

BRAND'S®

รุ่น 24

Summer Camp

2013

เอกสารประกอบการบรรยาย

วิชา PAT 1 คณิตศาสตร์

โดย อ.อติเทพ ถนอมพงษ์นาวิน



ประสานงานอาจารย์และจัดพิมพ์โดย ชมรมบัณฑิตแนะแนว
แจกฟรี ห้ามจำหน่าย

BRANDS ซัมเมอร์แคมป์ 2013



เอกสารประกอบคำบรรยาย

วิชา **PAT 1** **คณิตศาสตร์**

โดย **อ.อติเทพ ถนอมพงษ์นาวิน**
OHM MATH SCHOOL

กำลังใจจากคนที่ไม่เก่งเลย จนสอบเลขได้ O-NET, A-NET 100 คะแนนเต็ม

การที่คนเราจะประสบความสำเร็จได้นั้นไม่จำเป็นต้องเก่งมาตั้งแต่ต้น เนื่องจากเราทุกคนสามารถสร้างความเก่งขึ้นมาได้ หากเรามีความมุ่งมั่น อดทนและมีวินัยอย่างสม่ำเสมอ ซึ่งก็เหมือนกับ การวิ่งหนึ่งสัปดาห์ ที่ทุกคนก็สามารถเป็นกันหนึ่งได้ ถ้ามีความพากเพียรอดทน แต่ได้เราพยามยามแล้ว และผลยังไม่เป็นอย่างที่เราต้องการ ของอย่างย่อคือ สู้ต่อไป สักวันความเพียรที่เราสั่งสมไว้จะก่อให้เกิด ต้นไม้แห่งความสำเร็จที่สวนงาม

ที่เชื่อว่าพวกเรทุกคนคงผ่านอุปสรรคอันนี้ไปได้อย่างแน่นอน พี่เป็นกำลังใจให้เสมอ

ดร.พีโอม

เซต

1. สับเซต และเพาเวอร์เซต

สับเซต	เพาเวอร์เซต
นิยาม เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subset B$	นิยาม เพาเวอร์เซตของเซต A คือเซตใหม่ที่มีสมาชิกเป็นสับเซตของ A ทั้งหมด เขียนแทนด้วย $P(A)$
อธิบายง่ายๆ สับเซตคือ นำสมาชิกไปปักกา	อธิบายง่ายๆ เพาเวอร์เซตคือ นำสับเซตทั้งหมดไปปักกา..

คุณสมบัติของสับเซตและเพาเวอร์เซต

สับเซต $\subset$	เพาเวอร์เซต $P(A)$
$\emptyset \subset A$	$\emptyset \in P(A)$
$A \subset A$	$A \in P(A)$
จำนวนสับเซตทั้งหมด คือ $2^{n(A)}$	$n(P(A)) = 2^{n(A)}$

2. การดำเนินงานของเซตพื้นฐาน

- $A \cup B$ เอาทั้งหมด
- $A \cap B$ เอาตัวที่ซ้ำกัน
- $A - B$ หักส่วนที่ซ้ำกัน
- A' หัก A แต่ต้องอยู่ใน U

3. กฎและคุณสมบัติของเซต

ชื่อสมบัติ	สมบัติ
1. สมบัติสลับที่	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. สมบัติแจกแจง	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$ $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$
4. กฎเอกลักษณ์	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup U = U$ $A \cap U = A$
5. กฎการซ้ำ	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6. กฎการเดอมอร์แกน	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
7. กฎของคอมพลีเมนต์	$A \cup A' = U, A \cap A' = \emptyset, \emptyset' = U, U = \emptyset,$ $(A')' = A, A - B = A - (A \cap B) = A \cap B' = B' - A',$ $(A - B)' = A' \cup B$

4. การหาจำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

วิธี	ควรใช้เมื่อ
1. วิธีการใช้สูตรหาจำนวนสมาชิก	โจทย์ไม่ซับซ้อน
2. วิธีใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์	โจทย์ซับซ้อน

1. การใช้สูตรหาจำนวนสมาชิก

สูตรกลุ่มที่ 1

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

สูตรกลุ่มที่ 2

- $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
- $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

สูตรกลุ่มที่ 3

- $n(A') = n(U) - n(A)$
- $n(A) = n(U) - n(A')$

2. วิธีใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์หาจำนวนสมาชิก

- หลัก**
- เขียนแผนภาพและเซตที่เกี่ยวข้อง (ถ้ามีเงื่อนไขจะต้องเขียนให้ตรงกับเงื่อนไขก่อน)
 - เติมจำนวนสมาชิกลงในแต่ละส่วนของภาพ ถ้าเติมไม่ได้ต้องสมมุติตัวแปร (x)
 - สร้างสมการและแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปร
 - นำค่าตัวแปรที่ได้ไปตอบคำถาม ซึ่งคำถามอาจจะไม่ใช่แค่ค่าตัวแปร (x)

แนะนำ ควรเติมในส่วนที่อินเตอร์เซกกันมากที่สุดก่อนหรือไม่ก็เป็นที่โจทย์ถามหา

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง เซต

Problem.1 กำหนดให้ $A = \{x | x \text{ เป็นจำนวนคู่บวก และ } x \leq 100\}$

และ $B = \{x | x \in A \text{ และ } 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

จำนวนสมาชิกของเซต $P(B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 2^{16} 2. 2^{17} 3. 2^{18} 4. 2^{19}

Problem.2 กำหนดให้ $A = \{\emptyset, 1, \{1\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้

1. $\emptyset \subset A$ *2. $\{\emptyset\} \not\subset A$
3. $\{1, \{1\}\} \subset A$ 4. $\{\{1\}, \{1, \{1\}\}\} \not\subset A$

Problem.3 กำหนดให้ $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\{1, 2\} \in A$ 2. $\{1, 2, 3\} \in A$ 3. $\{1, 2\} \subset A$ *4. $\{1, 2, 3\} \subset A$

Problem.4 กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ $P(S)$ แทนพาวเวอร์เซตของ S

ให้ $A = \{x \in I \mid |x^2 - 1| < 8\}$ และ

$B = \{x \in I \mid 3x^2 + x - 2 \geq 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. จำนวนสมาชิกของ $P(A - B)$ เท่ากับ 4
2. จำนวนสมาชิกของ $P(I - (A \cup B))$ เท่ากับ 2
3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
*4. $P(A - B) - P(A \cap B) = \{\{0\}\}$

Problem.5 กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2\}$ และ $P(A)$ แทนเซตกำลังของ A พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $A \cap P(A) = \{0, 1, 2\}$ ข. $n(A - P(A)) < n(P(A) - A)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก ถูก และ ข ถูก 2. ก ถูก และ ข ผิด
*3. ก ผิด และ ข ถูก 4. ก ผิด และ ข ผิด

Problem.6 ให้ $A = \{1, \{1\}\}$ และ $P(A)$ เป็นพาวเวอร์เซตของ A ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. จำนวนสมาชิกของ $P(A) - A$ เท่ากับ 3
2. จำนวนสมาชิกของ $P(P(A))$ เท่ากับ 16
3. $\{\{1\}\} \in P(A) - A$
- *4. $\{\emptyset, A\} \in P(A)$

Problem.7 ให้ $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ และ $P(A)$ เป็นพาวเวอร์เซตของ A ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. จำนวนสมาชิกของ $P(A)$ เท่ากับ 16
2. จำนวนสมาชิกของ $P(A) - \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ เท่ากับ 7
3. $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \subset P(A) - \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- *4. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \subset P(A)$

Problem.8 ในการสำรวจความเห็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 880 คน เพื่อสอบถามข้อมูลเกี่ยวกับการศึกษาต่อปรากฏผลดังนี้

มีผู้ต้องการศึกษาต่อ 725 คน

มีผู้ต้องการทำงาน 160 คน

มีผู้ต้องการศึกษาต่อหรือทำงาน 813 คน

ผู้ที่ต้องการศึกษาต่อและทำงานด้วยมีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 67 คน
- *2. 72 คน
3. 85 คน
4. 90 คน

Problem.9 กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด โดยที่ $n(P(A)) = \log_{\sqrt{2}} 4$,

$$n(P(B)) = (\sqrt{5})^{\log_5 256} \text{ และ } n(P(A \cup B)) = 3^{2 \log_9 32}$$

เมื่อ $P(S)$ แทนพาวเวอร์เซตของ S

จงหาค่าของ $n(P(A) \cup P(B))$ (ตอบ 18)

Problem.10 กำหนดเซตและจำนวนสมาชิกของเซตตามตารางดังนี้

เซต	A	B	C	$A \cup B$	$B \cup C$	$A \cup C$	$(A \cap B) \cup C$
จำนวนสมาชิก	15	17	22	23	29	32	28

จำนวนสมาชิกในเซตของ $A \cup B \cup C$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 33)

Problem.11 กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ

ถ้า $n(A \cup B \cup C) = 91$, $n(A \cap B' \cap C') = 11$, $n((B - A) \cap (B - C)) = 15$,
 $n(A \cap B \cap C) = 20$, $n((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = 47$, $n(C) = 59$
 แล้ว $n(A' \cap B' \cap C)$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 18)

Problem.12 ในการสอบวิชาภาษาไทย วิชาภาษาอังกฤษ และวิชาคณิตศาสตร์ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักเรียนสอบเข้าทั้งหมด 66 คน ปรากฏว่ามีนักเรียนสอบตกทั้งสามวิชา จำนวน 13 คน นักเรียนที่สอบได้ทั้งสามวิชามีจำนวน 17 คน นักเรียนที่สอบได้วิชาภาษาไทย และวิชาภาษาอังกฤษ แต่สอบตกวิชาคณิตศาสตร์มีจำนวน 10 คน นักเรียนที่สอบได้วิชาภาษาไทยและวิชาคณิตศาสตร์แต่สอบตกวิชาภาษาอังกฤษมีจำนวน 11 คน นักเรียนที่สอบได้เพียงวิชาเดียวมีจำนวน 6 คน จำนวนนักเรียนที่สอบได้วิชาภาษาอังกฤษ และวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับเท่าใด (ตอบ 26)

Problem.13 โรงเรียนแห่งหนึ่งมีจำนวนนักเรียน 750 คน พบว่ามีนักเรียนจำนวน 30 คน ไม่เล่นกีฬาเลย นอกนั้นเล่นกีฬาอย่างน้อยหนึ่งประเภทคือ ปิงปอง แบดมินตัน เทนนิส จากการสำรวจเฉพาะกลุ่มนักเรียนที่เล่นกีฬา พบว่ามีนักเรียนจำนวน 630 คน เล่นกีฬาเพียงประเภทเดียวเท่านั้น มีนักเรียน 30 คน เล่นเทนนิสและปิงปอง มีนักเรียน 50 คน เล่นปิงปองและแบดมินตัน มีนักเรียน 40 คน เล่นเทนนิสและแบดมินตัน มีนักเรียน ไม่เล่นเทนนิสจำนวน 250 คน จงหาว่ามีนักเรียนกี่คนที่เล่นเทนนิสเพียงอย่างเดียว (ตอบ 415)

Problem.14 กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ

ถ้า $n(A) + n(B) + n(C) = 301$ และ $n(A \cup B \cup C) = 102$
 แล้ว $n(A \cap B \cap C)$ มีค่าอย่างน้อยเท่ากับเท่าใด (ตอบ 97)

LOGIC

1. การหาตารางค่าความจริง

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

ข้อควรจำ

- $T \wedge T \equiv T$ ที่เหลือ F
- $F \vee F \equiv F$ ที่เหลือ T
- $T \rightarrow F \equiv F$ ที่เหลือ T
- ก็ต่อเมื่อ เหมือนกัน T ไม่เหมือนกัน F

2. รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ที่สมมูลกัน คือ ข้อความที่มีค่าความจริงในตารางค่าความจริงเหมือนกันทุกประการ
จะใช้สัญลักษณ์ $\equiv$ แทนข้อความที่สมมูลกัน

กฎสมมูลที่ในตรรกศาสตร์สำคัญ

กฎสมมูลหลัก (จำนะแค่ 3 ข้อเองก็ทำโจทย์ได้หมด)	กฎสมมูลรอง
1. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$	1. $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
2. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
3. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \rightarrow q \equiv p \rightarrow \sim q$	2. $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

3. สัจนิรันดร์ คือ รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี เรียกว่า สัจนิรันดร์

การตรวจสอบสัจนิรันดร์ทำได้ 4 วิธี คือ

- ใช้ตาราง
- ใช้กฎสมมูล
- ใช้วิธีขัดแย้ง
- ใช้กฎใหญ่จริงของ *P'Ohm*

4. การอ้างเหตุผล (Logical Implication)

การอ้างเหตุผลจะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

- (1) สิ่งที่กำหนดให้ หรือ เหตุ : $p_1, p_2, \dots, p_n$
- (2) ข้อสรุป หรือ ผล : c

การอ้างเหตุผลอาจจะสมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผลก็ได้ซึ่งสามารถตรวจสอบได้โดยใช้ตัวเชื่อม $\wedge$ เชื่อมเหตุทั้งหมดเข้าด้วยกันและใช้ตัวเชื่อม $\rightarrow$ เชื่อมส่วนที่เป็นเหตุกับผลดังนี้

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow c$$

ถ้ารูปแบบ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow c$ เป็นสัจนิรันดร์การอ้างเหตุผลจะสมเหตุสมผล

Note การอ้างเหตุผลเหมือนการตรวจสอบสัจนิรันดร์ ที่มีตัวเชื่อมหลัก คือ $\leftrightarrow$

5. ตัวบ่งปริมาณ

การหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว

1. เทคนิคการหาค่าความจริงของ $\forall x$

ให้ยกตัวอย่าง x 1 ตัวใน U ที่ทำให้ $P(x)$ เป็น F ให้ได้ ถ้าสามารถยกตัวอย่างได้

$$\forall x[P(x)] \equiv F \text{ ทันทที (แน่นอนว่าถ้ายกตัวอย่างไม่ได้ } \forall x[P(x)] \equiv T \text{)}$$

2. เทคนิคการหาค่าความจริงของ $\exists x$

ให้ยกตัวอย่าง x 1 ตัวใน U ที่ทำให้ $P(x)$ เป็น T ให้ได้ ถ้าสามารถยกตัวอย่างได้

$$\exists x[P(x)] \equiv T \text{ ทันทที (แน่นอนว่าถ้ายกตัวอย่างไม่ได้ } \exists x[P(x)] \equiv F \text{)}$$

การหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณสองตัว

$$1. \forall x \forall y [P(x, y)] \equiv T \leftrightarrow \text{ใช้ } x \text{ ได้หมด โดยแต่ละตัวของ } x \text{ ต้องใช้ } y \text{ ได้หมดด้วย}$$

$$\forall x \forall y [P(x, y)] \equiv F \leftrightarrow \text{มี } x \text{ และ } y \text{ อย่างน้อย 1 คู่ที่ทำให้ } P(x, y) \text{ เป็นเท็จ}$$

$$2. \forall x \exists y [P(x, y)] \equiv T \leftrightarrow \text{ใช้ } x \text{ ได้หมดโดยแต่ละตัวของ } x \text{ ต้องใช้ } y \text{ ได้อย่างน้อย 1 ตัว}$$

$$\forall x \exists y [P(x, y)] \equiv F \leftrightarrow \text{มี } x \text{ อย่างน้อย 1 ตัวที่ไม่สามารถใช้ } y \text{ ได้เลย}$$

$$3. \exists x \forall y [P(x, y)] \equiv T \leftrightarrow \text{มี } x \text{ อย่างน้อย 1 ตัวที่สามารถใช้ } y \text{ ได้หมด}$$

$$\exists x \forall y [P(x, y)] \equiv F \leftrightarrow \text{ไม่มี } x \text{ ที่สามารถใช้ } y \text{ ได้หมด}$$

$$4. \exists x \exists y [P(x, y)] \equiv T \leftrightarrow \text{มี } x \text{ และ } y \text{ อย่างน้อย 1 คู่ที่ทำให้ } P(x, y) \text{ เป็นจริง}$$

$$\exists x \exists y [P(x, y)] \equiv F \leftrightarrow x \text{ ทุกตัว และ } y \text{ ทุกตัว ที่ทำให้ } P(x, y) \text{ เป็นเท็จเสมอ}$$

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง ตรรกศาสตร์

Problem.1 กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ที่

ประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ

ประพจน์ $p \leftrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ประพจน์ใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

- | | |
|--|--|
| 1. $(q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r)$ | *2. $q \rightarrow [p \vee (q \wedge \sim r)]$ |
| 3. $(p \rightarrow s) \leftrightarrow (r \leftrightarrow q)$ | 4. $(r \leftrightarrow s) \wedge [q \rightarrow (p \wedge r)]$ |

Problem.2 กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ที่ $p \rightarrow (q \rightarrow r), r \vee \sim p$ และ p

มีค่าความจริงเป็นจริง ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

- | | |
|--|--|
| 1. $[p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)] \leftrightarrow \sim (q \wedge r)$ | 2. $[p \rightarrow (r \rightarrow q)] \leftrightarrow [(r \rightarrow p) \rightarrow q]$ |
| *3. $[p \rightarrow \sim (r \wedge q)] \leftrightarrow [r \rightarrow (p \wedge q)]$ | 4. $[p \vee (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [r \rightarrow (p \rightarrow q)]$ |

Problem.3 กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $q \wedge r$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว p และ $p \vee [(q \wedge r) \rightarrow p]$ มีค่าความจริงเหมือนกัน

ข. ถ้า p มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว r และ $(p \rightarrow q) \wedge r$ มีค่าความจริงเหมือนกัน

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- | | |
|---------------------|--------------------|
| *1. ก ถูก และ ข ถูก | 2. ก ถูก และ ข ผิด |
| 3. ก ผิด และ ข ถูก | 4. ก ผิด และ ข ผิด |

Problem.4 กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ประพจน์ $p \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$ สมมูลกับประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$

ข. ประพจน์ $p \wedge (q \rightarrow r)$ สมมูลกับประพจน์ $(q \rightarrow p) \vee \sim (p \rightarrow \sim r)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1. ก. ถูก และ ข. ถูก | *2. ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3. ก. ผิด และ ข. ถูก | 4. ก. ผิด และ ข. ผิด |

Problem.5 กำหนดให้ A, B และ C เป็นประพจน์ใดๆ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ถ้า $A \leftrightarrow B$ มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว $(B \wedge C) \rightarrow (\sim A \rightarrow C)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
2. ประพจน์ $A \rightarrow [(A \wedge B) \vee (B \vee C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
- *3. ประพจน์ $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
4. ประพจน์ $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ สมมูลกับประพจน์ $(A \wedge B) \rightarrow C$

Problem.6 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ ช่วงเปิด $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าความจริงของ $\forall x[(\cos x)^{\sin x} < (\sin x)^{\cos x}]$ เป็นจริง

ข. ค่าความจริงของ $\exists x[(\cos x)^{\cos x} < (\sin x)^{\cos x}]$ เป็นเท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก ถูก และ ข ถูก
- *2. ก ถูก และ ข ผิด
3. ก ผิด และ ข ถูก
4. ก ผิด และ ข ผิด

Problem.7 กำหนดให้ $U = \{n \in I^+ \mid n \leq 10\}$

ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีความจริงเป็นเท็จ

1. $\forall x \forall y [(x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)]$
2. $\forall x \exists y [(x \neq 1) \rightarrow (x > y^2)]$
3. $\exists x \forall y [xy \leq x + y]$
- *4. $\exists x \exists y [(x - y)^2 \geq y^2 + 9xy]$

Problem.8 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซต $\{-2, -1, 1, 2\}$ ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีความจริงเป็นเท็จ

1. $\exists x \exists y [x \leq 0 \wedge |x| = y + 1]$
2. $\exists x \forall y [x \leq y \wedge -(x + y) \geq 0]$
3. $\forall x \exists y [x + y = 0 \vee x - y = 0]$
- *4. $\forall x \forall y [|x| < |y| \vee |x| > |y|]$

Problem.9 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ $U = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- *1. $\forall x \forall y [x \cap y \neq \emptyset]$ 2. $\forall x \forall y [x \cup y \neq U]$
 3. $\forall x \exists y [y \neq x \wedge y \subset x]$ 4. $\exists x \forall y [y \neq x \wedge y \subset x]$

Problem.10 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง และ

$$P(x) \text{ แทน } \sqrt{(x+1)^2} = x+1$$

$$Q(x) \text{ แทน } \sqrt{x+1} > 2$$

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์ $\exists x [P(x)] \rightarrow \forall x [Q(x)]$

1. $\exists x [\sim P(x)] \rightarrow \forall x [\sim Q(x)]$ *2. $\exists x [P(x)] \rightarrow \exists x [Q(x)]$
 3. $\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x [P(x)]$ 4. $\exists x [P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \forall x [Q(x)]$

Problem.11 ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$
 ค่าความจริงของ $\forall x \exists y [x^2 + x = y^2 + y]$ เป็นเท็จ
 2. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง
 ค่าความจริงของ $\exists x [3^x = \log_3 x]$ เป็นจริง
 *3. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง
 นิเสธของข้อความ $\forall x \exists y [(x > 0 \wedge y \leq 0) \wedge (xy < 1)]$
 คือ $\forall x \exists y [(xy < 0) \rightarrow (x \leq 0 \vee y > 0)]$
 4. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง
 นิเสธของข้อความ $\forall x [x > 0 \rightarrow x^3 \geq x^2]$
 คือ $\exists x [(x \leq 0) \wedge (x^3 \geq x^2)]$

Problem.12 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด

ประโยค $\forall x [P(x)] \rightarrow \exists x [\sim Q(x)]$ สมมูลกับประโยคในข้อใดต่อไปนี้

