค่าในอสมการเงื่อนไข
ถ้าแทนแล้วอสมการเป็นจริงให้แรเงาฝั่งที่จุดนั้นอยู่
ถ้าแทนแล้วอสมการเป็นเท็จให้แรเงาอีกฝั่งหนึ่ง
6. หาจุดตัดของอสมการเงื่อนไขโดยการแก้สมการสองตัวแปร
7. นำจุดตัดดังกล่าวมาแทนในสมการจุดประสงค์และสรุปคำตอบตามที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่างข้อสอบเรื่องกำหนดการเชิงเส้น

1. ถ้า C เป็นปริมาณที่มีค่าขึ้นกับค่าของตัวแปร x และ y ด้วยความสัมพันธ์ $C = 3x + 5y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $3x + 4y \geq 5$, $x + 3y \geq 3$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้วค่าต่ำสุดของ C ตามเงื่อนไขข้างต้น มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 52)
1) $\frac{21}{5}$ 2) $\frac{29}{5}$ 3) $\frac{25}{4}$ 4) $\frac{27}{4}$
2. ถ้า $P = 5x + 4y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $x + 2y \leq 40$, $3x + 2y \leq 60$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้วค่าสูงสุดของ P เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ก.ค. 52)
1) 90 2) 100 3) 110 4) 115
3. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $a < b$ ถ้าค่ามากที่สุดและค่าน้อยสุดของ $P = 2x + y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $a \leq x + 2y \leq b$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ มีค่าเท่ากับ 100 และ 10 ตามลำดับ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 52)
4. จงหาผลคูณของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x, y) = x + y + 2$ ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัดต่อไปนี้
ก. $x + 2y \geq 8$ ข. $5x + 2y \geq 20$
ค. $x + 4y \leq 22$ ง. $x \geq 1$
จ. $1 \leq y \leq 8$
(PAT 1 มี.ค. 54)

เฉลย

เซต

- | | | | | |
|--------|---------|-------|-------|--------|
| 1. 2) | 2. 1) | 3. 2) | 4. 4) | 5. 3) |
| 6. 4) | 7. 18 | 8. 4) | 9. 26 | 10. 4) |
| 11. 97 | 12. 415 | | | |

จำนวนจริง

- | | | | | |
|--------|--------|--------|-------|--------|
| 1. 2) | 2. 4) | 3. 4) | 4. 1) | 5. 1) |
| 6. 3) | 7. 1) | 8. 2) | 9. 1) | 10. 1) |
| 11. 5 | 12. 4) | 13. 3) | 14. 2 | 15. 4) |
| 16. 13 | 17. 4) | | | |

ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 2) | 2. 1) | 3. 2) | 4. 4) | 5. 4) |
| 6. 1) | 7. 4) | 8. 3) | 9. 2) | 10. 3) |
| 11. 3) | 12. 2) | 13. 3) | 14. 2) | |

ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

- | | | | | |
|-------|--------|-------|-------|-------|
| 1. 4) | 2. 3) | 3. 30 | 4. 25 | 5. 1) |
| 6. 3) | 7. 234 | 8. 11 | | |

ฟังก์ชัน

- | | | | | |
|--------|---------|---------|--------|--------|
| 1. 1) | 2. 2) | 3. 1) | 4. 2) | 5. 1) |
| 6. 1) | 7. 1) | 8. 4) | 9. 7.5 | 10. 6 |
| 11. 2) | 12. 4) | 13. 7 | 14. 3) | 15. 1 |
| 16. 2) | 17. 50 | 18. 262 | 19. 3) | 20. 4) |
| 21. 8 | 22. 911 | | | |

เรขาคณิตวิเคราะห์

- | | | | | |
|---------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 3) | 2. 3) | 3. 1) | 4. 1) | 5. 4) |
| 6. 1) | 7. 1) | 8. 4) | 9. 2) | 10. 1) |
| 11. 5.5 | 12. 8 | 13. 3) | 14. 4) | 15. 1) |
| 16. 1) | 17. 2) | 18. 4) | 19. 2) | 20. 4 |
| 21. 4) | 22. 1) | 23. 4 | | |

เมตริกซ์

- | | | | | |
|---------|--------|-------|--------|--------|
| 1. 4) | 2. 3) | 3. 1) | 4. 4) | 5. 1) |
| 6. 4) | 7. 3) | 8. 4) | 9. 0.2 | 10. 32 |
| 11. 6 | 12. 3) | 13. 4 | 14. 4 | 15. 1) |
| 16. 396 | 17. 3) | 18. 3 | | |