1. $\forall x [\sim P(x)] \rightarrow \exists x [Q(x)]$ *2. $\forall x [Q(x)] \rightarrow \exists x [\sim P(x)]$
 3. $\exists x [P(x)] \rightarrow \forall x [Q(x)]$ 4. $\exists x [\sim Q(x)] \rightarrow \forall x [P(x)]$

ระบบจำนวนจริง

1. สรุปหลักการแก้สมการ

หลัก

1. ทำให้ข้างใดข้างหนึ่งของสมการเป็นศูนย์
2. แยก factor ให้เป็นวงเล็บคูณกันหรือหารกันก็ได้ (ถ้ากำลังสูงๆ อาจต้องใช้การหารสังเคราะห์เข้าช่วย)
3. ถ้า factor ใดมั่นใจว่าเป็นบวกลบให้ตัดทิ้งได้ (ถ้าไม่มั่นใจหลังจากตัดทิ้งแล้วควรเช็คค่าด้วย)
4. นำค่าวิกฤต (ค่าตรงกันข้ามกันภายใน factor) ไปเขียนบนเส้นจำนวน
5. ถ้า ส.ป.ส. ของ x ดีกรีสูงสุดเป็นบวกลบให้ใส่เครื่องหมายบวกลบสลับกันโดยเริ่มจากด้านขวา

ข้อควรระวัง

1. อย่าพยายามย้ายข้างตัวแปรด้วยการคูณหรือหาร เพราะการนำเลขลบไปคูณหรือหารจะทำให้สมการกลับข้าง

2. โปรดจำให้ขึ้นใจ ส่วนจะเป็นศูนย์ไม่ได้ ดังนั้นคำตอบที่มาจากส่วนจะต้องเป็นช่วงเปิดเสมอ

2. บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

3. สมบัติที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. $ x \geq 0$ | 2. $ x = -x $ |
| 3. $ x-y = x-y $ | 4. $ x \cdot y = x \cdot y $ |
| 5. $\left \frac{x}{y} \right = \frac{ x }{ y } ; y \neq 0$ | 6. $ x ^n = x^n $ |
| 7. $ x+y \leq x + y $ | 8. $ x-y \leq x + y $ |
| 9. $ x-y \geq x - y $ | 10. $ x+y \geq x - y $ |

4. การแก้สมการค่าสัมบูรณ์

1. ถ้า $|x| = a$ แล้ว $x = a$ หรือ $x = -a$
2. ถ้า $|\square| = \square$ แล้ว $\square \geq 0$
ถ้า $|\square| = -\square$ แล้ว $\square \leq 0$
3. ถ้า $|\square| = |\Delta|$ แล้ว $\square^2 = \Delta^2$
4. ถ้าเจอหลายค่าสัมบูรณ์ ต้องปลดค่าสัมบูรณ์

5. การแก้สมการค่าสัมบูรณ์

1. $|x| < a$ ความหมายตรงกับ $-a < x < a$
 $|x| \leq a$ ความหมายตรงกับ $-a \leq x \leq a$
 $|x| > a$ ความหมายตรงกับ $x > a$ หรือ $x < -a$
 $|x| \geq a$ ความหมายตรงกับ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$
2. $|\square| \geq |\Delta|$ แล้ว $\square^2 \geq \Delta^2$
 $|\square| \leq |\Delta|$ แล้ว $\square^2 \leq \Delta^2$
3. ถ้าเจอ $|\square| + |\Delta| = |\square + \Delta|$ จะได้ $\square \Delta \geq 0$
ถ้าเจอ $|\square| + |\Delta| = |\square - \Delta|$ จะได้ $\square \Delta \leq 0$
4. ถ้าเจอหลายค่าสัมบูรณ์ ต้องปลดค่าสัมบูรณ์

6. การแก้สมการที่อยู่ในรูปเครื่องหมายกรณฑ์

หลักการ

1. ต้องกำจัดเครื่องหมายกรณฑ์โดยการยกกำลัง
2. พยายามย้ายข้างให้ตัวแปรของทั้งสองข้างของสมการพอๆ กัน
3. บางครั้งอาจจะมีการสมมติตัวแปร
4. อย่าลืมตรวจคำตอบด้วย

Problem.4 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2551 ซึ่งสอดคล้องกับ $P(n) = Q(n)$ สำหรับ $n = 1, 2, \dots, 2551$ และ $P(2552) = Q(2552) + 1$ ค่าของ $P(0) - Q(0)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
- *3. -1
4. หาไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ

Problem.5 กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{(2x+1)(x-1)}{2-x} \geq 0$

และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^2 - 7x + 3 < 0$

ถ้า $A \cap B = [c, d)$ แล้ว $6c - d$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 4
2. 5
3. 6
4. 7

Problem.6 กำหนดให้ $A = \{x \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3) \leq 15\}$

ถ้า a เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดในเซต A

และ b เป็นสมาชิกค่ามากสุดในเซต A แล้ว $(b - a)^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 24
2. 16
3. 8
4. 4

Problem.7 กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$

ถ้า a เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุดในเซต $S \cap (2, \infty)$

และ b เป็นจำนวนลบที่มีค่ามากที่สุดซึ่ง $b \notin S$ แล้ว $a^2 - b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -9
2. -5
- *3. 5
4. 9

Problem.8 กำหนดให้ $S = \left\{x \mid \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \geq \frac{x+2}{x^2 - 1}\right\}$ ช่วงในข้อใดต่อไปนี้ เป็นสับเซตของ S

1. $(-\infty, -3)$
- *2. $(-1, 0.5)$
3. $(-0.5, 2)$
4. $(1, \infty)$

Problem.9 กำหนดให้ $A = \{x \mid |x-1| \leq 3-x\}$ และ a เป็นสมาชิกค่ามากที่สุดของ A ค่าของ a อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(0, 0.5]$
2. $(0.5, 1]$
3. $(1, 1.5]$
- *4. $(1.5, 2]$

Problem.10 กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid \sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 4\}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- *1. $A' = \{x \in R \mid |3 - x| > 4\}$ 2. $A' \subset (-1, \infty)$
3. $A = \{x \in R \mid x \leq 7\}$ 4. $A \subset \{x \in R \mid |2x - 3| < 7\}$

Problem.11 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $\left\{x \in R \mid \frac{|1-x|-2}{x+|x|-3} > 1\right\}$ แล้ว $A \cap [0, 1)$ เท่ากับ
ข้อใดต่อไปนี้

1. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 2. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ *3. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 4. $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

Problem.12 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $S = \{x \in R \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{7x-1}\}$
และ $T = \{y \in R \mid y = 3x+1, x \in S\}$ แล้วผลบวกสมาชิกใน T เท่ากับเท่าใด
(ตอบ 2)

Problem.13 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ ถ้า
 $A = \{x \in R \mid 2x^2 - 2x + 9 - 2\sqrt{x^2 - x + 3} = 15\}$
แล้วผลบวกของกำลังสองของสมาชิกในเซต A เท่ากับเท่าใด (ตอบ 13)

เรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย

เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น

1. ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด

ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ ระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 เท่ากับ

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ แล้ว

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3. จุดแบ่งส่วนเส้นตรง

ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ในอัตราส่วน m ต่อ n

$$\text{แล้ว } x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n} \quad \text{และ} \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

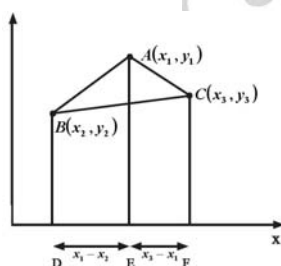
4. การหาจุดตัดของเส้นมัธยฐาน

กำหนดสามเหลี่ยม ABC มีพิกัดเป็น $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ O เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐานทั้งสาม

$$\text{แล้ว } O \text{ จะหาได้จาก } \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

5. การหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

1. การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมในกรณีที่ทราบจุดยอดของสามเหลี่ยม



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_2) \end{aligned}$$

2. การหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

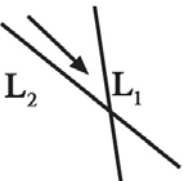
การหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม สามารถหาได้โดยอาศัยวิธีเดียวกับการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม โดยจะต้องเรียงจุดทวนเข็มนาฬิกา (Counterclockwise) และห้ามเรียงสลับจุดถ้าผลของเรียงจุดตามเข็มนาฬิกา (Clockwise) ก็ไม่เป็นไรแต่ขอให้รู้ด้วยว่าค่าที่ได้จะติดลบ

6. ความชันของเส้นตรง

ให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

$$m \text{ เป็นความชันของเส้นตรง } \ell \text{ ก็ต่อเมื่อ } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

สรุปความชันจะแบ่งออกได้เป็น 4 ชนิด คือ

รูปแบบ	ค่าความชัน	θ (มุมที่ทำกับแกน $+x$)	ขนาดของความชัน
	$m > 0$ (m เป็นบวก) กราฟพุ่งขึ้น	$0^\circ < \theta < 90^\circ$ (มุมแหลม)	$m_{L_1} > m_{L_2}$
	m หาค่าไม่ได้ กราฟขนานแกน y	$\theta = 90^\circ$	
	$m < 0$ (m เป็นลบ) กราฟพุ่งลง	$90^\circ < \theta < 180^\circ$ (มุมป้าน)	$m_{L_1} > m_{L_2}$
	$m = 0$ กราฟขนานแกน x	$\theta = 180^\circ$	

ทฤษฎีบทของความชัน

ทฤษฎีบท

1. เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน y จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรงเท่ากัน
2. เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน y จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

7. การสร้างสมการเส้นตรง

ความชันที่ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ

$$\{(x, y) \in R \times R \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$$

8. การอ่านค่าต่างๆจากสมการเส้นตรง

ระยะตัดแกน x ทำได้โดยการแทน $Y = 0$

ระยะตัดแกน Y ทำได้โดยการแทน $X = 0$

สรุป

สมการ	ความชัน	ระยะตัดแกน x	ระยะตัดแกน y
$Ax + By + C = 0$	$-\frac{A}{B}$	$-\frac{C}{A}$	$-\frac{C}{B}$
$y = mx + c$	m	$-\frac{c}{m}$	c

8. ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด (x_1, y_1) คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

9. ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนาน

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ และเส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$ คือ

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ภาคตัดกรวย

1. วงกลม

สมการวงกลมมาตรฐาน $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

โดยที่ (h,k) คือ จุดศูนย์กลาง และ r คือ รัศมี

สมการทั่วไปของวงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

จากสมการทั่วไปเราสามารถหา จุดศูนย์กลาง และ รัศมี ได้อย่างรวดเร็วดังนี้

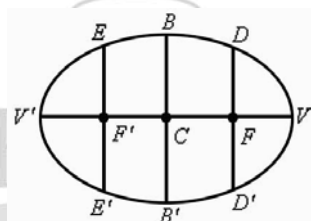
$$(h,k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ และ } r = \sqrt{h^2 + k^2 - C}$$

Note เราจะทำโจทย์เรื่องวงกลมทุกๆ ข้อได้โดยมีหลักคือ เราจะต้องหา 1. จุดศูนย์กลาง 2. รัศมี

2. วงรี

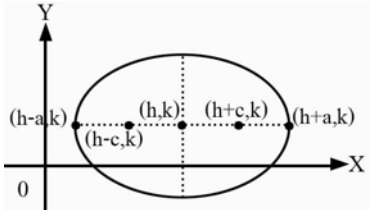
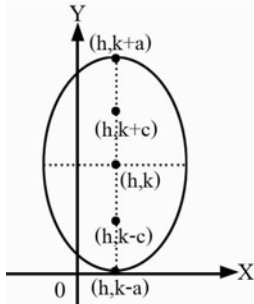
นิยามวงรี (Ellipse) คือ ผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยัง จุด F_1 กับ F_2 ที่ตั้งเรียงอยู่กับที่มีค่าเท่ากับ $2a$ หรือ $PF_1 + PF_2 = 2a$

ข้อกำหนด วงรีมีข้อกำหนดที่ตกลงกันก่อนเรียนดังต่อไปนี้



1. จุดโฟกัส (จุดคงที่ 2 จุดในนิยาม) จะเป็น F และ F' ในรูป
2. จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองจะเรียกว่า “จุดศูนย์กลาง” ของวงรีซึ่งก็คือ C ในรูป
3. เส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสและตัดกับกราฟของวงรีที่จุด V และ V' และเรียกจุดทั้ง 2 ว่า “จุดยอด”
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสองจะเรียกว่า “แกนเอก” (Major Axis)
5. ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอก และตัดกราฟวงรีที่ B และ B' และเรียกส่วนเส้นตรง BB'
6. เส้นตรง DD' และ EE' เรียกว่า “ลาตัสเรกตัม” (Latus Rectum) โดยมีความยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$

วงรีจะแบ่งออกเป็น 2 ชนิด

กราฟ		
สมการมาตรฐาน	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	(h, k)	(h, k)
จุดยอด	$(h-a, k) \quad (h+a, k)$	$(h, k-a) \quad (h, k+a)$
จุดโฟกัส	$(h-c, k) \quad (h+c, k)$	$(h, k-c) \quad (h, k+c)$
ความยาว	ระยะครึ่งแกนเอก = a ระยะครึ่งแกนโท = b ระยะโฟกัส = c	
ความสัมพันธ์ ของความยาว	$a^2 = b^2 + c^2$	

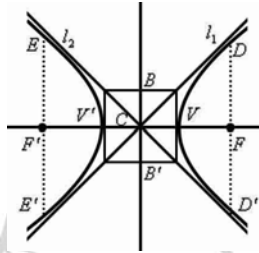
นิยามที่ควรรู้เพิ่มเติม

ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$

3. ไฮเพอร์โบลา

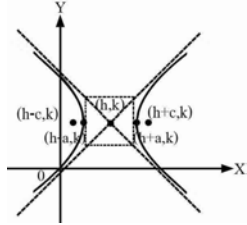
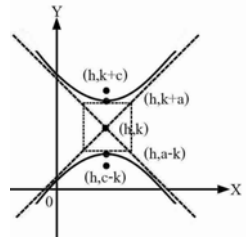
นิยามวงรี (Ellipse) คือ ผลต่าง ของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยัง F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าเท่ากับ $2a$ หรือ $|P_1F_1 - P_1F_2| = 2a$

ข้อกำหนด ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) มีข้อกำหนดที่ตกลงกันก่อนเรียนดังต่อไปนี้



1. จุดโฟกัส (จุดคงที่ 2 จุดในนิยาม) จะคือ F และ F' ในรูป
2. จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสองจะเรียกว่า “จุดศูนย์กลาง” ของวงรีซึ่งก็คือ C ในรูป
3. เส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสและตัดกับกราฟของวงรีที่จุด V และ V' และเรียกจุดทั้ง 2 ว่า “จุดยอด”
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสองจะเรียกว่า “แกนตามขวาง ” (Transverse Axis)
5. ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอก และตัดกราฟวงรีที่ B และ B' และเรียกส่วนเส้นตรง BB' ว่า “แกนสังยุค ” (Conjugate Axis)
6. เส้นตรง DD' และ EE' เรียกว่า “ลาตัสเรกตัม” (Latus Rectum) โดยมีความยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$
7. เส้นตรง l_1 และ l_2 เรียกว่า “เส้นกำกับ” (Asymtote)

ไฮเพอร์โบลา จะแบ่งออกเป็น 2 ชนิด

กราฟ		
สมการมาตรฐาน	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	(h, k)	(h, k)
จุดยอด	$(h-a, k) \quad (h+a, k)$	$(h, k-a) \quad (h, k+a)$
จุดโฟกัส	$(h-c, k) \quad (h+c, k)$	$(h, k-c) \quad (h, k+c)$
ความยาว	ระยะครึ่งแกนตามขวาง = a ระยะครึ่งแกนตั้งฉาก = b ระยะโฟกัส = c	
ความสัมพันธ์ของความยาว	$c^2 = a^2 + b^2$	

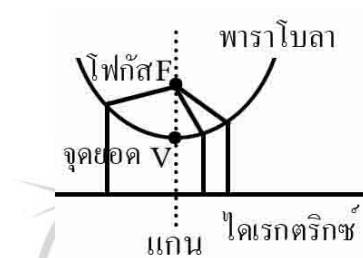
ความรู้เพิ่มเติม

Ohmthinoe Tip เทคนิคการหาสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา (asymptote lines)
 จัดสมการไฮเพอร์โบลาให้อยู่ในรูปสมการมาตรฐาน แล้วเปลี่ยนจากเท่ากับ 1 เป็นเท่ากับ 0
 1 เป็นเท่ากับ 0

4. พาราโบลา

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของพาราโบลา

ระยะทางจากจุดคงที่จุดหนึ่ง (จุดยอด) ไปยังจุดใดๆ บนกราฟพาราโบลา มีระยะทางเท่ากับ ระยะทางจากจุดใดๆ บนกราฟพาราโบลาไปยังเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **เส้นกำกับ** หรือ **ไดเรกตริกซ์** (*Directrix*) ของพาราโบลา (ดังรูป)

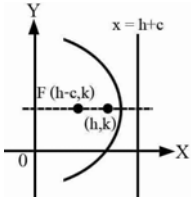
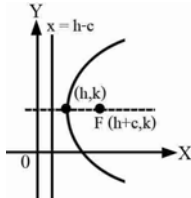


ลักษณะของพาราโบลาจะแบ่งออกได้ดังนี้

พาราโบลาหุ้มแกน y แบ่งเป็น 2 ชนิด

กราฟ		
สมการ	$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	$(x-h)^2 = -4c(y-k)$
จุดยอด	(h, k)	(h, k)
จุดโฟกัส	$(h, k+c)$	$(h, k-c)$
สมการ Directrix	$y = k - c$	$y = k + c$

พาราโบลาหุ้มนแกน x แบ่งเป็น 2 ชนิด

กราฟ		
สมการ	$(y - k)^2 = -4c(x - h)$	$(y - k)^2 = 4c(x - h)$
จุดยอด	(h, k)	(h, k)
จุดโฟกัส	$(h - c, k)$	$(h + c, k)$
สมการ Directrix	$x = h + c$	$x = h - c$



ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1

เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย

Problem.1 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $A(0,0)$ และ $B(2,2)$ เป็นจุดยอด และ $C(x,y)$ เป็นจุดยอดในจตุภาคที่ 2 ที่ทำให้ด้าน AC ขาวเท่ากับด้าน BC ถ้าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ 4 ตารางหน่วย แล้วจุด C อยู่บนเส้นตรงในข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1. $x - y + 4 = 0$ | 2. $4x + 3y - 1 = 0$ |
| 3. $2x - y - 3 = 0$ | 4. $x + y - 5 = 0$ |

Problem.2 รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม $\hat{A}BC$ เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ถ้าพิกัดของจุด A และ จุด B คือ $(-4,3)$ และ $(-1,2)$ ตามลำดับ แล้วสมการเส้นตรงในข้อใดผ่านจุด C

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1. $x + 8y - 27 = 0$ | *2. $8x + y - 27 = 0$ |
| 3. $4x - 5y + 3 = 0$ | 4. $-5x + 4y + 3 = 0$ |

Problem.3 จุด $A(1,0)$ และ จุด $B(b,0)$ เมื่อ $b > 1$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด $(-1,0)$ และสัมผัสกับวงกลมวงนี้ มีความชันเท่ากับ $\frac{4}{3}$ แล้ว b เท่ากับเท่าใด (ตอบ 17)

Problem.4 กำหนดให้ $a > \tan 60^\circ$ และ $A(a,3)$, $B(7,8)$ และ $C(-4,9)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมที่มีมุม A เป็นมุมฉาก ให้ L เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่าน A และ จุด B จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้พาราโบลา $ky = x^2 + 2k$ มีจุดร่วมกับเส้นตรง L เพียงจุดเดียว (ตอบ 4)

Problem.5 กำหนดให้ วงกลมรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2,1)$ ถ้าเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $x = 1$ เส้นหนึ่งมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงกลมที่กำหนด

- | | | | |
|-------------|------------|------------|------------|
| *1. $(0,1)$ | 2. $(0,2)$ | 3. $(1,0)$ | 4. $(3,0)$ |
|-------------|------------|------------|------------|

Problem.6 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง ถ้าวงกลม $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(2, 1)$ และมีเส้นตรง $x - y + 2 = 0$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม แล้ว $|a + b + c|$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 5.5)

Problem.7 กำหนดให้ $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$
และ $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 + 10x - 10y + 49 = 0\}$
ถ้า $p \in A$ และ $q \in B$ แล้ว ระยะทางมากที่สุดที่เป็นไปได้ระหว่างจุด p และ q เท่ากับเท่าใด

1. $5\sqrt{2}$ หน่วย
2. $2 + 5\sqrt{2}$ หน่วย
3. $2\sqrt{5}$ หน่วย
4. $5 + 2\sqrt{5}$ หน่วย

Problem.8 กำหนดให้เส้นตรง l_1 และ l_2 สัมผัสวงกลม $(x - 5)^2 + y^2 = 20$ ที่จุด P และ Q ตามลำดับ และจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q
ถ้า l_1 มีสมการเป็น $x - 2y + 5 = 0$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรง l_2

1. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$
2. $(8, -1)$
3. $(1, -8)$
- *4. $(15, 0)$

Problem.9 กำหนดให้ วงรีรูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 3, 0)$ และผ่านจุด $\left(2, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงรีที่กำหนด

- *1. $(-4, 0)$
2. $\left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$
3. $(6, 0)$
4. $(0, -3\sqrt{2})$

Problem.10 กำหนดวงกลมรูปหนึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนจุดศูนย์กลาง และจุดโฟกัสด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 90x + 64y + 17 = 0$ แล้ววงกลมดังกล่าวมีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $\frac{25\pi}{4}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{25\pi}{2}$ ตารางหน่วย
3. 4π ตารางหน่วย
4. 5π ตารางหน่วย

Problem.11 กำหนดให้วงรี E มีโฟกัสทั้งสองอยู่บนวงกลม C ซึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 1$

ถ้า E สัมผัสกับ C ที่จุด $(1,0)$ แล้ว จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บน E

1. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 2. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 3. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *4. $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Problem.12 กำหนดให้ E เป็นวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุดยอดของไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = 1$

ถ้า E ผ่านจุด $(0,1)$ แล้ว จุดในข้อใดอยู่บน E

- *1. $\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 2. $(1, \sqrt{2})$ 3. $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ *4. $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Problem.13 กำหนดให้วงรีรูปหนึ่งมีสมการเป็น $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$

แล้วไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรีและผ่านจุด $(-3, 1 + \sqrt{8})$ มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $5y^2 - 4x^2 - 10\sqrt{8}y - 32x - 25 = 0$
2. $3y^2 - 2x^2 - 6\sqrt{8}y - 8x + 15 = 0$
*3. $y^2 - 4x^2 - 2y - 16x - 19 = 0$
4. $y^2 - 7x^2 - 2y - 28x - 28 = 0$

Problem.14 กำหนดให้

$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 17\}$$

$$A = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

$$B = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 = 1\}$$

ถ้า $p \in S \cap A$ และ $q \in S \cap B$ แล้วระยะทางน้อยสุดที่เป็นไปได้ระหว่างจุด p และ q เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $3\sqrt{2} - 4$ 2. $3\sqrt{2} - 2$ 3. $2\sqrt{3} - 2$ 4. $2\sqrt{3} - 3$

Problem.15 ให้เส้นตรง $x - y + 2 = 0$ ตัดกับวงกลม $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ ที่จุด A และจุด B ถ้า (a, b) เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $y = 2$ เป็นแกนของพาราโบลาและพาราโบลานี้ผ่านจุด A และจุด B แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{4}$ 2. $\frac{9}{4}$ 3. $\frac{7}{4}$ *4. $\frac{5}{4}$

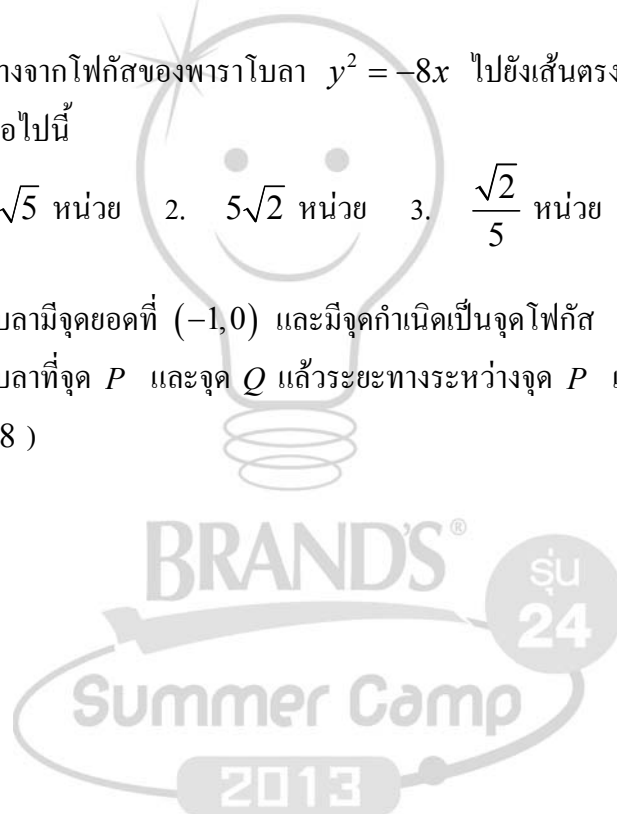
Problem.16 ถ้าเส้นตรงหนึ่งผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา $y^2 - 4y + 4x = 0$ และตัดเส้นไดเรกทริกซ์ที่จุด (a, b) แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 5 *3. 6 4. 7

Problem.17 ระยะทางจากโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = -8x$ ไปยังเส้นตรง $2x + y = 6$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

*1. $2\sqrt{5}$ หน่วย 2. $5\sqrt{2}$ หน่วย 3. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ หน่วย 4. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ หน่วย

Problem.18 พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(-1, 0)$ และมีจุดกำเนิดเป็นจุดโฟกัส ถ้าเส้นตรง $y = x$ ตัดพาราโบลาที่จุด P และจุด Q แล้วระยะทางระหว่างจุด P และจุด Q เท่ากับเท่าใด (ตอบ 8)



ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

1. ผลคูณคาร์ทีเซียน

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a,b) ทั้งหมดโดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$

2. ความสัมพันธ์

- ความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียน ซึ่งได้จากการเลือกคู่อันดับที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ความสัมพันธ์กำหนดไว้
- $r \subset A \times B$ แทน r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
- $r \subset A \times A$ แทน r เป็นความสัมพันธ์ใน A
- จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก A ไป B เท่ากับ $2^{n(A) \times n(B)}$

3. ฟังก์ชัน

- ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ r ที่ x ไปจับคู่กับ y ได้เพียงตัวเดียว
- ฟังก์ชันจาก A ไป B เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B
เขียนแทนด้วย $f : A \longrightarrow B$
JUM !..... ฟังก์ชันจาก A ไป B ให้ตรวจสอบแค่โดเมนว่า **ต้องใช้หมด** ($D_f = A$) ก็พอ
- ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ A และเรนจ์คือ B
เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$
JUM !..... ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ให้ตรวจสอบทั้ง โดเมน และ เรนจ์ ว่า **ต้องใช้หมด**
- ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ที่สำหรับ x_1, x_2 ใดๆ ใน A
ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

4. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

นิยาม ให้ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมน คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของกลุ่มลำดับใน f เขียนแทนด้วย D_f

เรนจ์ คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของกลุ่มลำดับใน f เขียนแทนด้วย R_f

การหาโดเมนและเรนจ์ด้วยการจัดรูป

ขั้นที่ 1 ต้องจัดรูปสมการโดย	ขั้นที่ 2 เมื่อจัดรูปเสร็จจะตรวจโดย
หาโดเมน $\Rightarrow$ จัด y ใน เทอม $x \dots (y = ?x)$	1. ส่วนต้องไม่เท่ากับศูนย์
หาเรนจ์ $\Rightarrow$ จัด x ใน เทอม $y \dots (x = ?y)$	2. ในรากที่คู่ต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
อธิบาย y ใน เทอม x คือมี y เพียงตัวเดียว	3. กำลังที่เป็นคู่ต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
	4. ค่าสัมบูรณ์ต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

5. ฟังก์ชันประกอบ

- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ โดย $f \circ g$ จะหาได้เมื่อ $R_g \cap D_f = \emptyset$
- $D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g \text{ และ } f(x) \in D_f\}$

6. ฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชันผกผันของ f จะหาได้ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน 1-1

ให้ $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \text{เทอมของ } x\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid \text{เปลี่ยน } x \text{ เป็น } y \text{ เปลี่ยน } y \text{ เป็น } x\}$

$f^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid y = \text{เทอมของ } x\}$

สมบัติของฟังก์ชันผกผัน

1. $D_f = R_{f^{-1}}$, $R_f = D_{f^{-1}}$
2. กราฟของ f^{-1} จะสมมาตรของกราฟ f เมื่อเทียบกับเส้นตรง $y = x$
3. $(fog)^{-1} = (g^{-1}of^{-1})(x)$ เมื่อ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
4. $(fof^{-1})(x) = x$
 $(f^{-1}of)(x) = x$

$$\left. \begin{array}{l} (f \circ f^{-1})(x) = x \\ (f^{-1} \circ f)(x) = x \end{array} \right\} \rightarrow \text{สรุปได้ว่า } g(x) = f^{-1}(x)$$
5. ถ้า $f(\square) = \Delta$ จะได้ $\square = f^{-1}(\Delta)$ เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

7. พีชคณิตของฟังก์ชัน

คือ การนำฟังก์ชันมา บวก ลบ คูณ หารกัน ภายใต้เงื่อนไขของ x เงื่อนไขของ x ที่ทำให้พีชคณิตของฟังก์ชันหาค่าได้ คือ

1. $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$
2. $D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\}$

พีชคณิตของฟังก์ชัน

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(fg)(x) = f(x)g(x)$
4. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1

เรื่อง ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

Problem.1 กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

$$\text{และให้ } f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + a^2x - 75}{x^5 + b^2x - 270} \text{ เมื่อ } a, b \in I$$

ถ้า $A = \{(a, b) \in I \times I \mid f(3) = 0\}$ และ

$$B = \{(a, b) \in I \times I \mid \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} < 3\}$$

แล้วสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 8)

Problem.2 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง โดยที่

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4} \text{ และ } g(x) = \sqrt{f(x)} - \sqrt{x-1}$$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_g = (2, \infty)$

ข. ค่าของ $x > 0$ ที่ทำให้ $g(x) = 0$ มีเพียง 1 ค่า เท่านั้น

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก ถูก และ ข ถูก
2. ก ถูก แต่ ข ผิด
3. ก ผิด แต่ ข ถูก
- *4. ก ผิด และ ข ผิด

Problem.3 กำหนดให้ $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y = -1\}$

ถ้า $a, b > 0$ และ $a \in D_r$, $b \in R_r$ แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2.5
- *2. 3
3. 3.5
4. 4

Problem.4 กำหนดให้ $S = [-2, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in S \times S \mid x^2 + 2y^2 = 2\}$ ช่วงในข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นสับเซตของ $D_r - R_r$

1. $(-1.4, -1.3)$
2. $(-1.3, -1.2)$
3. $(1.2, 1.4)$
- *4. $(1.4, 1.5)$

Problem.5 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ความสัมพันธ์ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1. ความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x = \sqrt{4 - y^2} \text{ และ } xy \geq 0\}$
- *2. ความสัมพันธ์ $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } xy > 0\}$
3. ความสัมพันธ์ $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid |x| - |y| = 1\}$
4. ความสัมพันธ์ $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid |x - y| = 1\}$

Problem.6 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid x \in [-1, 1] \text{ และ } y = x^2\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $r^{-1} = \{(x, y) \mid x \in [0, 1] \text{ และ } y = \pm\sqrt{|x|}\}$

ข. กราฟของ r และกราฟของ r^{-1} ตัดกันที่ 2 จุด

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก ถูก และ ข ถูก
2. ก ถูก แต่ ข ผิด
3. ก ผิด แต่ ข ถูก
4. ก ผิด และ ข ผิด

Problem.7 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 25x^4 + 16y^2 + 2 = 10x^2 + 8y\}$

เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ข. $D_r \neq R_r$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก ถูก และ ข ถูก
2. ก ถูก แต่ ข ผิด
- *3. ก ผิด แต่ ข ถูก
4. ก ผิด และ ข ผิด

Problem.8 กำหนดให้ $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $x \neq 1$

ถ้า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $f(\sec^2 x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $\sin^2 \theta$
2. $\cos^2 \theta$
3. $\tan^2 \theta$
4. $\cot^2 \theta$

Problem.9 กำหนดให้ $y_1 = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 1

$$y_2 = f(y_1), y_3 = f(y_2), \dots$$

$$y_n = f(y_{n-1}) \text{ สำหรับ } n = 2, 3, 4, \dots$$

$y_{2553} + y_{2010}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{x-1}{x+1}$ *2. $\frac{x^2+1}{x-1}$ 3. $\frac{x^2+1}{2x}$ 4. $\frac{1+2x-x^2}{x-1}$

Problem.10 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติสอดคล้องกับ $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq -1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(f(x)) = -x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
 2. $f(-x) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 1$
 3. $f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 0$
 *4. $f(-2-x) = -2-f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

Problem.11 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $xf(x) + f(1-x) = 2x - x^2$ เมื่อ $x \in R$

แล้วค่าของ $\sum_{x=25}^{54} (x + f(x))$ เท่ากับข้อใด (ตอบ 30)

Problem.12 กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

ถ้า $f: I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติดังนี้

1. $f(1) = 1$
 2. $f(2x) = 4f(x) + 6$
 3. $f(x+2) = f(x) + 12x + 12$

แล้วค่าของ $f(7) + f(16)$ เท่ากับข้อใด (ตอบ 911)

Problem.13 ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และให้ $f : I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่

$$f(n+1) = f(n) + 3n + 2 \text{ สำหรับ } n \in I$$

ถ้า $f(-100) = 15,000$ แล้ว $f(0)$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 50)

Problem.14 ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = 2f(x)$ แล้ว $gof(3) + fog^{-1}(3)$ มีค่าเท่าใด
(ตอบ 7.5)

Problem.15 ถ้า $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = \frac{x}{1+x}$ แล้ว $(f^{-1} + g^{-1})(2)$ เท่ากับเท่าใด
(ตอบ 6)

Problem.16 กำหนดให้ $f(x) = 3x - 1$ และ $g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

ค่าของ $f^{-1}(g(2) + g(-8))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$ 2. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ 3. $\frac{1-\sqrt{2}}{-3}$ 4. $\frac{1+\sqrt{2}}{-3}$

Problem.17 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง โดยที่
 $f(x) = \frac{x+3}{x+6}$ และ $(f^{-1}og)(x) = \frac{-6x}{x-1}$ ถ้า $g(a) = 2$ แล้ว a อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[-1,1)$ 2. $[1,3)$ *3. $[3,5)$ 4. $[5,7)$

Problem.18 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า f_1, f_2, f_3, f_4, g และ h เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R โดยที่

$$f_1(x) = x + 1 \qquad f_2(x) = x - 1$$

$$f_3(x) = x^2 + 4 \qquad f_4(x) = x^2 - 4$$

$$(f_1og)(x) + (f_2oh)(x) = 2$$

$$\text{และ } (f_3og)(x) - (f_4oh)(x) = 4x$$

ค่าของ $(goh)(1)$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 1)

ฟังก์ชันเอกเนนเชียล และลอการิทึม

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

บทนิยาม ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ ฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

โดย $0 < a < 1$ แล้ว จะเป็นฟังก์ชันลด

โดย $a > 1$ แล้ว จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

และ $a^x > 0$ เสมอ

การแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล

รูปแบบ	วิธีการแก้โจทย์
1) $a^x = a^y$	$x = y$
2) $a^x = b^x$	$x = 0$
3) $ax^2 + bx + c = 0$	กำหนดตัวแปร และแยกตัวประกอบ
4) สมการมากกว่า 3 พจน์	กำหนดตัวแปร และดึงตัวร่วม
3) $a^x = b^y$	ต้อง take log หรือวาดกราฟช่วย

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

จะต้องพิจารณาฐานก่อนที่จะปลดฐานของเอกซ์โพเนนเชียลออก เพื่อที่จะได้อสมการจำนวนจริงแบบปกติทั่วไป

ซึ่งจะแบ่งออกได้ 2 แบบ ดังนี้

- ถ้า $0 < a < 1$ แสดงว่าเป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นเวลาตัดฐานออก อสมการกลับข้าง
- ถ้า $a > 1$ แสดงว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นเวลาตัดฐานออก อสมการคงเดิม

Note ถ้าฐานไม่เท่าแต่เลขชี้กำลังเท่า ถ้าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ต้องจับฐานมากกว่า 0
 ถ้าเป็นฟังก์ชันลด ต้องจับฐานน้อยกว่า 0
 ถ้าฐานไม่เท่าและเลขชี้กำลังไม่เท่า ต้อง take log หรือ วาดกราฟช่วย

ฟังก์ชันลอการิทึม

บทนิยาม ฟังก์ชันลอการิทึม คือ $f = \{(x, y) \in R^+ \times R | y = \log_a x, a > 0, a \neq 1\}$

- ตัวเลขหลัง log ต้องมากกว่า 0 เสมอ

- $x = a^y$ สมมูลกับ $y = \log_a x$

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึมมีดังต่อไปนี้

เมื่อ a, M, N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
4. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
5. $a^{\log_a M} = M$
6. $\log_a M^k = k \log_a M$
7. $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$
8. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
9. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
10. $\ln x = \log_e x = \frac{\log x}{\log e}$; $e \approx 2.7188...$
11. $\log_b a \log_a x = \log_b x$
12. ถ้า $\log_b \log_a x = c$ จะได้ $x = a^{b^c}$
13. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

การคำนวณค่าลอการิทึม

การคำนวณค่าลอการิทึมแบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ

1. การใช้สมบัติของ $\log$ ช่วยหาค่า $\log$
2. การเปิดตาราง $\log$

การใช้สมบัติของ $\log$ ช่วยหาค่า $\log$

ข้อตกลง เฉพาะ $\log_{10} x$ จะสามารถเขียนแทนได้ $\log x$

ค่า $\log$ ที่ควรรู้

$$\log 1 = 0$$

$$\log 6 = \log 2 + \log 3$$

$$\log 2 = 0.3010$$

$$\log 7 = 0.845$$

$$\log 3 = 0.4731$$

$$\log 8 = 3 \log 2$$

$$\log 4 = 2 \log 2$$

$$\log 9 = 2 \log 3$$

$$\log 5 = 1 - \log 2$$

$$\log 10 = 1$$

หลักการแก้สมการลอการิทึม

1. ถ้าสามารถจัดสมการให้อยู่ในรูป $\log_a \Delta = \log_a \square$ แล้วปลด $\log$ จะได้ $\Delta = \square$
2. ถ้าสามารถจัดสมการให้อยู่ในรูป $\log_a \square = \Delta$ เปลี่ยนให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลังจะได้ $a^\Delta = \square$
3. ถ้าสมการนั้นมีหลายจำนวนที่ฐานต่างกัน ให้พยายามเปลี่ยนเป็นฐานเดียวกัน นิยมเปลี่ยนเป็นฐานสิบ
4. เนื่องจาก $\log_a x = y$ มีข้อจำกัดว่า $a > 0, a \neq 1$ และ $x \in R^+$ ดังนั้นเมื่อแก้สมการแล้ว ต้องตรวจสอบคำตอบของสมการทุกครั้งว่าสอดคล้องกับข้อจำกัดดังกล่าวหรือไม่

หลักการแก้สมการลอการิทึม

การแก้สมการ $\log$ จะมีหลักการแก้เหมือนสมการเอกซ์โปเนนเชียลทุกประการ คือ ก่อนจะปลด $\log$ จะต้องพิจารณาฐานก่อน ซึ่งจะแบ่งออกได้ 2 แบบ ดังนี้

1. ถ้า $0 < a < 1$ แสดงว่าเป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นเวลาตัดฐานออก สมการกลับข้าง
2. ถ้า $a > 1$ แสดงว่าเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นเวลาตัดฐานออก สมการคงเดิม

ข้อควรจำ เนื่องจากหลัง $\log$ ต้องเป็นบวก ดังนั้นหลังจากการแก้สมการจำนวนจริงแล้ว จะต้องนำไปอินเตอร์เซกชันกับสมการหลัง $\log$ ที่เป็นบวกด้วย

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1

เรื่อง ฟังก์ชันเอกโพเนนเชียล และลอการิทึม

Problem.1 ถ้า $4^{x-y} = 128$ และ $3^{2x+y} = 81$ แล้วค่าของ y เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 *2. -1 3. 1 4. 2

Problem.2 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ ให้

$$C = \left\{ x \in R \mid (3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2 + 4x + 1)} = 1 \right\}$$

จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด (ตอบ 5)

Problem.3 ถ้า $x > 0$ และ $8^x + 8 = 4^x + 2^{x+3}$ แล้ว ค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[0,1)$ *2. $[1,2)$ 3. $[2,3)$ 4. $[3,4)$

Problem.4 กำหนดให้ $x, y > 0$ ถ้า $x^y = y^x$ และ $y = 5x$ แล้วค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[0,1)$ *2. $[1,2)$ 3. $[2,3)$ 4. $[3,4)$

Problem.5 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$A = \left\{ x \in R \mid \left(\frac{1}{2} \right)^{2x^2 + 3x + 7} < \left(\frac{1}{4} \right)^{2x + 11} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in R \mid \frac{x^2 - 6x + 5}{x + 1} \geq 0 \right\}$$

$B \cap A'$ เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \in R \mid -1 \leq x < 0\}$ *2. $\{x \in R \mid -1 \leq x < 2\}$
 3. $\{x \in R \mid 0 \leq x < 1\}$ 4. $\{x \in R \mid 0 \leq x < 3\}$

Problem.6 กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก และ $y \neq 1$

ถ้า $\log_y 2x = a$ และ $2^y = b$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใด

- *1. $\frac{1}{2}(\log_2 b)^a$ 2. $2(\log_2 b)^a$ 3. $\frac{a}{2}(\log_2 b)$ 4. $2a(\log_2 b)$

Problem.7 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ ถ้า

$$B = \left\{ x \in R \mid \log_2(-x^2 + 7x - 10) + 3\sqrt{\cos(\pi\sqrt{x^2 + 7})} - 1 = 1 \right\}$$

แล้วผลบวกของสมาชิกในเซต B เท่ากับเท่าใด (ตอบ 3)

Problem.8 กำหนดให้ $a, b, c > 1$ ถ้า $\log_a d = 30$, $\log_b d = 50$ และ $\log_{abc} d = 50$

แล้วค่าของ $\log_c d$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 75 2. 90 3. 120 4. 150

Problem.9 กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1

ถ้า $(\log_b a)(\log_d c) = 1$ แล้ว

ค่าของ $a^{(\log_b c - 1)} b^{(\log_c d - 1)} c^{(\log_d a - 1)} d^{(\log_a b - 1)}$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 1)