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 2) | 2. 3) | 3. 3) | 4. 3) | 5. 2) |
| 6. 1) | 7. 2) | 8. 6 | 9. 4 | 10. 1) |
| 11. 2) | 12. 2) | 13. 3) | 14. 1) | 15. 2) |
| 16. 2) | 17. 4) | 18. 3) | 19. 1) | 20. 4 |
| 21. 5 | 22. 1 | 23. 4) | 24. 2) | 25. 4 |
| 26. 18 | | | | |

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- | | | | | |
|--------|---------|---------|--------|---------|
| 1. 3) | 2. 4) | 3. 2) | 4. 3) | 5. 3) |
| 6. 1) | 7. 1) | 8. 2 | 9. 0 | 10. 3) |
| 11. 1) | 12. 0.5 | 13. 0.5 | 14. 4) | 15. 1) |
| 16. 3) | 17. 3) | 18. 1) | 19. 1 | 20. 178 |
| 21. 1 | 22. 1) | 23. 2) | 24. 22 | 25. 0.2 |
| 26. 20 | | | | |

เวกเตอร์ในสามมิติ

- | | | | | |
|--------|--------|--------|-------|-------|
| 1. 1) | 2. 1) | 3. 4) | 4. 2) | 5. 1) |
| 6. 9 | 7. 2) | 8. 3 | 9. 2) | 10. 2 |
| 11. 2) | 12. 3) | 13. 2) | 14. 3 | |

จำนวนเชิงซ้อน

- | | | | | |
|--------|---------|--------|--------|-------|
| 1. 4) | 2. 3) | 3. 2) | 4. 1) | 5. 1) |
| 6. 4 | 7. 2) | 8. 5 | 9. 4) | 10. 8 |
| 11. 4) | 12. 198 | 13. 1) | 14. 2) | 15. 2 |

ลำดับและอนุกรม

- | | | | | |
|---------|---------|--------|---------|--------|
| 1. 2) | 2. 2) | 3. 3) | 4. 2) | 5. 4) |
| 6. 3) | 7. 3) | 8. 4) | 9. 2.38 | 10. 4 |
| 11. 4) | 12. 1 | 13. 1 | 14. 2) | 15. 2) |
| 16. 2 | 17. 200 | 18. 2 | 19. 7 | 20. 25 |
| 21. 1) | 22. 2) | 23. 0 | 24. 20 | 25. 2 |
| 26. 9 | 27. 2 | 28. 49 | 29. 1) | 30. 3) |
| 31. 2.5 | 32. 6 | 33. 30 | | |

แคลคูลัสเบื้องต้น

- | | | | | |
|---------|--------|---------|--------|--------|
| 1. 2) | 2. 3) | 3. 2) | 4. 3) | 5. 4) |
| 6. 4) | 7. 0.3 | 8. 12 | 9. 8 | 10. 2) |
| 11. 53 | 12. 6 | 13. 7 | 14. 1) | 15. 4) |
| 16. 18 | 17. 10 | 18. 200 | 19. 4) | 20. 1) |
| 21. 120 | 22. 1) | 23. 4) | 24. 4) | 25. 1 |
| 26. 8 | 27. 8 | | | |

ความน่าจะเป็น

- | | | | | |
|---------|--------|---------|---------|--------|
| 1. 3) | 2. 1) | 3. 1) | 4. 1) | 5. 3) |
| 6. 2) | 7. 3) | 8. 2) | 9. 1) | 10. 4) |
| 11. 2) | 12. - | 13. 3) | 14. 56 | 15. 21 |
| 16. 1) | 17. 2) | 18. 44 | 19. 192 | 20. 3) |
| 21. 352 | 22. 9 | 23. 4) | 24. 102 | 25. 22 |
| 26. 4) | 27. 1) | 28. 120 | 29. 4 | |

สถิติ

1. 3)	2. 4)	3. 4)	4. 1)	5. 4)
6. 3)	7. 3)	8. 2)	9. 3)	10. 1)
11. 2)	12. 1)	13. 2	14. 10	15. 57
16. 3)	17. 520	18. 6	19. 10	20. 1)
21. 4)	22. 50	23. 36	24. 2)	25. 1)
26. 56	27. 10	28. 2)	29. 1)	30. 4)

ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

1. 2)	2. 4)	3. 19	4. 48.8
-------	-------	-------	---------

กำหนดการเชิงเส้น

1. 2)	2. 3)	3. 70	4. 157.5
-------	-------	-------	----------