Problem.10 ถ้า a, b, c เป็นรากของสมการ $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

แล้ว $\log_{27} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{9}$ 2. $\frac{1}{3}$ *3. $\frac{2}{3}$ 4. 1

Problem.11 ค่าตอบของสมการ $\log_{\sqrt{2}}(4-x) = \log_2(9-4x) + 1$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[-10, -6]$ 2. $[-6, -2]$ *3. $[-2, 2]$ 4. $[2, 6]$

Problem.12 กำหนด $\log_y x + 4\log_x y = 4$ แล้ว $\log_y x^3$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 6)

Problem.13 ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[0, 4)$ 2. $[4, 8)$ *3. $[8, 12)$ 4. $[12, 16)$

Problem.14 รากที่มีค่าน้อยที่สุดของสมการ $2^{\log(x-2)} \cdot 2^{\log(x-3)} = 2^{\log 2}$ มีค่าเท่าใด (ตอบ 4)

Problem.15 ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $3^{2x+2} - 28(3^x) + 3 = 0$

B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log x + \log(x-1) = \log(x+3)$

แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 *2. 2 3. 3 4. 4

Problem.16 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $3^{5x} \cdot 9^{x^2} = 27$

และ $y = \frac{(\log_2 3)(\log_4 5)(\log_6 7)}{(\log_4 3)(\log_6 5)(\log_8 7)}$ ค่าของ x^y เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{8}$ *2. $\frac{1}{8}$ 3. -27 4. 27

Problem.17 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ ถ้า

$$A = \left\{ x \in R \mid 3^{2x} - 34(15^{x-1}) + 5^{2x} = 0 \right\} \text{ และ }$$

$$B = \left\{ x \in R \mid \log_5 \left(5^{\frac{1}{x}} + 125 \right) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x} \right\}$$

แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ตอบ 4)

Problem.18 ถ้า A แทนเซตคำตอบ $2(\log_3 x - 1)^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + 4 > 0$

แล้วเซต A เป็นสับเซตของสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

1. $(0,3)$ 2. $(1,4)$ 3. $(2,5)$ *4. $(2,9)$

Problem.19 เซตคำตอบของสมการ $72^x + 72 < 2^{3x+3} + 3^{2x+2}$ เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

1. $(\log_8 7, \log_9 8)$ *2. $(\log_9 8, \log_8 9)$
3. $(\log_8 9, \log_7 8)$ 4. $(\log_9 10, \log_8 9)$

ตรีโกณมิติ

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวตรีโกณมิติ

Co – function

$$1. \sin A = \cos(90^\circ - A)$$

$$2. \tan A = \cot(90^\circ - A)$$

$$3. \sec A = \operatorname{cosec}(90^\circ - A)$$

สูตรพื้นฐานของตรีโกณมิติ

กำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริง

$$1. \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$2. \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \text{ เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$3. \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

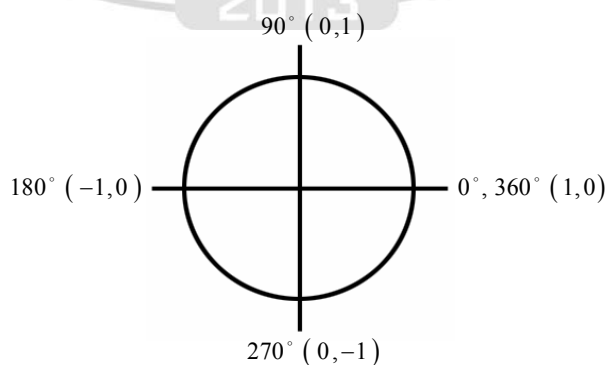
$$4. \text{ ถ้า } \cos \theta \neq 0 \text{ แล้ว } \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$5. \text{ ถ้า } \sin \theta \neq 0 \text{ แล้ว } \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติในวงกลม 1 หน่วย

ค่า $\sin$ คือ ค่า y

ค่า $\cos$ คือ ค่า x



มุม อัตราส่วนตรีโกณ	$0^\circ, 360^\circ$	90°	180°	270°
sin	0	1	0	0
cos	1	0	-1	1
tan	0	หาค่าไม่ได้	0	0
cosec	หาค่าไม่ได้	1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
sec	1	หาค่าไม่ได้	-1	1
cot	หาค่าไม่ได้	0	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้

ผลสรุป เครื่องหมาย $\pm$ ของฟังก์ชัน

- จาก $y = \sin \theta$ ดังนั้น $\sin \theta$ จะเป็น
บวกเฉพาะในจตุภาคที่ 1, 2
- จาก $x = \cos \theta$ ดังนั้น $\cos \theta$ จะเป็น
บวกเฉพาะในจตุภาคที่ 1, 4
- จาก $\frac{y}{x} = \tan \theta$ ดังนั้น $\tan \theta$ จะเป็น
บวกเฉพาะในจตุภาคที่ 1, 3

แนะวิธีสังเกตว่ามุมที่โจทย์ให้อยู่ในควอดรันต์ที่เท่าใดอย่างรวดเร็ว

จะอยู่ในควอดรันต์ที่ 2 เมื่อใกล้ π หรือ เมื่อใกล้ π
จะอยู่ในควอดรันต์ที่ 3 เมื่อเกิน π นาน้อย หรือ เมื่อเกิน π นาน้อย
จะอยู่ในควอดรันต์ที่ 4 เมื่อใกล้ 2π หรือ เมื่อใกล้ π

3. สูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สูตรผลบวก – ผลต่าง

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม n เท่า

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 2 เท่า	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม ครึ่งเท่า
$\begin{aligned} \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\ &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \\ \cos 2A &= \cos^2 A + \sin^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \\ &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \\ \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \\ \tan \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \end{aligned}$
	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของ มุม 3 เท่า
	$\begin{aligned} \sin 3A &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \\ \cos 3A &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \\ \tan 3A &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \end{aligned}$

สูตรผลคูณผลบวกของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สูตรผลคูณ	สูตรผลบวก
$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$	$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B$	$\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$	$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B$	$\cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

สูตรผลต่างกำลังสอง

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \cos^2 B$$

สูตรยุบสามมุม

$$\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan A \tan C}$$

ถ้า $A+B+C = 90^\circ$ แล้ว $\tan A \tan B + \tan A \tan C + \tan B \tan C = 1$

ค่าต่ำสุด – สูงสุดของ $a \sin Ax + b \cos Ax$

เจอ $a \sin Ax + b \cos Ax$ ควรจัดรูป เป็น $a \sin Ax + b \cos Ax = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(Ax + \theta)$

โดยค่าต่ำสุดของ $a \sin Ax + b \cos Ax$ คือ $-\sqrt{a^2 + b^2}$

ค่าสูงสุดของ $a \sin Ax + b \cos Ax$ คือ $\sqrt{a^2 + b^2}$

4. ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ)

เราจำกัดโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อให้เป็นฟังก์ชันดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน x	เรนจ์ y (มุม)
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \operatorname{arccosec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arctan x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \operatorname{arcsec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \operatorname{arccot} x$	R	$[0, \pi]$

ฟังก์ชันอินเวอร์สตรีโกณของ $(-x)$

$\operatorname{arc} F(-\theta)$
1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$
2. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$
3. $\arctan(-x) = -\arctan x$ เมื่อ $x \in R$
4. $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$ เมื่อ $x \in R$
5. $\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$ เมื่อ $x \leq -1 \cup x \geq 1$
6. $\operatorname{arccsc}(-x) = -\operatorname{arccsc} x$ เมื่อ $x \leq -1 \cup x \geq 1$

สูตรของฟังก์ชันเอกลักษณ์

$f: A \rightarrow B$ จะได้ $(f \circ f^{-1})(x) = x$ ทุก $x \in B$ $f: A \rightarrow B$ จะได้ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ ทุก $x \in A$	
1. $\sin(\arcsin x) = x$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$	1. $\arcsin(\sin x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
2. $\cos(\arccos x) = x$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$	2. $\arccos(\cos x) = x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$
3. $\tan(\arctan x) = x$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$	3. $\arctan(\tan x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
4. $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$	4. $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ เมื่อ $0 < x < \pi$
5. $\sec(\operatorname{arcsec} x) = x$ เมื่อ $x \leq -1 \cup x \geq 1$	5. $\operatorname{arcsec}(\sec x) = x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$; $x \neq \frac{\pi}{2}$
6. $\csc(\operatorname{arccsc} x) = x$ เมื่อ $x \leq -1 \cup x \geq 1$	6. $\operatorname{arccsc}(\csc x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; $x \neq 0$

กลุ่มอินเวอร์สการคูณ

$$\arcsin x = \operatorname{arccosec} \frac{1}{x} \quad \arccos x = \operatorname{arcs ec} \frac{1}{x} \quad \arctan x = \operatorname{arc cot} \frac{1}{x}$$

สูตรของกลุ่ม Co-Function

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \quad \operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccosec} x = \frac{\pi}{2}$$

สมบัติการยุบ arc

- $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ เมื่อ $xy < 1$
- $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \pi$ เมื่อ $xy > 1$, $x > 0$, $y > 0$
- $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \pi$ เมื่อ $xy > 1$, $x < 0$, $y < 0$

5. การแก้สามเหลี่ยม

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ จะได้

กฎของไซน์

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

กฎของโคไซน์

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Ohmtinore Tip กฎของโคไซน์และไซน์ ต่างก็เป็นสูตรที่ใช้หาความยาวของด้านและมุมของสามเหลี่ยมได้ทั้งคู่ แต่ถ้าเราหัดสังเกตจะแยกออกเองได้ว่า ควรเลือกใช้สูตรใดจึงจะดี ดังนี้

กฎของโคไซน์		กฎของไซน์
หาด้าน	1. ด้าน 2 ด้าน 2. มุมตรงข้ามกับด้านที่ต้องการหา	1. มุมตรงข้ามที่ต้องการหา 2. ด้านและมุมที่อยู่ตรงข้ามกัน 1 คู่
หามุม	1. ต้องรู้ด้านพร้อมกันทั้ง 3 ด้าน	1. ด้านตรงข้ามมุมที่ต้องการหา 2. ด้านและมุมที่อยู่ตรงกัน 1 คู่

- ข้อเสนอแนะ
1. หาด้าน จะใช้กฎของโคไซน์ เมื่อรู้ด้านมากกว่ามุม
จะใช้กฎของไซน์ เมื่อรู้มุมมากกว่าด้าน
 2. หามุม จะพบว่าโจทย์ส่วนใหญ่จะใช้กฎของโคไซน์

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง ตรีโกณมิติ

Problem.1 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการ

$$5(\sin a + \cos a) + 2 \sin a \cos a = 0.04$$

ค่าของ $125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75 \sin a \cos a$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 1)

Problem.2 ถ้า $1 - \cot 20^\circ = \frac{x}{1 - \cot 25^\circ}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด (ตอบ 2)

Problem.3 ค่าของ $\log_2(1 + \tan 1^\circ) + \log_2(1 + \tan 2^\circ) + \dots + \log_2(1 + \tan 44^\circ)$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 22)

Problem.4 ถ้า $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ แล้วค่าของ $\sin 2\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{13}$ 2. $\frac{9}{13}$ *3. $\frac{4}{9}$ 4. $\frac{13}{9}$

Problem.5 ถ้า $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{3}{2}$ และ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ แล้ว $\arccos(\tan 3\theta)$ มีค่าเท่าใด (ตอบ 0)

Problem.6 ค่าของ $\left(\frac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ} - \frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ} \right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 1 *3. 2 4. -2

Problem.7 ถ้า $\sin 15^\circ$ และ $\cos 15^\circ$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + ax + b = 0$ แล้วค่าของ $a^4 - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 1 *3. 2 4. $1 + 3\sqrt{2}$

Problem.8 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\sin x + \cos x = a$ และ $\sin x - \cos x = b$

แล้วค่าของ $\sin 4x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}(a^3b - ab^3)$
2. $\frac{1}{2}(ab^3 - a^3b)$
3. $a^3b - ab^3$
- *4. $ab^3 - a^3b$

Problem.9 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos B = \frac{5}{3}$

ค่าของ $\cos C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $\frac{16}{65}$
2. $-\frac{16}{65}$
3. $\frac{48}{65}$
4. $-\frac{33}{65}$

Problem.10 ค่าของ $\frac{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ} - \frac{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}$ เท่ากับข้อใด (ตอบ 2)

Problem.11 กำหนดให้ $(\sin 1^\circ)(\sin 3^\circ)(\sin 5^\circ) \dots (\sin 89^\circ) = \frac{1}{2^n}$ ค่าของ $4n$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 178)

Problem.12 ค่าของ $\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ}$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 0.5)

Problem.13 ให้ A เป็นเซตคำตอบของ $\cos x = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ จำนวนสมาชิกในเซต $A \cap (0, 24\pi)$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 20)

Problem.14 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$ แล้วค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{15} + \arccos(x^2)\right)$ อยู่ในช่วงใด

1. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
2. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- *4. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

Problem.15 ให้ α และ β เป็นมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

$$\text{ถ้า } \cos\left(\arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right) + \sin\left(\arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right) = 1$$

แล้ว $\sin \beta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบ 0.5)

Problem.16 ให้ $-1 \leq x \leq 1$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2552}$

แล้วค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{2552}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2x$ *2. $1-2x^2$ 3. $2x^2-1$ 4. $-2x$

Problem.17 ถ้า $\arcsin(5x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\tan(\arcsin x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $\frac{1}{5}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4. $\frac{1}{2}$

Problem.18 ค่าของ $\frac{\tan\left[\arccot \frac{1}{5} - \arccot \frac{1}{3} + \arctan \frac{7}{9}\right]}{\sin\left[\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13}\right]}$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 1)

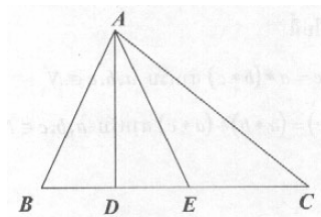
Problem.19 ค่าของ $\cot(\arccot 7 + \arccot 13 + \arccot 21 + \arccot 31)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{4}$ *2. $\frac{13}{4}$ 3. $\frac{9}{2}$ 4. $\frac{25}{2}$

Problem.20 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม A เท่ากับ 60° , $BC = \sqrt{6}$ และ $AC = 1$ ค่าของ $\cos 2B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *4. $\frac{3}{4}$

Problem.21 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม



ถ้ามุม $\hat{ABC} = 30^\circ$, $\hat{BAC} = 135^\circ$ และ AD , AE แบ่งมุม $\hat{BAC}$ ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆกัน แล้ว $\frac{EC}{BC}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4. $\sqrt{2}$

Problem.22 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีด้าน AB ยาว $\sqrt{2}$ หน่วย

ถ้า $BC^3 + AC^3 = 2BC + 2AC$ แล้ว $\cot C$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- *1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. $\sqrt{3}$

Problem.23 ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า a , b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และ มุม C ตามลำดับ แล้ว $\frac{1}{a}\cos A + \frac{1}{b}\cos B + \frac{1}{c}\cos C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$ 2. $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$
 3. $\frac{(a+b+c)^2}{2abc}$ 4. $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$

Problem.24 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีความยาวตรงข้ามมุม A , B และ C เป็น a , b และ c หน่วยตามลำดับ ถ้า $a^2 + b^2 = 31c^2$ แล้วค่าของ $3\tan C(\cot A + \cot B)$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 0.2)

เมทริกซ์

1. ชนิดของเมทริกซ์ที่น่าสนใจ

เมทริกซ์	นิยาม
เมทริกซ์จัตุรัส Square matrix	เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก
เมทริกซ์ศูนย์ Zero matrix $\underline{0}$	เมทริกซ์สมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์
เมทริกซ์เอกลักษณ์ Identity matrix I_n	เมทริกซ์เฉียงชนิดหนึ่งที่สมาชิกทุกตัวในเส้นทแยงมุมหลักจะต้องเป็นหนึ่ง
เมทริกซ์เอกฐาน Singular matrix	เมทริกซ์จัตุรัสที่ค่าของ $\det = 0$
เมทริกซ์มิใช่เอกฐาน Non- Singular matrix	เมทริกซ์จัตุรัสที่ค่าของ $\det \neq 0$

2. ความรู้พื้นฐานของเมทริกซ์

การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์เท่ากันก็ต่อเมื่อ มีมิติเดียวกัน และสมาชิกทุกตำแหน่งเท่ากัน

การบวก – ลบของเมทริกซ์

เมทริกซ์ที่บวก – ลบ กันได้ต้องมีมิติเท่ากัน นำสมาชิก ณ ตำแหน่งเดียวกันมาบวก – ลบ กัน

การคูณเมทริกซ์

- การคูณเมทริกซ์ด้วยค่าคงที่ ทำโดย นำค่าคงที่คูณไปในทุกสมาชิก
- การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ คูณได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวตั้งเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวคูณ และผลคูณที่ได้จะมีมิติเท่ากับ

“แถวของเมทริกซ์ตัวตั้ง (ตัวตั้ง) $\times$ หลักของเมทริกซ์ตัวคูณ”

- สมบัติเกี่ยวกับการคูณของเมทริกซ์

ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่บวก ลบ และคูณกันได้ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสแล้ว $A^n = A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A$
2. $AI = IA = A$ (I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์)
3. $k(AB) = (kA)B = A(kB) = (AB)k$
4. $(AB)C = A(BC)$
5. $A(B+C) = AB+AC$
6. $(A+B)C = AC+BC$
7. $(kA)^n = k^n \cdot A^n$
8. AB อาจจะเท่ากันหรือไม่เท่ากับ BA ก็ได้
9. ถ้า $AB=0$ แล้ว $A=0$ หรือ $B=0$ หรือ $A, B=0$
10. $AB=AC$ ไม่จำเป็นที่ $B=C$
11. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

เมทริกซ์ทรานสโพส (A^t) คือ เมทริกซ์ที่มีการสับแถวเป็นหลัก หรือ สลับหลักเป็นแถว

สมบัติของเมทริกซ์ทรานสโพส

1. $(A \pm F)^t = A^t \pm F^t$ เมื่อ F เป็น $m \times n$ เมทริกซ์
2. $(AB)^t = B^t A^t$
3. $(ABC)^t = C^t B^t A^t$
4. $(cA)^t = c A^t$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
5. $(A^t)^t = A$
6. $(A^t)^n = (A^n)^t$

3. ดีเทอร์มิแนนต์

ดีเทอร์มิแนนต์ (det) คือ ค่าสำเร็จ (ตัวเลข) ที่ได้จากการคำนวณเมทริกซ์จัตุรัสด้วยกระบวนการทางคณิตศาสตร์ การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ (det) ทำได้ 2 แบบ

1. ใช้สูตรเฉพาะ (1×1) , (2×2) และ 3×3 มิติ
2. ใช้สูตรมาตรฐาน (ใช้ได้กับเมทริกซ์จัตุรัสทุกชนิดแต่หาได้ยุ่งยาก ดังนั้นควรใช้กับเมทริกซ์ที่มากกว่า 3×3 มิติ)

สูตรเฉพาะบทนิยาม การหา $\det(1 \times 1)$, (2×2) และ (3×3) มิติ

1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ 1×1 ซึ่ง $A = [a]$ แล้ว $\det(A) = |a| = a$

2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 ซึ่ง $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

3. ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ แล้ว

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

JUM! คุณลงเครื่องหมายเหมือนเดิม คุณลงเครื่องหมายตรงข้าม

การหาค่า $\det(A)$ โดยการกระจายโคแฟกเตอร์

1. $\det(A) =$ แถวของ A คูณกับแถวของ Cofactor A หรือ
2. $\det(A) =$ หลักของ A คูณกับหลักของ Cofactor A โดยที่ $\text{Cofactor } [A] = [(-1)^{i+j} M_{ij}]$

คำศัพท์ที่ควรรู้จักเพิ่มเติม

1. Minor (ไมเนอร์)

กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ มิติ โดยที่ $n \geq 2$

ไมเนอร์ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และ หลักที่ j เขียนแทนไมเนอร์ของ a_{ij} ด้วย $M_{ij}(A)$

JUM! ไมเนอร์ คือ $\det$ ที่เกิดจากการตัดแถวตัดหลัก

2. โคแฟกเตอร์ (Cofactor)

กำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส $n \times n$ มิติ โดยที่ $n \geq 2$

โคแฟกเตอร์ (Cofactor) ของ a_{ij} คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ $M_{ij}(A)$

เขียนแทนโคแฟกเตอร์ ของ a_{ij} ด้วย $C_{ij}(A)$ หรือ $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$

JUM! ไมเนอร์ใส่ประจุ โดยแถว + หลัก เป็นจำนวนคู่ จะเป็นบวก

โดยแถว + หลัก เป็นจำนวนคี่ จะเป็นลบ

3. โคแฟกเตอร์เมทริกซ์ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นโคแฟกเตอร์

4. เมทริกซ์ผกผัน ($\text{adj}(A)$) คือ โคแฟกเตอร์เมทริกซ์ ทรานสโพส

คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

สำหรับโจทย์ที่ซับซ้อนแล้วการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์อาจทำได้หลายวิธี การรู้จักนำคุณสมบัติมาใช้จะทำให้การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ทำได้ง่ายขึ้น ซึ่งเราจะแบ่งคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ออกเป็น 2 กลุ่ม ดังนี้

1. แบบ Micro (แบบดูสมาชิกภายใน)
2. แบบ Macro (แบบไม่ดูสมาชิกภายใน)

แบบ Micro	แบบ Macro
1. ถ้าสลับสองแถวหรือสองหลักของเมทริกซ์แล้วค่าของ $\det$ จะเป็นค่าตรงข้ามเดิม 2. ถ้าเมทริกซ์ มีแถว หรือ หลักใดเป็นจำนวนเท่ากัน $\det = 0$ 3. นำค่าคงที่คูณแถวหรือ หลักของเมทริกซ์ $\det$ จะต้องถูกคูณด้วยค่าคงที่นั้นเท่านั้นครั้งด้วย 4. นำค่าคงที่คูณหลักหรือแถวใดแล้วนำไปบวกที่แถวหรือหลักหนึ่ง ค่า $\det$ จะเท่าเดิม	กำหนดให้ A, B เป็นเมทริกซ์ $n \times n$ ใดๆ และ $k \in R$ 1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 2. $\det(A^t) = \det(A)$ 3. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ 4. $\det(kA) = k^n \det(A)$ 5. $\det(A^n) = [\det(A)]^n$

4. การหาตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์

สูตรเฉพาะ ($1 \times 1, 2 \times 2$ มิติ)	สูตรมาตรฐาน ($n \times n$ มิติ)
1. ถ้า $A = [a]$ โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว $A^{-1} = \left[\frac{1}{a} \right]$ 2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $\det A \neq 0$ แล้ว $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$	$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$ $\text{adj}(A)$ คือ เมทริกซ์ผกผันของ A (adjoint A) $\text{adj}(A) = [\text{cof.}(A)]^t$

รูปแบบประยุกต์ของตัวผกผัน

สูตรการหาตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ A^{-1}	สูตรที่ออกข้อสอบปัจจุบัน
$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$	1. $\text{adj}(A) = \det(A) A^{-1}$ 2. $A \text{adj}(A) = [\det(A)]I$ 3. $\det(\text{adj}(A)) = [\det(A)]^{n-1}$ 4. $\text{adj}(\text{adj}(A)) = [\det A]^{n-2} \cdot A$

5. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์สามารถทำได้ 3 วิธี

1. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยอินเวอร์สการคูณ
2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยกฎของคราเมอร์ (ใช้ดีเทอร์มิแนนต์)
3. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยกฎของเกาส์ (การดำเนินการตามแถว)

หลักการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธี
1. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยอินเวอร์สการคูณ เขียนสมการเชิงให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$ หาอินเวอร์สการคูณของ A นำ A^{-1} คูณจะได้คำตอบ $X = A^{-1}B$
2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยกฎของคราเมอร์ เขียนสมการเชิงให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$ หาคำตอบโดยหาค่า $\det$ $x = \frac{\det x}{\det A}$ $y = \frac{\det y}{\det A}$ $z = \frac{\det z}{\det A}$
3. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยกฎของเกาส์ เขียนสมการเชิงให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเต็ม $[A:B]$ ใช้การดำเนินการตามแถวหาคำตอบ $[I:C]$ การดำเนินการตามแถว $A \sim B$ คือ - สลับแถวได้ - คูณค่าคงตัวกับแถวได้ - นำค่าคงตัวคูณกับแถวอื่น แล้วบวกกับแถวที่จะเปลี่ยนได้

6. การหาตัวผกผันของเมทริกซ์จากวิธีการดำเนินการตามแถว

กำหนดเมทริกซ์ A ที่มีมิติ $n \times n$ โดยที่ $\det(A) \neq 0$ แล้ว จะสามารถใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อหาตัวผกผันของเมทริกซ์

$[A : I_n]$ ใช้การดำเนินการตามแถวจัดรูปจนได้ $[I_n : B]$
จะได้ว่า $B = A^{-1}$

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง เมทริกซ์

Problem.1 ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } 3 \begin{bmatrix} 5^a & b \\ 2^c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^a & 6 \\ d-1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5^a+b \\ 2^c & 2d \end{bmatrix}$$

แล้วค่าของ $b+c$ เท่ากับข้อใด (ตอบ 4)

Problem.2 ให้ x, y, z และ w สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -1 \\ z & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix}$$

ค่าของ $4w - 3z + 2y - x$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 6)

Problem.3

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ค่าของ $\det(2A' + BC^2 + B'C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 0 *3. 2 4. 6

Problem.4

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 และ $\det(A) = 4$ ถ้า I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์และ $A - 3I$ เป็นเมทริกซ์ของฐาน แล้ว $\det(A + 3I)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 6 3. 13 *4. 26

Problem.5

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 โดยที่

$$2A - B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ และ } A - 2B = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ค่าของ $\det(A^4 B^{-1})$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 32)

Problem.6 กำหนดให้ X เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

แล้วค่าของ $\det(2X'(X + X'))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ตอบ 396)

Problem.7 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \operatorname{cosec} 10^\circ & \sqrt{3} \\ \sec 10^\circ & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos^2 70^\circ & \sin 40^\circ \\ 0 & \cos^2 50^\circ \end{bmatrix}$ และ

$$C = \begin{bmatrix} \cos^2 20^\circ & 0 \\ \sin 80^\circ & \cos^2 10^\circ \end{bmatrix}$$

ค่าของ $\det[A(B + C)]$ เท่ากับข้อใด (ตอบ 3)

Problem.8 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่ง $2A - B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ และ $A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

แล้ว $(AB)^{-1}$ คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Problem.9 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$

ถ้า $A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ แล้วค่าของ xyz เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

*1. -3 2. -1 3. 0 4. 1

Problem.10 กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็มและ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มี $\det A = 3$

ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 โดยที่ $BA + BA^{-1} = 2I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณมิติ 2×2 แล้วค่าของ $\det B$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[1, 2]$ 2. $[-1, 0]$ *3. $[0, 1]$ 4. $[-2, -1]$

Problem.11 ให้ a, b, c, d, t เป็นจำนวนจริง

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $\det A = t \neq 0$ และ $\det(A + t^2 A^{-1}) = 0$

แล้วค่าของ $\det(A - t^2 A^{-1})$ เท่ากับข้อใด (ตอบ 4)

Problem.12 กำหนดให้ $A^T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ สมาชิกในแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ A^{-1} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{2}{3}$ 2. -2 *3. $\frac{2}{3}$ 4. 2

Problem.13 กำหนดให้ x, y, z สอดคล้องกับระบบสมการ

$$2x - 2y - z = -5$$

$$x - 3y + z = -6$$

$$-x + y - z = 4$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- *1. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 2. $x + y + z = 2$
3. $xyz = 6$ 4. $\frac{xy}{z} = -2$

Problem.14 กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ สอดคล้องกับสมการ $AX = C$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ถ้า } (2A + B)X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ แล้ว } a + b + c \text{ มี}$$

ค่าเท่ากับเท่าใด

1. 3 2. 6 *3. 9 4. 12

เวกเตอร์

1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเวกเตอร์

- ปริมาณที่สนใจขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์
ปริมาณที่สนใจทั้งขนาด และ ทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์
- $\overline{AB}$ เป็นสัญลักษณ์ แทนเวกเตอร์ AB โดยมีจุดเริ่มต้นที่ A และ จุดสิ้นสุดที่ B
โดยใช้ $|\overline{AB}|$ แทนขนาดของเวกเตอร์ AB
- เวกเตอร์ขนานกันก็ต่อเมื่อทั้งสองมีทิศทางเดียวกัน หรือทิศทางตรงกันข้าม
- เวกเตอร์เท่ากันก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้งสอง มีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\vec{u} = \vec{v}$
- นิเสธของเวกเตอร์ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกัน เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$

2. การบวก – ลบ เวกเตอร์

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ เลื่อน $\vec{v}$ ให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$
ผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} + \vec{v}$ คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดเริ่มต้น
ของ $\vec{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$

เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

ผลลบของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ หมายถึง ผลบวกของ $\vec{u}$ และนิเสธของ $\vec{v}$ เขียนแทน
ด้วยนั่นคือ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

3. หลักการทำโจทย์เวกเตอร์ในระนาบใดๆ

1. เริ่มทำจากการบวกลบเวกเตอร์ด้วยการเชื่อมอักษร

การบวกลบเวกเตอร์แบบเชื่อมตัวอักษรเป็นสิ่งที่จำเป็น เพราะจะทำให้เราคิดโจทย์ได้รวดเร็วขึ้น ซึ่งทำได้อย่างรวดเร็วดังนี้

1.1 การบวกเวกเตอร์ (พยายามหาคู่เชื่อม.....) ตัดตัวซ้ำทิ้งและจะได้ผลลัพธ์คือ น....ล

1.2 การลบเวกเตอร์

ถ้าสลับตัวอักษรแบบนิเสธแล้วมีคู่เชื่อมซึ่งสามารถทำให้บวกกันได้ง่าย

ถ้าเริ่มต้นที่จุดเดียวกัน

ตัดตัวซ้ำทิ้งและจะได้ผลลัพธ์คือ ล....น

2. ใช้รูปที่โจทย์กำหนดเป็นตัวช่วย

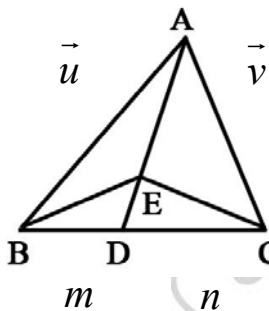
3. ใช้ข้อกำหนดที่โจทย์ให้เป็นตัวช่วย

4. ใช้ความรู้หรือกฎทางเรขาคณิตเข้าช่วยคิด

Note

1. ผลรวมของรูปปิดต้องเป็นเวกเตอร์ศูนย์ ($\vec{0}$)

2. จุดแบ่งภายในของรูปสามเหลี่ยม



$$\vec{AD} = \frac{1}{m+n}(n\vec{u} + m\vec{v})$$

3. โจทย์กำหนดสมการของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ และมีเงื่อนไขว่า

1. ถ้า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ ให้เราจัดรูปสมการให้เหลือ $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ แล้วสรุปค่า k โดย

1.1 มีทิศทางเดียวกัน จะได้ว่า $k > 0$

1.2 ไม่ระบุทิศทาง จะได้ว่า $k \neq 0$

1.3 มีทิศทางตรงกันข้าม จะได้ว่า $k < 0$

2. ถ้า $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ ให้เราจัดรูปสมการให้เป็น $a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v}$

จะได้ว่า $a=0$ และ $b=0$

4. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

4.1 การสร้างเวกเตอร์

การสร้างเวกเตอร์ 2 มิติ

ถ้ากำหนดจุด 2 จุด คือ $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2, z_2)$ เราสามารถสร้างเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

$$\text{ได้จาก } \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

การสร้างเวกเตอร์ 3 มิติ

ถ้ากำหนดจุด 2 จุด คือ $A(x_1, y_1, z_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เราสามารถสร้างเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

$$\text{ได้จาก } \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

4.2 พิษัณณณของเวกเตอร์

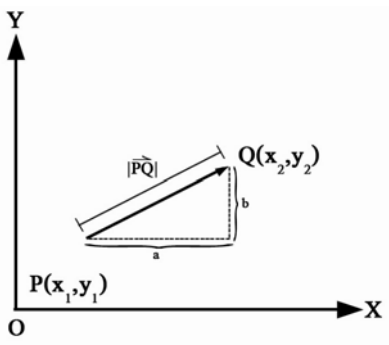
บพณณณ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก สองมณณ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก สามมณณ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ กั้ต่อเมื่อน $a = c$ และ $b = d$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ กั้ต่อเมื่อน $a = d, b = e$ และ $c = f$
การบวก เวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	เวกเตอร์ศูนย์ กั้คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	เวกเตอร์ศูนย์ กั้คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วย สเกลาร์	$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ เมื่อน α เป็นจำนวนจรงใด ๆ	$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$ เมื่อน α เป็นจำนวนจรงใด ๆ

4.3 การขนานกันของเวกเตอร์

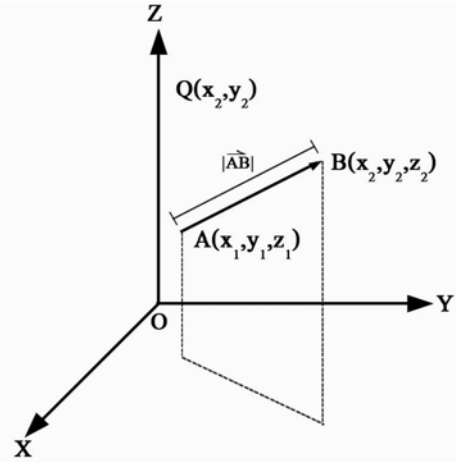
$\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกันก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง c ทำให้ $\vec{u} = c\vec{v}$ เมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

4.4 ขนาดของเวกเตอร์ในสองมิติ และสามมิติ

สองมิติ

	1. ถ้ากำหนดจุด 2 จุด จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ $ \overrightarrow{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 2. ถ้ากำหนดมาเป็นเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $ \overrightarrow{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$
---	--

สามมิติ

	1. ถ้ากำหนดจุด 2 จุด จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ $ \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ 2. ถ้ากำหนดมาเป็นเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $ \overrightarrow{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
---	--

4.5 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน สองมิติ และสามมิติ

ชนิด	สูตร
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน สองมิติ ($\overline{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$)	$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน สามมิติ ($\overline{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$)	$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

5. ผลคูณเชิงสเกลาร์

1. ถ้า $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ และ $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

2. ถ้า $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ และ $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$

คุณสมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสองมิติ หรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$
4. $0 \cdot \vec{u} = 0$
5. $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ และ $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

สูตรของเวกเตอร์

ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ แล้ว

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

Note เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกัน เมื่อ $\vec{u} \perp \vec{v}$

ขนาดกำลังสอง

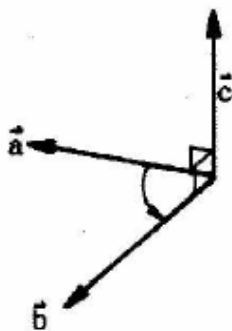
$$1. \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

$$1. |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

$$2. |\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

6. ผลคูณเชิงเวกเตอร์

6.1



ผลลัพธ์ของ $\vec{u} \times \vec{v}$ คือ $\vec{c}$ ซึ่งคือเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

6.2 ถ้า $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ แล้ว $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ (คิดเหมือนการหา det)

6.3

คุณสมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ และ k เป็นจริงใดๆ จะได้ว่า

1.1 $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

1.2 $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

1.3 $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

1.4 $\vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$

1.5 $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$

1.6 $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

1.7 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

1.8 $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

1.9 $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

1.10 $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

6.4 สูตรของเวกเตอร์ในสามมิติ

ถ้า $\vec{u} \neq 0$ และ $\vec{v} \neq 0$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$; $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ จะได้ว่า

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$$

Note

$$1. |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u}|$$

$$2. |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

7. การประยุกต์เวกเตอร์

เวกเตอร์สามมิติสามารถนำมาใช้หาพื้นที่และปริมาตรได้ดังนี้

$$1. \text{พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี } \vec{u} \text{ และ } \vec{v} \text{ เป็นด้านประกอบ} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$2. \text{พื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มี } \vec{u} \text{ และ } \vec{v} \text{ เป็นด้านประกอบ} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$3. \text{ปริมาตรของกล่องทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี } \vec{u}, \vec{v} \text{ และ } \vec{w} \text{ เป็นด้านประกอบ}$$

$$= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$4. \vec{u}, \vec{v} \text{ และ } \vec{w} \text{ อยู่ในระนาบเดียวกันเมื่อ } \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง เวกเตอร์

Problem.1 กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน, M เป็นจุดบนด้าน AD

ซึ่ง $\overline{AM} = \frac{1}{5} \overline{AD}$ และ N เป็นจุดบนเส้นทแยงมุม AC ซึ่ง $\overline{AN} = \frac{1}{6} \overline{AC}$

ถ้า $\overline{MN} = a\overline{AB} + b\overline{AD}$ แล้ว $a+b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{1}{5}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. 1

Problem.2 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี D เป็นจุดบนด้าน AC และ F เป็นจุดบน

ด้าน AC ถ้า $\overline{AD} = \frac{1}{4} \overline{AC}$, $\overline{BF} = \frac{1}{3} \overline{BC}$ และ $\overline{DF} = a\overline{AB} + b\overline{BC}$

แล้ว $\frac{a}{b}$ มีค่าเท่าใด (ตอบ 9)

Problem.3 กำหนดให้ $A(a,b)$, $B(4,-6)$ และ $C=(1,-4)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม

ABC ถ้า P เป็นจุดบนด้าน AB ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A เท่ากับ $\frac{3}{5}$ ของระยะระหว่าง

A และ B และเวกเตอร์ $\overline{CP} = \vec{i} + 2\vec{j}$ แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 3)

Problem.4 ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ กำหนดโดย

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{v} = 2\vec{i} - d\vec{j} + \vec{k}, \vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 3$, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ เมื่อ q, r

เป็นจำนวนจริง และ $\vec{w}$ ขนานกับ $-\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$ แล้วหาค่าของ

$a + 4b + 2c$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 3)

Problem.5 กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$

ให้ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ โดยที่ $\vec{u} \cdot \vec{w} = -11$ และ $\vec{v} \cdot \vec{w} = 8$ ถ้า θ เป็นมุมแหลมที่เวกเตอร์ $\vec{w}$

ทำมุมกับเวกเตอร์ $5\vec{i} + \vec{j}$ แล้ว $\tan \theta + \sin 2\theta$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 2)

Problem.6

กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \neq |\vec{u}| |\vec{v}|$

ถ้า $a(\vec{v} - 2\vec{u}) + 3\vec{u} = b(2\vec{u} + \vec{v})$ แล้วค่าของ a อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ *2. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 3. $\left[1, \frac{3}{2}\right)$ 4. $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$

Problem.7

กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย

ถ้าเวกเตอร์ $\vec{u} + 2\vec{v}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $2\vec{u} + \vec{v}$ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $-\frac{4}{5}$ 2. 0 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{3}{5}$

Problem.8

ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ กำหนดโดย $\vec{a} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - 3\vec{k}$

และ $\vec{b} = -3\vec{p}\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

เมื่อ p เป็นจำนวนจริง ถ้า $\vec{a}$ ตั้งฉากกับ $\vec{b}$ และ ขนาดของ $\vec{b}$ เท่ากับ 3 แล้วค่าของ p อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ *2. $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 3. $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 4. $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

Problem.9

กำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ โดยที่ $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 3$ และ $\vec{u}$ ทำมุม 60°

กับ $\vec{v}$ ค่าของ $\frac{|\vec{u} + \vec{v}|}{|2\vec{u} - \vec{v}|}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{\frac{13}{19}}$ *2. $\sqrt{\frac{13}{7}}$ 3. 1 4. $\sqrt{\frac{7}{19}}$

Problem.10

ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบและ x, y เป็นจำนวนจริง

โดยที่ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ และ $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$

ถ้า $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$ และ $5x + 5y = 21$

แล้วค่าของ $\vec{u} \cdot \vec{w}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 *2. 6 3. 10 4. 14

Problem.11

กำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ โดยที่ $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$, $|\vec{v}| = 3$, $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$

ค่าของ $|\vec{u} + \vec{v}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{6}$ *2. $\sqrt{10}$ 3. $\sqrt{13}$ 4. 4

จำนวนเชิงซ้อน

ความรู้พื้นฐานของจำนวนเชิงซ้อน

1. การสร้างจำนวนเชิงซ้อน (Construction of Complex Number)

กำหนดให้ $i = \sqrt{-1}$ และ i ถูกเรียกว่าหนึ่งหน่วยจินตภาพ (Unit of imaginary)

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $Z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
เรียก a ว่าส่วนจริง (real part) ของ Z และแทนด้วย $\text{Re}(Z)$
เรียก b ว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ Z และแทนด้วย $\text{Im}(Z)$

จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนได้ถึง 4 แบบ คือ

Normal	Coordinate	Polar	Engineer
$Z = a + bi$	$Z = (a, b)$	$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$	$Z = r \angle \theta$

การหาค่าของ i^n

การหาค่าของ i^n แบบทั่วไป

ให้เอาเลขชี้กำลัง n หารด้วย 4 ถ้า
เหลือเศษ 1 แล้วค่าของ $i^n = i$
เหลือเศษ 2 แล้วค่าของ $i^n = 1$
เหลือเศษ 3 แล้วค่าของ $i^n = -i$
ลงตัวพอดี แล้วค่าของ $i^n = 1$

การหาผลบวกของ

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$1. i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0 \text{ เสมอ}$$

$$2. i^n \cdot i^{n+1} \cdot i^{n+2} \cdot i^{n+3} = -1 \text{ เสมอ}$$

พีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $Z_1 = a + bi$

$$Z_2 = c + di$$

1. การบวก $Z_1 + Z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

2. การลบ $Z_1 - Z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

3. การคูณค่าคงที่ $kZ_1 = k(a + bi) = ka + kbi$

4. การคูณ $Z_1 \cdot Z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

5. การหาร $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $Z = a + bi$ สังยุคของ Z จะคือ $\bar{Z}$

$$\bar{Z} = a - bi \text{ และ } Z \cdot \bar{Z} = a^2 + b^2$$

อินเวอร์สการคูณจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $Z = a + bi$ อินเวอร์สการคูณของ Z จะคือ Z^{-1}

$$Z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

ค่าสัมบูรณ์จำนวนเชิงซ้อน

ค่าสัมบูรณ์ (absolute value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$

คือ จำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a + bi|$

คุณสมบัติที่ต้องจำ

กฎของ BOX	กฎของ BAR
1. $ Z_1 + Z_2 \leq Z_1 + Z_2 $	1. $\overline{(Z_1 + Z_2)} = \overline{(Z_1)} + \overline{(Z_2)}$
2. $ Z_1 - Z_2 \geq Z_1 - Z_2 $	2. $\overline{(Z_1 - Z_2)} = \overline{(Z_1)} - \overline{(Z_2)}$
3. $ Z_1 \cdot Z_2 = Z_1 \cdot Z_2 $	3. $\overline{(Z_1 \cdot Z_2)} = \overline{(Z_1)} \cdot \overline{(Z_2)}$
4. $\left \frac{Z_1}{Z_2} \right = \frac{ Z_1 }{ Z_2 } ; Z_2 \neq 0$	4. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)} = \frac{\overline{(Z_1)}}{\overline{(Z_2)}} ; \overline{(Z_2)} \neq 0$
5. $ Z^n = Z ^n$	5. $\overline{(Z^n)} = (\overline{Z})^n$

รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน (Square Roots of Complex Number)

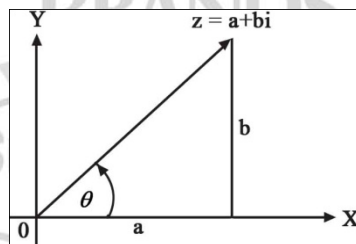
กำหนดให้ $Z = a + bi$ เราสามารถหารากที่สองของ Z ได้ ซึ่งจะมีหลักการดังนี้

1. หา $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. รากที่สองของ Z คือ $\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right)$ เมื่อ $b \geq 0$

หรือ $\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}}i \right)$ เมื่อ $b < 0$

2. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Polar Form of Complex Numbers)



เมื่อกำหนดให้ θ เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดซึ่งวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overline{OZ}$ และ $r = |\overline{OZ}|$ แทนระยะทางระหว่างจุดกำเนิด O กับ Z จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

1. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. $a = r \cos \theta$ และ $b = r \sin \theta$

3. $\tan \theta = \frac{b}{a}$. หรือ $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

ดังนั้นจึงอาจเขียนจำนวนเชิงซ้อน Z ได้ในรูปแบบใหม่เป็น (3 รูปแบบ)

$$1. \quad Z = a + bi \quad \text{รูปแบบ normal}$$

$$2. \quad Z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{รูปแบบ polar}$$

$$3. \quad Z = r \operatorname{cis} \theta \quad \text{รูปแบบ อย่างย่อ}$$

และจะเรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์ (argument) ของ Z

พีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ทฤษฎีบท ให้ $Z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 \angle \theta_1$

และ $Z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 \angle \theta_2$ โดยที่ $Z_2 \neq 0$ แล้ว

$$1. \quad Z_1 Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

$$2. \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) = \frac{1}{r_2} \angle -\theta_2$$

$$3. \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

$$4. \quad \bar{Z}_1 = r_1 [\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)] = r_1 \angle -\theta_1$$

$$5. \quad Z_1^n = r_1^n [\cos(n\theta_1) + i \sin(n\theta_1)] = r_1^n \angle n\theta_1$$

3. การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน (The n^{th} Roots of Complex Numbers)

หลักการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

$$1. \quad \text{แค่หารากค่าตอบที่ 1 ซึ่งคือ } z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \operatorname{cis} \left(\frac{\theta}{n} \right)$$

2. คำตอบต่อๆ มาหาได้โดยแบ่ง 2π ออกตามจำนวนราก และบวกทบจากมุมของราก
หลักไปเรื่อยๆ จนครบ n ราก

4. สมการพหุนาม (Polynomial Equation)

ทฤษฎีบทจำนวนคำตอบ

ถ้า $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรี $n \geq 1$ แล้ว สมการ $p(x) = 0$ จะมีคำตอบทั้งหมด n คำตอบ (นับคำตอบที่ซ้ำกันด้วย)

ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

กำหนด $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 จะได้ว่าพหุนาม $p(x)$ มี $x - c$ เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ

กำหนด $p(x)$ พหุนามในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบพหุนาม $p(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m หาร a_n ลงตัว และ k หาร a_0 ลงตัว

ทฤษฎีบท ถ้าจำนวนเชิงซ้อน Z เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ โดยสัมประสิทธิ์ $a_1, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงแล้วสังยุค $\bar{Z}$ จะเป็นคำตอบของสมการพหุนามนี้ด้วย

จากทฤษฎีบท ดังกล่าว เราจะได้ว่า ถ้า $a + bi$ เป็นคำตอบ แล้ว $a - bi$ เป็นคำตอบด้วย

โดยสมการที่มี $a + bi$ และ $a - bi$ คือ $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

Problem.1 ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z_1^{-1} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ เมื่อ $i^2 = -1$ และ $5z_1 + 2z_2 = 5$ แล้ว $\bar{z}_2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $3 - 2i$ 2. $3 + 2i$ 3. $1 - 2i$ *4. $1 + 2i$

Problem.2 ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ และ $\bar{z}_2$ แทนสังยุค (conjugate)

ของ z_2 ถ้า $5z_1 + 2z_2 = 5$ และ $\bar{z}_2 = 1 + 2i$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้วค่าของ $|5z_1^{-1}|$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 5)

Problem.3 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ

$$z^2 = \frac{2+i}{2-i} + \frac{3+4i}{1+2i} + \frac{5+15i}{3-i} \text{ เมื่อ } i = \sqrt{-1} \text{ แล้วค่าสัมบูรณ์ของ } z \text{ เท่ากับ } \sqrt{37}$$

ข. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{-5+2i}{x+yi} = \frac{10}{i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} \text{ แล้วค่าของ } x+y = 15$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก ถูก และ ข ถูก 2. ก ถูก แต่ ข ผิด
3. ก ผิด แต่ ข ถูก *4. ก ผิด และ ข ผิด

Problem.4 กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1 + z_2|^2 = 5$

และ $|z_1 - z_2|^2 = 1$ ค่าของ $|z_1|^2 + |z_2|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 *3. 3 4. 4

Problem.5 กำหนดให้ a, b และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|a| \neq |b|$, $|a| \neq 1$

และ $|b| \neq 1$ ถ้า $|az + b| = |\bar{b}z + \bar{a}|$ แล้ว $|z|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

Problem.6 ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ โดยที่ $|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$
และ $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$ ค่าของ $\frac{|11\bar{z}_1| - |5z_2|}{|z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2|}$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 2)

Problem.7 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n = 1$ เมื่อ $i^2 = -1$
แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบ 8)

Problem.8 กำหนดให้ x, z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $\bar{w} = z - 2i$ และ $|w|^2 = z + 6$
ถ้าอาร์กิวเมนต์ของ w อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ และ $w = a + bi$ เมื่อ a, b
เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด (ตอบ 4)

Problem.9 ถ้า $x - 1 + i$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x) = x^3 + ax^2 + 4x + b$ เมื่อ a, b
เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 17 *2. 13 3. 8 4. 5

Problem.10 กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $z^2 + z + 1 = 0$
เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต S

1. $\{-\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ, \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\}$
2. $\{\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ, -\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\}$
3. $\{-\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ, -\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ\}$
*4. $\{\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ, -\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ\}$

Problem.11 กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับ $z^3 - 2z^2 + 2z = 0$ และ $z \neq 0$
ถ้าอาร์กิวเมนต์ของ z อยู่ในช่วง $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ แล้ว $\frac{z^4}{(\bar{z})^2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

*1. $-2i$ 2. $1 - i$ 3. $1 + i$ 4. $2i$

ความน่าจะเป็น

1. กฎการนับเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

หลักในการเลือกใช้หลักการนับ

1. จะใช้หลักการบวก ใช้เมื่องานเสร็จสิ้นแล้ว

หากการทำงานให้เสร็จมีหลายแบบ ให้แยกคิดแต่ละวิธีด้วยกฎการคูณ (ทำงานให้เสร็จ – ก่อน) แล้วจึงนำมาบวกกัน เป็นวิธีทั้งหมดที่ทำได้

2. จะใช้หลักการคูณ ใช้เมื่องานยังไม่เสร็จสิ้นแล้ว

โดยจำนวนวิธีการทำงานให้เสร็จ = ผลคูณของทางเลือกในแต่ละขั้นตอนย่อยๆ

2. กฎพื้นฐานที่ใช้ในการคิด

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n! = n \times (n-1)!$$

$$0! = 1$$

3. การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

1. เราต้องทราบว่า การเรียงสับเปลี่ยนจะถือว่า ลำดับมีความสำคัญ

ดังนั้น หยิบก่อน หยิบหลัง ตำแหน่งสลับกัน จะถือว่าเป็นวิธีใหม่ทันที

เช่น AB ไม่เหมือน BA

2. จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยเรียงคราวละ r สิ่ง

$$(1 \leq r \leq n) \text{ จะได้เท่ากับ } P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

3. จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยเรียงทั้งหมดเป็นเส้นตรงจะได้เท่ากับ $n!$ วิธี

Note

1. ของติดกัน

เราควรมัดของที่ต้องการให้ติดกันเป็น 1 สิ่ง (ถ้าของต่างกัน ต้องสลับที่ภายในมัดด้วย)

2. ของแยกกัน (ไม่ให้ติดกัน)

ตัวที่ไม่มีปัญหา ก่อน แล้วให้ตัวปัญหาที่ไม่ยอมติดกัน (ให้พวกไว้ปัญหาเป็นตัวกันไม่ให้ติดกัน)

4. การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด (การเรียงของซ้ำ)

ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนนี้มี n_1 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง
มี n_2 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง ... มี n_k สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k

โดยที่ $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนกลุ่มของสิ่งของ n สิ่งเท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

5. การเรียงของเป็นวงกลม 2, 3 มิติ

1. จำนวนเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี ... 2 มิติ
2. จำนวนเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง (พลิกได้) เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี 3 มิติ

6. การจัดหมู่ (การเลือก)

1. เราต้องทราบว่า การจัดหมู่จะถือว่า ลำดับไม่มีความสำคัญ (ดูผลสุดท้ายที่เดียว)

ดังนั้น หยิบก่อน หยิบหลัง ตำแหน่งสลับกัน จะถือว่าเหมือนกัน

เช่น AB จะเหมือนกับ BA

2. จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกคราวละ r สิ่ง ($0 \leq r < n$)

เท่ากับ $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$ วิธี

Note การเลือกของอย่างน้อยหนึ่งสิ่งจาก n สิ่ง มี $2^n - 1$ วิธี

7. การแบ่งโดยมีความแตกต่างระหว่างกลุ่ม

มีของแตกต่างกัน n สิ่ง แบ่งเป็น k กลุ่มๆ ละ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ สิ่ง โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มจะเท่ากับ $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$

8. ความน่าจะเป็นและกฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

- การทดลองสุ่ม คือ การกระทำที่รู้ล่วงหน้าว่าผลที่จะเกิดจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่บอกไม่ได้ว่าเมื่อกระทำขึ้นมาจริงๆ แล้ว ผลที่ออกมาจะเป็นอย่างไร
- แซมเปิลสเปซ คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่อาจจะเป็นไปได้ทั้งหมดจากการทดลองสุ่ม
- เหตุการณ์ คือ สับเซตของแซมเปิลสเปซ

ประเด็นที่ควรรู้ต่อมา เพราะสิ่งของมีเป็นจำนวนมาก จนไม่สามารถเขียนแบบแจกแจง

จำนวนแซมเปิลสเปซ $n(S)$ หาได้ด้วยวิธีการนับอย่างอิสระ

จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ $n(E)$ หาได้ด้วยวิธีการนับอย่างมีเงื่อนไข

ความน่าจะเป็น

บทนิยาม ถ้า S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มอย่างหนึ่ง ซึ่งแต่ละจุดตัวอย่างของการทดลองมีโอกาสเกิดเท่าๆ กัน และ E แทนเหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย $P(E)$ ซึ่ง

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

เมื่อ $n(E)$ แทนจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ E

$n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง S

สมบัติของความน่าจะเป็น

1. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ใดๆ จะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 เสมอ นั่นคือ $0 \leq P(E) \leq 1$
 $P(E) = 0$ หมายความว่า เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย
 $P(E) = 1$ หมายความว่า เหตุการณ์ E จะเกิดขึ้นอย่างแน่นอน
2. ความน่าจะเป็นของปริภูมิตัวอย่าง S มีค่าเท่ากับ 1 นั่นคือ $P(S) = 1$
3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นเซตว่างมีค่าเท่ากับ 0 นั่นคือ $P(\emptyset) = 0$

สรุป ความน่าจะเป็นจะแบ่งโจทย์ออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ๆ คือ

1. กลุ่มความน่าจะเป็นที่อาศัยกฎความน่าจะเป็น
2. กลุ่มความน่าจะเป็นที่อาศัยหลักการนับ

กลุ่มความน่าจะเป็นที่อาศัยกฎความน่าจะเป็น

กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น ถ้าสังเกตให้ดีจะพบว่ามันคล้ายกับเซตทุกประการ กฎกลุ่มนี้จึงเป็นกฎที่เราคุ้นเคยกันอยู่แล้วไม่จำเป็นต้องเสียเวลาท่องเพิ่ม แต่ขอให้ใส่ใจทำโจทย์กลุ่มนี้ด้วยเพราะจะออกข้อสอบทุกปี

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง ซึ่งเป็นเซตจำกัด และ A, B เป็นเหตุการณ์ใดๆ

กฎข้อที่ 1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

กฎข้อที่ 2 ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

กฎข้อที่ 3 $P(A') = 1 - P(A)$

กฎข้อที่ 4 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

กฎข้อที่ 5 $\sum P(E) = 1$ เสมอ

กลุ่มความน่าจะเป็นที่อาศัยหลักการนับ

การทำโจทย์กลุ่มนี้ต้องอาศัยพื้นฐานเรื่องการนับทั้งหมดเข้าช่วยคิด ซึ่งเราทราบว่า

$n(E)$ คือ หาได้ด้วยวิธีการนับอย่างมีเงื่อนไข

$n(S)$ คือ หาได้ด้วยวิธีการนับอย่างอิสระ

$$\text{ความน่าจะเป็น } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

9. ทฤษฎีบททวินาม

ถ้า x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

จากการกระจายทวินาม เราได้ข้อสรุปดังนี้

1. จำนวนพจน์ของการกระจายจะมีจำนวนเท่ากับ $n + 1$ พจน์
2. การจะหาเฉพาะพจน์ที่สนใจ ทำได้จากสูตร การหาพจน์ที่ r ดังนี้

$$T_{r+1} = \binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$
3. $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม
4. ผลรวมของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรทุกพจน์จะหาได้ง่าย ๆ โดยการตัวแปรด้วยเลข 1
 เช่น $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$
5. เมื่อนำสัมประสิทธิ์ทวินามมาเรียงตามลำดับพจน์ จะได้ สามเหลี่ยมปาสคาล ดังนี้

การกระจาย	สัมประสิทธิ์				
$(x + y)^0$	1				
$(x + y)^1$	1	1			
$(x + y)^2$	1	2	1		
$(x + y)^3$	1	3	3	1	
$(x + y)^4$	1	4	6	4	1
$\vdots$					$\vdots$

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง ความน่าจะเป็น

Problem.1 ต้องการสร้างจำนวนคู่บวก 4 หลักจากเลขโดด 0 , 1 , 2 , 3 , 7 , 8 โดยแต่ละจำนวนที่สร้างขึ้นไม่มีเลขโดดในหลักใดที่ซ้ำกันเลย จะมีจำนวนวิธีที่สร้างได้เท่ากับข้อใด (PAT1 ก.ค. 52)

1. 180 *2. 156 3. 144 4. 136

Problem.2 กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ จำนวนเต็มที่มีค่าน้อยกว่า 300 โดยสร้างมาจากตัวเลขในเซต A และตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน (ตอบ 44)

Problem.3 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ เซต $S = \{f \mid f: A \rightarrow B \text{ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง}\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 2. 24 *3. 36 4. 39

Problem.4 คณะกรรมการชุดหนึ่งมี 7 คน ประกอบด้วย ประธาน รองประธาน เลขานุการ และกรรมการอีก 4 คน จำนวนวิธีที่จัดกลุ่ม 7 คนนี้แบ่งประชุมรอบโต๊ะกลม โดยให้ประธาน และรองประธานนั่งติดกันเสมอ เลขานุการไม่นั่งติดกับรองประธานเท่ากับข้อใด (ตอบ 192)

Problem.5 คุณลุง คุณป้า ลูกชาย และลูกสาว มาเยี่ยมครอบครัวเรา ซึ่งมี 4 คน คือ คุณพ่อ คุณแม่ ตัวฉัน และน้องชาย ในการจัดที่นั่งรอบโต๊ะอาหารกลมที่มี 8 ที่นั่ง โดยให้คุณลุงนั่งติดกับคุณพ่อ คุณป้านั่งติดกับคุณแม่ ลูกชายของคุณลุงนั่งติดกับน้องชายของฉัน และลูกสาวของคุณลุงนั่งติดกับฉัน จะมีจำนวนวิธีจัดได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 96 วิธี 2. 192 วิธี 3. 288 วิธี 4. 384 วิธี

Problem.6 ข้าวสารบรรจุถุงแล้วกองหนึ่งประกอบด้วย ข้าวหอมมะลิ 4 ถุง ข้าวเสาไห้ 3 ถุง ข้าวขาวตาแห้ง 2 ถุง และข้าวบัสมาตี 1 ถุง สุ่มหยิบข้าวจากกองนี้มา 4 ถุงความน่าจะเป็นที่จะได้ข้าวครบทุกชนิด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $\frac{4}{35}$ 2. $\frac{3}{35}$ 3. $\frac{2}{5}$ 4. $\frac{1}{4}$

Problem.7 กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ ในการสุ่มหยิบเลข n จำนวนพร้อม ๆ กันจากเซต $\{1, 2, \dots, 2n\}$ ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคู่ทั้งหมดเท่ากับ $\frac{1}{20}$ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคู่เพียง 1 จำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{20}$ 2. $\frac{3}{20}$ *3. $\frac{9}{20}$ 4. $\frac{11}{20}$

Problem.8 มีสิ่งของซึ่งแตกต่างกันอยู่ 8 ชิ้น ต้องแบ่งให้คน 2 คน คนหนึ่งได้ 6 ชิ้น และอีกคนหนึ่ง ได้ 2 ชิ้น จะมีจำนวนวิธีแบ่งกี่วิธี (ตอบ 56)

Problem.9 กำหนดให้ S เป็นแซมเปิลสเปซ และ A, B เป็นเหตุการณ์ใดๆใน S จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

ข. ถ้า $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6$ และ $P(A \cup B) = 0.7$ แล้ว

$P(A - B) = 0.4$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก ถูก และ ข ถูก *2. ก ถูก และ ข ผิด
3. ก ผิด และ ข ถูก 4. ก ผิด และ ข ผิด

Problem.10 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมๆ กัน ความน่าจะเป็นที่เป็นผลบวกของหน้าลูกเต๋าทิ้งสอง เท่ากับ 7 หรือผลคูณของหน้าลูกเต๋าทิ้งสองเท่ากับ 12 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{18}$ 2. $\frac{1}{6}$ *3. $\frac{2}{9}$ 4. $\frac{4}{9}$

Problem.11 โยนเหรียญบาท (เที่ยงตรง) หนึ่งเหรียญจำนวน 10 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ได้หัวอย่างน้อย 2 ครั้งติดกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{193}{512}$ 2. $\frac{314}{512}$ 3. $\frac{9}{64}$ *4. $\frac{55}{64}$

Problem.12 ถูบใบหนึ่งบรรจุลูกกวาดรสสตอเบอรี่ 5 ลูก รสชอคโกแลต 4 ลูก รสกาแฟ และรสมินท์อย่างละ 2 ลูก หากสุ่มหยิบลูกกวาดจากถูบนี้มา 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกกวาดต่างรสกันทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{57}{143}$ *2. $\frac{58}{143}$ 3. $\frac{59}{143}$ 4. $\frac{60}{143}$

Problem.13 ในลิ้นชักมีถุงเท้าสีขาว 4 คู่ สีดำ 3 คู่ และสีน้ำเงิน 2 คู่ แต่ไม่ได้จัดเรียงไว้เป็นคู่ๆ ถ้าสุ่มหยิบถุงเท้ามา 2 ข้าง ความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าสีเดียวกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{43}{153}$ *4. $\frac{49}{153}$

Problem.14 ถุงใบหนึ่งบรรจุเสื้อยืด 13 สี สีละ 4 ตัว โดยที่เสื้อยืดในแต่ละสี S, M, L และ XL สุ่มหยิบเสื้อจากกล่องมา 3 ตัวพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่จะได้เสื้อยืดมีสีเหมือนกัน 2 ตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- *1. $\frac{72}{425}$ 2. $\frac{72}{5525}$ 3. $\frac{3}{221}$ 4. $\frac{3}{22100}$

Problem.15 กำหนดให้ $A = \{(0, n) | n = 1, 2, \dots, 10\}$ และ $B = \{(1, n) | n = 1, 2, \dots, 10\}$

ในการเลือกจุดสองจุดที่แตกต่างกันจากเซต A และอีกหนึ่งจุดจากเซต B เพื่อเป็น จุดยอดของรูปสามเหลี่ยมบนระนาบ ความน่าจะเป็นจะได้รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- *1. $\frac{8}{45}$ 2. $\frac{9}{45}$ 3. $\frac{10}{45}$ 4. $\frac{11}{45}$

Problem.16 กิตติและสมานกับเพื่อนๆ รวม 7 คน ไปเที่ยวต่างจังหวัดด้วยกัน ในการค้างแรมที่มีบ้านพัก 3 หลังหลังแรกพักได้ 3 คน ส่วนหลังที่สองและหลังที่สามพักได้หลังละ 2 คน ซึ่งแต่ละหลังมีความแตกต่างกันพวกเขาจึงตกลงที่จะจับสลากว่าใครจะได้พักที่บ้านหลังใด ความน่าจะเป็นที่กิตติและสมานจะได้พักบ้านหลังเดียวกันในหลังที่หนึ่งหรือหลังที่สาม เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- *1. $\frac{4}{21}$ 2. $\frac{5}{21}$ 3. $\frac{8}{21}$ 4. $\frac{10}{21}$

Problem.17 มีถุงยังชีพ 5 ถุง ต้องการแจกให้ครอบครัวที่ภูคน้ำท่วม 4 ครอบครัว ครอบครัวละ ไม่เกิน 2 ถุง ความน่าจะเป็นที่ครอบครัวของสมชายซึ่งเป็นหนึ่งในครอบครัวนั้นไม่ได้รับของแจกเลย เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- *1. 0.15 2. 0.2 3. 0.4 4. 0.6

กำหนดการเชิงเส้น

สรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาการกำหนดการเชิงเส้น

ขั้นที่ 1 อ่านปัญหาหรือโจทย์ต้องรู้ว่าโจทย์ต้องการอะไรมากที่สุดหรือน้อยสุด

ให้กำหนดส่วนที่โจทย์ต้องการมากที่สุดหรือน้อยสุด เป็นสมการจุดประสงค์ (สมมติเป็น P หรือตัวแปรอื่นที่ไม่ใช่ x กับ y) พร้อมกับสร้างสมการจุดประสงค์ (P) ให้อยู่ในรูปตัวแปร x กับ y โดย x กับ y มีความสัมพันธ์กับ P ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมา มุมมองง่ายอาจจะใช้ตรงที่โจทย์ถามหาเป็นตัวชี้้นำในการสมมติ x กับ y

$$\text{สมการจุดประสงค์} \Leftrightarrow P = f(x, y)$$

ขั้นที่ 2 ต้องสร้างสมการข้อจำกัดของตัวแปร x กับ y ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดขึ้นมา

ขั้นที่ 3 นำสมการข้อจำกัดที่ได้จากข้อ 2 มาเขียนลงบนแกน xy ร่วมกัน หาส่วนที่อินเตอร์เซกกันของสมการข้อจำกัดทั้งหมด จะได้พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่มีอาณาเขตแน่นอน พร้อมกับหาจุดมุมตรงเหลี่ยมของพื้นที่ของข้อจำกัด xy

ขั้นที่ 4 หาคำตอบของ (x, y) ที่ทำให้ P สูงสุดหรือน้อยสุด คำตอบที่ต้องการจะอยู่ที่จุดมุมตรงเหลี่ยมของรูปหลายเหลี่ยมที่ได้จากข้อ 3 นำจุดเหล่านั้นมาหา P แล้วเปรียบเทียบค่า P ที่ได้ว่าค่าใดเป็นค่าที่ต้องการ (สูงสุดหรือน้อยสุด)

แน่นอนปัญหาทางคณิตศาสตร์บางข้อกำหนดสมการจุดประสงค์มาให้ พร้อมกับสมการข้อจำกัดอย่างนี้การแก้ปัญหาก็มาเริ่มที่ข้อ 3 และ 4 ได้ทันที และถ้าได้จุดมุมตรงเหลี่ยมที่อยู่ติดกันให้ค่า P สูงสุด หรือน้อยสุดตามที่ต้องการก็ไม่ใช่ไร แสดงว่าเราได้จุดทุกๆ จุด บนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดมุมทั้งสองเป็นคำตอบที่เหมาะสม ซึ่งมีคำตอบมากมาย (อนันต์)

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง กำหนดการเชิงเส้น

Problem.1 ถ้า C เป็นปริมาณที่มีค่าขึ้นกับค่าของตัวแปร x และ y ด้วยความสัมพันธ์ $C = 3x + 5y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $3x + 4y \geq 5$, $x + 3y \geq 3$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้วค่าต่ำสุดของ C ตามเงื่อนไขข้างต้น มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{21}{5}$ *2. $\frac{29}{5}$ 3. $\frac{25}{4}$ 4. $\frac{27}{4}$

Problem.2 ถ้า $P = 5x + 4y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $x + 2y \leq 40$, $3x + 2y \leq 60$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้วค่าสูงสุดของ P เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 90 2. 100 *3. 110 4. 115

Problem.3 จงหาผลคูณของค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x, y) = x + y + 2$ ภายใต้เงื่อนไข

- ก. $x + 2y \geq 8$
ข. $5x + 2y \geq 20$
ค. $x + 4y \leq 22$
ง. $x \geq 1$
จ. $1 \leq y \leq 8$

(ตอบ 157.50)

Problem.4 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $a < b$ ถ้าค่ามากที่สุดและค่าน้อยที่สุดของ $P = 2x + y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $a \leq x + 2y \leq b$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ มีค่าเท่ากับ 100 และ 10 ตามลำดับ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด (ตอบ 70)

ลำดับและอนุกรม

1. ลำดับ

ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ในกรณีที่ฟังก์ชันเป็นลำดับที่มีโดเมนเป็น $\{1,2,3,\dots,n\}$ จะเรียกลำดับดังกล่าวว่า ลำดับจำกัด และในกรณีที่ฟังก์ชันเป็นลำดับที่มีโดเมนเป็น $\{1,2,3,\dots\}$ จะเรียกลำดับดังกล่าวว่า ลำดับอนันต์

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence)

นิยาม...	ลำดับเลขคณิตคือลำดับที่มีผลต่างร่วม d คงที่
ลำดับทั่วไป	$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$
ลำดับเลขคณิต	$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n-1)d$
$a_n = a_1 + (n-1)d$	
โดย ผลต่างร่วมหาจาก $d = a_n - a_{n-1}$	

ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence)

นิยาม...	ลำดับเรขาคณิตคือลำดับที่มีอัตราส่วนร่วม r คงที่
ลำดับทั่วไป	$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$
ลำดับเรขาคณิต	$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \dots, a_1r^{n-1}$
$a_n = a_1r^{n-1}$	
โดย อัตราส่วนร่วมหาจาก $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$	

2. ลิมิตของลำดับ (ลำดับอนันต์)

บทนิยาม

1. เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น แล้วเรียก L ว่าลิมิตของลำดับ (Limit of sequence) และกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ เรียกลำดับที่มีลิมิตว่า “ลำดับคอนเวอร์เจนต์”
2. เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มิได้เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง ลำดับเหล่านี้จึงไม่มีลิมิต เรียกลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตว่า “ลำดับไดเวอร์เจนต์”

สรุป

1. ลำดับที่จะหาลิมิตได้ต้องเป็นลำดับอนันต์เท่านั้น
2. การหาลิมิตของลำดับ ให้หาจากพจน์ที่ n ของลำดับ โดยใช้ตัวแปรของพจน์ที่ $n \rightarrow \infty$
3. ลำดับที่หาลิมิตได้ เรียกว่า ลำดับ Convergent โดยค่าที่ลู่อเข้าเรียกว่า ลิมิตของลำดับ
4. ลำดับที่หาลิมิตไม่ได้ เรียกว่า ลำดับ Divergent แสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาค่าไม่ได้
ซึ่งแบ่งได้เป็น 3 กรณี
 - 4.1 มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ แบบไม่มีสิ้นสุด $(+\infty)$
 - 4.2 มีค่าน้อยขึ้นเรื่อยๆ แบบไม่มีสิ้นสุด $(-\infty)$
 - 4.3 ค่าของ a_n ไม่ลู่อเข้าค่าใดค่าหนึ่ง เรียกว่า ลำดับกวัดแกว่ง
5. การหาลิมิตของลำดับทำได้ 3 วิธี คือ
 - ก. การเขียนกราฟ
 - ข. ใช้ทฤษฎีลิมิต
 - ค. ใช้สูตรลัด

ทฤษฎีการหาขีดจำกัด

ทฤษฎีบท

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ R

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x = a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, n \in I^+$
4. ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = M$ เมื่อ L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว
 - 4.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = cL, c$ เป็นค่าคงตัวใดๆ
 - 4.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L \pm M$
 - 4.3 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L \cdot M$
 - 4.4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
 - 4.5 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n, n \in I^+$
 - 4.6 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} \right) = \begin{cases} 0 ; |r| < 1 \\ \infty ; |r| > 1 \end{cases}$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (r^n) = \begin{cases} 0 ; |r| < 1 \\ not\ exist ; |r| > 1 \end{cases}$

ลำดับของลำดับตรรกยะ

ค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ หาได้จากการเปรียบเทียบดีกรีสูงสุดของเศษและส่วน ดังนี้

สูตรลัดทั่วไป
กำหนดให้ a_n อยู่ในรูปฟังก์ชันพหุนามหารกัน
1. ถ้ากำลังสูงสุดของเศษ = กำลังสูงสุดของส่วน ให้ตอบทันทีว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ สัมประสิทธิ์ของดีกรีสูงสุดของเศษและส่วนหารกัน
2. ถ้ากำลังสูงสุดของเศษ > กำลังสูงสุดของส่วน ให้ตอบทันทีว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (หาค่าไม่ได้)
3. ถ้ากำลังสูงสุดของเศษ < กำลังสูงสุดของส่วน ให้ตอบทันทีว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

สัญลักษณ์แทนการบวก (Summation Notation)

ข้อตกลงเกี่ยวกับซิกมา

- $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ เขียนแทนด้วย $\sum n$
- $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ เขียนแทนด้วย $\sum n^2$
- $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ เขียนแทนด้วย $\sum n^3$
- $\sum_{i=1}^n c = \underbrace{c + c + c + \dots + c}_n$ เขียนแทนด้วย $\sum c$ เมื่อ c คือค่าคงตัว

สูตรของ $\sum$	ทฤษฎีเกี่ยวกับ $\sum$
1. $\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$	1. $\sum c = nc$
2. $\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	2. $\sum c a_n = c \sum a_n$
3. $\sum n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = (\sum n)^2$	3. $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
	4. $\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n$

3. อนุกรม (Series)

อนุกรม (Series) คือ การเขียนลำดับให้อยู่ในรูปผลบวก

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

อนุกรมนี 2 แบบ คือ

- อนุกรมจำกัด $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ เขียนแทนด้วย $\sum_{n=1}^n a_n$ (มี n พจน์)
- อนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ เขียนแทนด้วย $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (มีอนันต์พจน์)

ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับและอนุกรมได้ดังนี้

- ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม เขียนแทนด้วย S_n คือ บวกบวกของ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

- เมื่อรู้ a_n จะหา S_n จากความสัมพันธ์

$a_n \rightarrow S_n :$	$S_n = \sum a_n$
-------------------------	------------------

- เมื่อรู้ S_n จะหา a_n จากความสัมพันธ์

$S_n \rightarrow a_n :$	$a_n = S_n - S_{n-1}$
-------------------------	-----------------------

อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series)

อนุกรมเลขคณิตจึงคือผลบวกของลำดับเลขคณิต ซึ่งสร้างสูตรเฉพาะได้ดังนี้

สูตร	ควรใช้เมื่อ	สิ่งที่ต้องหาเหมือนกันก่อนคือ
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	ทราบ a_n	1. หา n โดยหาจากสูตร
$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	ทราบ d	$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 2. หา a_1

อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series)

อนุกรมเรขาคณิตก็คือผลบวกของลำดับเรขาคณิต ซึ่งสร้างสูตรเฉพาะได้ดังนี้

$$\text{จะได้ } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ หรือกลับสูตรได้ } S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

อนุกรมอนันต์

ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ เขียนแทนด้วย S_∞

$$\text{จะได้ } S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

- ถ้าลำดับ S_n เข้าสู่จำนวนจริงค่าใดค่าหนึ่งแล้ว S_∞ เป็นอนุกรมลู่เข้า หรืออนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และเรียกจำนวนจริงดังกล่าวว่า ผลบวกของอนุกรม
- ถ้าลำดับ S_n ไม่เข้าสู่จำนวนจริงค่าใดค่าหนึ่ง (ลู่ออก) แล้ว S_∞ เป็นอนุกรมลู่ออก หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์
- สูตรผลบวกของอนุกรมอนันต์

ชนิดของอนุกรม	สูตรผลบวกอนันต์
1. อนุกรมเลขคณิต	ไม่มีสูตรหาผลบวกอนันต์และหาผลบวกอนันต์ไม่ได้ ยกเว้น $a_1 = 0$ และ $d = 0$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 เสมอ
2. อนุกรมเรขาคณิต	$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ เมื่อ $ r < 1$

ทฤษฎีของอนุกรม Convergent และอนุกรม Divergent

1. อนุกรมอนันต์ที่มี $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ อนุกรมนั้นเป็นอนุกรม Divergent
2. อนุกรมอนันต์ที่มี $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ อนุกรมนั้นอาจเป็น Convergent หรือ Divergent ก็ได้
3. อนุกรม Convergent จะมี $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ เสมอ
4. อนุกรมอนันต์เลขคณิตทุกชนิดเป็นอนุกรม Divergent ยกเว้นทุกพจน์เป็นศูนย์

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง ลำดับและอนุกรม

Problem.1 ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $b_1 = -3$ และ $b_{b+1} = \frac{1+b_n}{1-b_n}$ สำหรับ

$n = 1, 2, 3$ ค่าของ b_{1000} เท่ากับเท่าใด (ตอบ 2)

Problem.2 กำหนดให้ a_n เป็นลำดับสอดคล้องกับเงื่อนไข $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} = 1$ สำหรับทุกจำนวน

นับ n ถ้า $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 250$ แล้ว $|a_{2552} - 2.5|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $1 + \sqrt{5}$ 2. $2 + \sqrt{5}$ *3. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 4. $2\sqrt{5}$

Problem.3 กำหนดให้ 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตคือ $2a + 1, 2b - 1, 3b - a$ และ $a + 3b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

พจน์ที่ 1000 ของลำดับเลขคณิตนี้เท่ากับข้อใด

1. 3,997 *2. 3,999 3. 4,001 4. 4,003

Problem.4 กำหนดให้ x, y, z เป็นลำดับเรขาคณิต มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ r และ $x \neq y$

ถ้า $x, 2y, 3z$ เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว ค่า r เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\frac{1}{4}$ *2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 2

Problem.5 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $2a, 3b, 4c$ เป็นลำดับเรขาคณิต และ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ เป็น

ลำดับเลขคณิต ค่าของ $\frac{a}{c} + \frac{c}{a}$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 2.5)

Problem.6 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยมีสมบัติดังนี้

ก. $a_{15} - a_{13} = 3$

ข. ผลบวก m พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ เท่ากับ 325 และ

ค. ผลบวก $4m$ พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ เท่ากับ 4900

แล้วพจน์ a_{2m} เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\frac{61}{2}$ *2. $\frac{121}{2}$ 3. $\frac{125}{2}$ 4. 119

Problem.7 บทนิยาม ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

เรียกพจน์ a_n ว่า พจน์คู่ ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ

เรียกพจน์ a_n ว่า พจน์คี่ ถ้า n เป็นจำนวนคี่

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่มีจำนวนพจน์เป็นจำนวนคู่ และผลบวกของพจน์คี่ทั้งหมดเท่ากับ 36 และผลบวกของพจน์คู่ทั้งหมดเท่ากับ 56 ถ้าพจน์สุดท้ายมากกว่าพจน์แรกเป็นจำนวนเท่ากับ 38 แล้ว ลำดับเลขคณิต $\{a_n\}$ นี้ มีทั้งหมดกี่พจน์ (ตอบ 20)

Problem.8 กำหนดให้ a_n เป็นลำดับที่สอดคล้องกับ $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ถ้า $\sum_{n=1}^{10} a_n = 31$ แล้ว $\sum_{n=1}^{2552} a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2^{1275} - 1$ *2. $2^{1276} - 1$ 3. $2^{2551} - 1$ 4. $2^{2552} - 1$

Problem.9 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่

$$a_{n+1} = n^2 - a_n \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3$$

ค่าของ a_1 ที่ทำให้ $a_{101} = 5100$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 50 2. 25 3. 1 4. 0

Problem.10 ถ้า $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^4}{1+8+27+\dots+n^3} \right)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกแล้ว แล้วค่าของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 2 3. 4 *4. 8

Problem.11 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+12n+27n+\dots+3n^3}{1+8+27+\dots+n^3} \right)$ มีค่าเท่าใด (ตอบ 4)

Problem.12 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ $a_n = \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ เท่ากับข้อใด (ตอบ 1)

Problem.13 กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n - a_1}{n} \right) = 5$

ถ้า $a_9 + a_5 = 100$ แล้ว a_{100} เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 500
- *2. 515
3. 520
4. หาไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ

Problem.14 ถ้า a_n เป็นลำดับเลขคณิตซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n} \right) = 4$ แล้ว $\sqrt{\frac{a_{17} - a_9}{2}}$ มีค่าเท่าใด

(ตอบ 2.38)

Problem.15 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2 a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้า $a_1 = 100$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบ 200)

Problem.16 กำหนดให้ β เป็นจำนวนจริง และให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่นิยามโดย $a_n = \frac{\beta n - 7}{n + 2}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้าผลบวก 9 พจน์แรกมีค่ามากกว่าผลบวก 7 พจน์แรก ของลำดับ $\{a_n\}$ เป็นจำนวนเท่ากับ a_{108} แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

(ตอบ 2)

Problem.17 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

โดยที่ $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n} a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 4
2. $\frac{16}{3}$
3. 8
4. 16

Problem.18 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = 1$ และ $a_n + 1 \leq a_{n+1}$ และ $a_{n+5} \leq a_n + 5$ สำหรับ $n = 1, 2, 3$ แล้วค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + 6 - k) \right)$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 6)

Problem.19 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

$$\text{โดยที่ } a_1 = 2 \text{ และ } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$

สำหรับ $n = 2, 3, 4, \dots$ แล้วค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ เท่ากับเท่าใด

(ตอบ 0)

Problem.20 ผลบวกของอนุกรม $3 + \frac{11}{4} + \frac{33}{16} + \dots + \frac{3^n + 2^n - 2}{4^{n-1}} + \dots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{20}{3}$ 2. $\frac{29}{3}$ 3. $\frac{31}{3}$ *4. $\frac{40}{3}$

Problem.21 ให้ k เป็นค่าคงที่ และถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n^5 + n) + 3n^4 + 2}{(n+2)^5} = 15 + 6 + \frac{12}{5} + \dots + 15\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \dots$

แล้ว k มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบ 25)

Problem.22 ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 b + 1}{2n^2 a - 1} = 1$ แล้วผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ab}{a^2 + b^2}\right)^n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ *2. $\frac{2}{3}$ 3. 1 4. หาค่าไม่ได้

Problem.23 ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$ แล้วค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ a_2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 2
*3. 1
4. หาค่าไม่ได้เพราะ a_2 มีค่ามากที่สุดอย่างไม่จำกัด

Problem.24 ถ้า $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4 - n^2} = A$ แล้ว $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4} + A$ 2. $\frac{5}{4} + A$ *3. $\frac{3}{4} - A$ 4. $\frac{5}{4} - A$

Problem.25 กำหนดให้ $a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

ค่าของ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{20}}$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 7)

Problem.26 กำหนดให้ $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}} \right)$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 1)

Problem.27 ค่าของ $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1})}$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 9)

Problem.28 กำหนดให้ $S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \dots$

ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{S_n}} \right)$ เท่ากับเท่าใด

(ตอบ 2)

Problem.29 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าลำดับ a_n ลู่เข้า แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

ข. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n}{2^n}\right)$ ลู่เข้า

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก ถูก และ ข ถูก
2. ก ถูก และ ข ผิด
3. ก ผิด และ ข ถูก
- *4. ก ผิด และ ข ผิด

แคลคูลัส

1. ลิมิตของฟังก์ชัน

ลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ ลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวา หาค่าได้ และมีค่าเท่ากัน

$$\text{จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

การหาลิมิตของฟังก์ชัน

1. ถ้าแทนแล้วได้ค่าออกมาเป็นจำนวนจริง ให้ตอบได้เลย เช่น $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(-1)^2 - 4}{(-1) - 2} = \frac{-3}{-3} = 1$
2. ถ้าแทนแล้วได้ค่าออกมาเป็น $\frac{? \neq 0}{0}$ แล้วแสดงว่า หาค่าไม่ได้
3. ถ้าแทนแล้วได้ค่าออกมาเป็น $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ เรียกว่า รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate Form)

เราต้องทำดังนี้

1. การแยกตัวประกอบ
2. การหาจำนวนที่เหมาะสมคูณทั้งเศษและส่วน (Conjugate)
3. ใช้กฎ L' Hospital ใช้เมื่อ เมื่อแทนค่าลิมิตแล้วได้ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ แล้วทำการหาอนุพันธ์ทั้งเศษ และ ส่วน จนกว่าไม่เกิด $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ หรือได้ค่าลิมิตแล้ว

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันจะต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด $x = a$ เมื่อ สอดคล้องกับเงื่อนไข ต่อไปนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ $\left[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

จากบทนิยาม ถ้าฟังก์ชัน f ขาดสมบัติข้อใดข้อหนึ่งฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$

2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

- กำหนดให้ $y = f(x)$ แล้ว อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f' = y'$$

- การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ที่จุด $x = a$ หาได้จาก

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d}{dx} f(a) = f'(a) = y'(a)$$

- กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

ถ้า $y = u^n$ และ n เป็นจำนวนจริง ดังนั้น $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$

- อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท (อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ)

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- อนุพันธ์อันดับสูง (Higher derivative)

$$\text{ซึ่งนิยามว่า } f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้และเรียก f'' ว่า “อนุพันธ์อันดับที่สองของ f ”

ถ้ากำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ เราอาจใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^n y}{dx^n}$ หรือ $\frac{d^n [f(x)]}{dx^n}$ แทน $f^{(n)}(x)$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่สอง

$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่สาม

$f^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่สี่

และ $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ n

ในบางครั้งเราอาจใช้สัญลักษณ์ $y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots$

แทน $f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots$ ตามลำดับ

3. ความชันของเส้นโค้ง (Slope of a curve)

ข้อสรุป

- ความชันของเส้นโค้งที่จุดใดๆ = ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดนั้น
- ความชันของเส้นสัมผัส $y = f(x)$ ที่จุด $(x_0, y_0) = f'(x_0)$
- เส้นที่ตั้งฉากกันความชันคูณกันได้ -1
- $f'(x_0) = \tan \theta$ เมื่อ θ คือ มุมเอียงของเส้นสัมผัส

4. ฟังก์ชันเพิ่ม - ฟังก์ชันลด

- เป็นฟังก์ชันลด บนช่วงซึ่ง $f'(x) < 0$
- เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วงซึ่ง $f'(x) > 0$

5. ค่าสูงสุด – ค่าต่ำสุด

หลักการตรวจสอบค่าสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์

1. หาค่าวิกฤตจากสมการ $f'(x)$

ค่าวิกฤต คือ ค่าที่ทำให้ $f'(x) = 0$

2. นำค่าวิกฤตไปเขียนบนเส้นจำนวน โดย

- ถ้าสัมประสิทธิ์ดีกรีสูงสุดเป็นบวก จุดแรกทางฝั่งขวามือจะเป็นจุดสูงสุด, ต่ำสุด สลับกันไปเรื่อยๆ
- ถ้าสัมประสิทธิ์ดีกรีสูงสุดเป็นลบ จุดแรกทางฝั่งขวามือจะเป็นจุดต่ำสุด, สูงสุด สลับกันไปเรื่อยๆ

3. วาดเส้นโค้งเป็นบวกแน่นอน ให้ตัดทิ้งออกจากการคิด เพราะเป็นจุดเปลี่ยนเว้า

6. การอินทิเกรต

ความหมาย

การอินทิเกรต คือ การกระทำที่ตรงข้ามกับอนุพันธ์

$$f(x) \xrightleftharpoons[\text{integrate}]{\text{diff}} f'(x) \xrightleftharpoons[\text{integrate}]{\text{diff}} f''(x)$$

เรียก $\int f(x) dx$ ว่า ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

สูตรการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว

$$1. \int k dx = kx + c$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$3. \int x^{-1} dx = \ln|x| + c$$

$$4. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$5. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

7. ปริพันธ์จำกัดเขต (Definite Integrals)

ความหมาย การอินทิเกรตจำกัดเขตในช่วง a ถึง b คือ การหาพื้นที่ใต้โค้งในช่วง a ถึง b

กำหนดฟังก์ชัน $F(x)$ เป็นปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{หรือ } \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

สูตรการหาปริพันธ์จำกัดเขต

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \text{ ค่าคงตัว}$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{เมื่อ } a < c < b$$

8. ปริพันธ์จำกัดเขตกับการหาพื้นที่

หลักการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง

ถ้า $y = f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ และแกน x จาก $x = a$ ถึง $x = b$ หาได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาจุดตัดแกน x ซึ่งอยู่ในช่วง $[a, b]$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าสัมบูรณ์ของปริพันธ์จำกัดเขตในแต่ละช่วงของ x ที่ต่อเนื่องกัน

ขั้นตอนที่ 3 พื้นที่ที่ต้องการเท่ากับผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของปริพันธ์จำกัดเขตทั้งหมดที่หาได้

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง แคลคูลัส

Problem.1 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^3 + x^2} + x}{x^2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. -1 4. 1

Problem.2 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^3 - 1|}{x - 1} & , -1 < x < 1 \\ a - b & , 1 < x < 5 \\ 5 & , x \geq 5 \end{cases}$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-1, \infty)$ แล้วค่าของ ab เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{4}$ 2. $-\frac{7}{4}$ 3. 15 *4. -10

Problem.3 กำหนดให้ R แทนเซตจำนวนจริง

ให้ $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ และให้ g เป็นฟังก์ชันที่กำหนด โดย

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1} & ; x > 1 \\ \frac{f(x)}{|x| + 7} & ; x \leq 1 \end{cases}$$

ถ้าฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องที่ $x = 1$ แล้วค่าของ $(g \circ f)(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2 - \sqrt{3}$ 2. 2 3. $2 - \sqrt{7}$ *4. $\sqrt{7} - 2$

Problem.4 ถ้า f, g และ h สอดคล้องกับ $f(1) = g(1) = h(1) = 1$ และ

$$f'(1) = g'(1) = h'(1) = 2$$

แล้วค่าของ $(fg + h)'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 4 *4. 6

Problem.5 ถ้า $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right)$ แล้วค่าของ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{f(4+h) - f(4)}$ เท่ากับ ข้อใดต่อไปนี้

1. 1 *2. $\frac{16}{5}$ 3. $\frac{7}{5}$ 4. $\frac{1}{5}$

Problem.6 กำหนดให้ $f(x) = ax^2 + b\sqrt{x}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $b \neq 0$
ถ้า $2f'(1) = f(1)$ แล้ว $\frac{f(4)}{f'(9)}$ มีค่าเท่าใด (ตอบ 12)

Problem.7 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง
ให้ $g: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $g(x) = \frac{1}{2x+3}$ เมื่อ $x \neq -\frac{3}{2}$
ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่ $(fog)(x) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
แล้ว $f''\left(\frac{1}{2}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. -8 *4. 8

Problem.8 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f: R \rightarrow R$ และ $g: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$, $g(1) = 8$ และ $g'(1) = 8$ ค่าของ $(fog)'(1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ *2. $\frac{2}{3}$ 3. 1 *4. $\frac{4}{3}$

Problem.9 ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง
โดยที่ $f(2x+1) = 4x^2 + 14x$ ค่าของ $f(f'(f''(2553)))$ เท่ากับข้อใด (ตอบ 120)

Problem.10 เส้นตรงซึ่งตัดตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = 2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ที่จุด $x = 1$ คือ

เส้นตรงในข้อใดต่อไปนี้

1. $13x - 2y - 11 = 0$ 2. $13x + 2y - 15 = 0$
3. $2x - 13y + 11 = 0$ *4. $2x + 13y - 15 = 0$

Problem.11 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุก $x \in R$

โดยที่ $g(x) = x^2 - 2x + 5$, $(g \circ f)(x) = x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 5$

และ $f(0) = 0$ ค่าของ $(f' \circ g')(1) + (g' \circ f')(0)$ (ตอบ 1)

Problem.12 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนาม

โดยที่ $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b$ ถ้าฟังก์ชันพหุนาม $Q(x)$ โดยที่

$f(x) = (Q(x))^2$ แล้วค่าของ $\int_0^1 f(x)dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{71}{30}$ 2. $\frac{31}{30}$ *3. $\frac{11}{30}$ 4. $\frac{1}{30}$

Problem.13 ถ้า $f'(x) = 3x^2 + x - 5$ และ $f(0) = 1$ แล้ว $\int_{-1}^1 f(x)dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{3}$ *2. $\frac{7}{3}$ 3. $\frac{2}{3}$ 4. $\frac{1}{3}$

Problem.14 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f'(x) = 3\sqrt{x} + 5$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ $f(1) = 5$ แล้วค่าของ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x^2) - 2}{f(x)}$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 6)

Problem.15 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าสูงสุดที่ $x = 1$ ถ้า $f''(x) = -4$ ทุกๆ x และ $f(-1) + f(3)$ แล้ว f มีค่าสูงสุดเท่าใด (ตอบ 8)

Problem.16 กำหนดให้เส้นโค้ง $y = f(x)$ สัมผัสกับเส้นตรง $2x - y + 3 = 0$ ที่จุด $(0, 3)$

และ $\int_0^2 f''(x)dx = -3$ ถ้า $g(x) = \sqrt{x+2}f(x)$ และ $g'(2) = 0$ แล้ว $f(2)$

เท่ากับเท่าใด (ตอบ 8)

Problem.17 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f''(x) = 6x + 4$ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง x และความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(2, 9)$ เท่ากับ 19 แล้วค่าของ $f(1)$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 7)

Problem.18 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(1, 2)$ มีค่าเท่ากับ 4 และ $\int_{-1}^2 f(x) dx = 12$ แล้ว $f(-1) + f''(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี (ตอบ 18)

Problem.19 กำหนดให้ $h(x) = f(x)g(x)$ โดยที่ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) เท่ากับ $2 - 2x$ และเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 5 ถ้า g เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่งมีสมบัติ $g(2) = g'(2) = 5$ แล้ว $h'(2)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบ 10)

Problem.20 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามที่มี $f''(x) = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $f(0) = 2$ และกราฟของ f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(1, -5)$ แล้ว $2a + 3b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. -12 2. 20 *3. 42 4. 48

Problem.21 กำหนดให้ A แทนพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 1 - x^2$ และแกน X B แทนพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ได้เส้นโค้ง $y = \frac{x^2}{4}$ เหนือแกน X จาก $x = -c$ ถึง $x = c$ ค่าของ c ที่ทำให้ $A = B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\sqrt{2}$ *2. 2 3. $2\sqrt{2}$ 4. 4

สถิติ

1. ค่ากลางของข้อมูล

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต จะใช้สัญลักษณ์ $\bar{X}$ ซึ่งอ่านว่า เอ็กซ์-บาร์ แทนค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ข้อมูลที่ยังไม่แจกแจงความถี่ ใช้สูตร
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

โจทย์ที่จะนำมาออกเป็นข้อสอบน่าจะไม่ได้ถามแบบแทนค่าสูตรตรงๆ แล้วออก แต่จะออกแบบพลิกสูตรดังนี้

จากสูตร $\bar{X} = \frac{\sum x}{N}$ จะได้

1. ผลรวมของข้อมูล คือ $\sum x = N\bar{X}$

2. จำนวนข้อมูล คือ $N = \frac{\sum x}{\bar{X}}$

- ข้อมูลที่แจกแจงความถี่

สำหรับอันตรภาคชั้นแต่ละชั้นเท่ากัน ใช้สูตรลดทอนข้อมูล
$$\bar{X} = a + \left(\frac{\sum fd_i}{N} \right) I$$

เมื่อ d = ค่าสมมุติ $\dots, -1, 0, 1, \dots$

a = จุดกึ่งกลางของชั้นที่ $d = 0$

$$\bar{d} = \frac{\sum f_i d_i}{N}$$

สำหรับอันตรภาคชั้นแต่ละชั้นไม่เท่ากัน ใช้สูตร
$$\bar{X} = \frac{\sum fx_i}{N}$$

เมื่อ $\sum f_i x_i$ คือ ผลรวมของผลคูณของจุดกึ่งกลางชั้นและความถี่แต่ละชั้น

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม

$$\bar{X}_t = \frac{N_1 \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2 + \dots + N_k \bar{X}_k}{N_1 + N_2 + \dots + N_k}$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนัก

$$\bar{X}_w = \frac{W_1 \bar{X}_1 + W_2 \bar{X}_2 + \dots + W_k \bar{X}_k}{W_1 + W_2 + \dots + W_k}$$

มัธยฐาน (Median)

มัธยฐาน คือ ค่าของคะแนนที่ตำแหน่งกึ่งกลางของข้อมูลทั้งหมด เมื่อเรียงลำดับคะแนนของข้อมูล
แล้วนิยมใช้สัญลักษณ์ Me แทน มัธยฐาน

การหามัธยฐานของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

หลัก 1. เรียงลำดับคะแนนของข้อมูล

2. หาคำแหน่งกึ่งกลางจากสูตร $\frac{N+1}{2}$ แล้วค่า $Me = X_{\frac{(N+1)}{2}}$

การหามัธยฐานของข้อมูลที่แจกแจงความถี่

หลัก 1. เพิ่มช่องตารางแจกแจงความถี่ แบบความถี่สะสม

2. หาคำแหน่งกึ่งกลางจากสูตร $\frac{N}{2}$

3. มัธยฐานคือคะแนน ณ ตำแหน่งกึ่งกลางจึงคำนวณได้ด้วยวิธีบัญญัติไตรยางศ์ หรือ

$$\text{เลือกใช้สูตร } Me = L + I \left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_{me}} \right) \text{ หรือ } Me = U - I \left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_U}{f_{me}} \right)$$

เมื่อ $\sum f_L$ = ผลรวมความถี่ของชั้นที่ต่ำกว่า

$\sum f_U$ = ผลรวมความถี่ของชั้นที่สูงกว่า

f_{me} = ความถี่ของชั้นที่มัธยฐานอยู่

ฐานนิยม

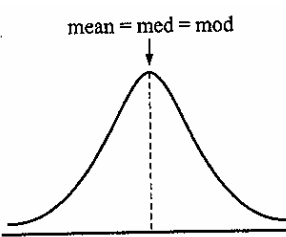
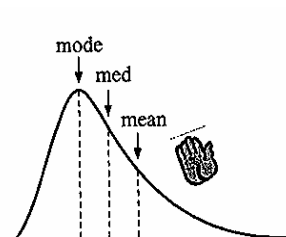
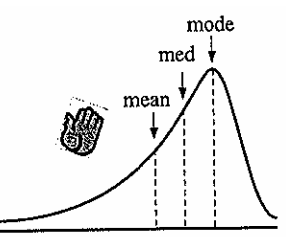
- ข้อมูลที่ยังไม่แจกแจงความถี่ ฐานนิยม คือ ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด นิยมใช้สัญลักษณ์ Mo แทนฐานนิยม โดยฐานนิยมมีได้ไม่เกิน 2 ค่า

- ข้อมูลที่แจกแจงความถี่ หาได้จาก $Mo = L + \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right] I$

เมื่อ L = ขอบล่างของอันตรภาคชั้นที่ฐานนิยมอยู่

d_1, d_2 = ผลต่างระหว่างความถี่ของอันตรภาคชั้นที่ฐานนิยมอยู่กับชั้นที่ติดกัน

2. ความสัมพันธ์ระหว่างโค้งกับค่ากลาง

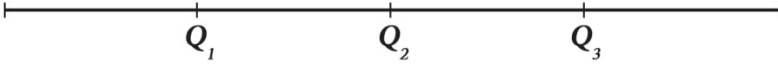
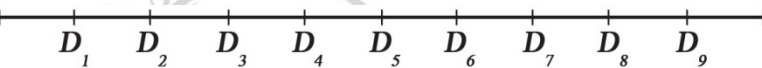
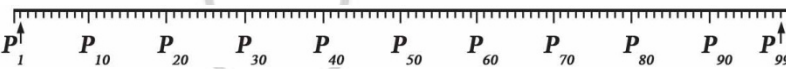
1. เส้นโค้งปกติ	2. เส้นโค้งเบ้ขวา	3. เส้นโค้งเบ้ซ้าย
		
$mode = med = mean$	$mode < med < mean$	$mode > med > mean$
จำนวนคนทำได้เท่ากับจำนวนคนทำไม่ได้	ส่วนใหญ่ได้คะแนนน้อย	ส่วนใหญ่ได้คะแนนมาก
โค้งสมมาตรกันทั้งสองฝั่ง	คอบทางขวาโค้งจึงเบ้ขวา	คอบทางซ้ายโค้งจึงเบ้ซ้าย

Note ถ้าเส้นโค้งใกล้เคียงโค้งปกติจะได้สมการระหว่างค่าเฉลี่ยคือ $\bar{x} - Mo = 3(\bar{x} - Me)$

3. สมบัติของค่ากลาง

1. ค่าของ $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ เสมอ
2. $\sum (x_i - a)^2$ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = \bar{x}$
3. $\sum x_i - a $ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = Me$
4. ถ้า $y_i = ax_i + b$; a, b เป็นค่าคงที่แล้ว $\bar{y} = a\bar{x} + b$ สมบัติดังกล่าวใช้ได้กับ Me, Mo

4. การวัดตำแหน่งของข้อมูล

การวัดตำแหน่ง	นิยาม
ควอร์ไทล์	ควอร์ไทล์ คือ การวัดตำแหน่งข้อมูลโดยแบ่งข้อมูล ออกเป็น 4 ส่วน 
เดซิล์	เดซิล์ คือ การวัดตำแหน่งข้อมูลโดยแบ่งข้อมูล ออกเป็น 10 ส่วน 
เปอร์เซ็นต์ไทล์	เปอร์เซ็นต์ไทล์ คือ การวัดตำแหน่งข้อมูลโดยแบ่งข้อมูล ออกเป็น 100 ส่วน 

การหาตำแหน่งแบบข้อมูลไม่แจกแจงความถี่

ขั้นที่ 1 เรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมาก

ขั้นที่ 2 คำนวณตำแหน่งของข้อมูล

สูตร/ค่าสถิติ	ควอร์ไทล์	เดซิล์	เปอร์เซ็นต์ไทล์
สูตรของตำแหน่ง	$Q_r = \frac{r(N+1)}{4}$	$D_r = \frac{r(N+1)}{10}$	$P_r = \frac{r(N+1)}{100}$

ขั้นที่ 3 ตำแหน่งของข้อมูล คือ ลำดับที่ของข้อมูลจากน้อยไปมาก

กรณีตำแหน่งของข้อมูลไม่เป็นจำนวนเต็ม ต้องเทียบบัญญัติไตรยางศ์

การหาตำแหน่งแบบข้อมูลแจกแจงความถี่ (เป็นตาราง)

สูตร/ค่าสถิติ	ควอไทล์	เดซิล์	เปอร์เซ็นต์ไทล์
สูตรของตำแหน่ง (ขั้นที่ 1)	$Q_r = \frac{rN}{4}$	$D_r = \frac{rN}{10}$	$P_r = \frac{rN}{100}$
ค่าคะแนนของ ตำแหน่ง (ขั้นที่ 2)	ค่าคะแนนของตำแหน่ง = $L + \frac{I(pos - \sum f_L)}{f}$		

เมื่อ pos คือ ตำแหน่งของข้อมูล

f คือ ความถี่ของข้อมูลของชั้นที่อยู่

Note กรณีที่ตำแหน่งของข้อมูลมีค่าเท่ากับความถี่สะสมของชั้นไหน ค่าตอบที่ต้องการจะค่าที่เท่ากับขอบเขตบนชั้นนั้น

5. การวัดการกระจายสัมบูรณ์ของข้อมูล ใช้เพื่อดูว่าข้อมูลในชุดนั้นมีความแตกต่างกันมากน้อยเพียงใด

- พิสัย

ข้อมูลที่ยังไม่แจกแจงความถี่ พิสัย = $x_{\max} - x_{\min}$

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่ พิสัย = ขอบเขตบนของชั้นสูงสุด - ขอบเขตบนของชั้นต่ำสุด

- ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

- ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย

ข้อมูลที่ยังไม่แจกแจงความถี่ $M.D. = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่ $M.D. = \frac{\sum f |x_i - \bar{x}|}{N}$

- ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ข้อมูลที่ยังไม่แจกแจงความถี่

$$1) \quad S.D. = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

$$2) \quad S.D. = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

ข้อมูลที่แจกแจงความถี่

$$S.D. = I \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N f_i d_i^2}{N} - \bar{d}^2}$$

ความแปรปรวน $(SD)^2$

ความแปรปรวน = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน²

การหาความแปรปรวนรวม

เมื่อ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$	เมื่อ $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$
$S_t^2 = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2}{N_1 + N_2}$	$1. \quad S_t^2 = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2 + N_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + N_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2}{N_1 + N_2}$ $2. \quad S_t^2 = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2 + \left[\frac{N_1 N_2 (\Delta \bar{x})^2}{N_1 + N_2} \right]}{N_1 + N_2}$

คุณสมบัติของการกระจายสัมบูรณ์

- ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความแปรปรวน มีค่ามากกว่า หรือ เท่ากับ ศูนย์ เสมอ
- ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความแปรปรวน เป็นศูนย์ เมื่อ ข้อมูลทุกตัวมีค่าเท่ากัน
- ถ้ากำหนดให้ $y_i = ax_i + b$ แล้วจะได้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\bar{y} = a\bar{x} + b$
2. พิสัย $R_y = |a| R_x$
3. ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $Q.D._y = |a| Q.D._x$
4. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $M.D._y = |a| M.D._x$
5. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $S_y = |a| S_x$
6. ความแปรปรวน $S_y^2 = |a|^2 S_x^2$

สรุป การบวกหรือลบข้อมูลทุกตัวด้วยค่าคงที่ ตัววัดการกระจายสัมบูรณ์จะไม่เปลี่ยนแปลง แต่จะเปลี่ยนแปลงเมื่อคูณ หรือหาร เท่านั้น

6. การวัดการกระจายสัมพัทธ์ของข้อมูล

การวัดการกระจายสัมพัทธ์ เป็นการเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลคนละชุด โดยดูว่าข้อมูลชุดไหนมีการกระจายมากกว่ากัน

- สัมประสิทธิ์ของพิสัย $C.R. = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{x_{\max} + x_{\min}}$
- สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $C.Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
- สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $C.M.D. = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{\sum x_i}$
- สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน $V = \frac{S.D.}{\bar{X}}$

7. ค่ามาตรฐาน

- ความหมาย คือ ค่าที่ใช้เปรียบเทียบคะแนนของข้อมูลตั้งแต่ 2 ชุด ขึ้นไป ว่าคะแนนไหนมี

คุณภาพมากกว่ากัน

- สูตรค่ามาตรฐาน $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$

- สมบัติของคะแนนมาตรฐาน

1. ที่คะแนนเท่ากับ $\bar{x}$ จะได้ค่าของคะแนนมาตรฐาน $z = 0$ เสมอ
2. ผลบวกของคะแนนมาตรฐาน $\sum z_i = 0$ เสมอ
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนมาตรฐาน $\bar{z} = 0$ เสมอ
4. ผลบวกกำลังสองของคะแนนมาตรฐาน N เสมอ
5. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนมาตรฐาน $S.D._z = 1$ เสมอ

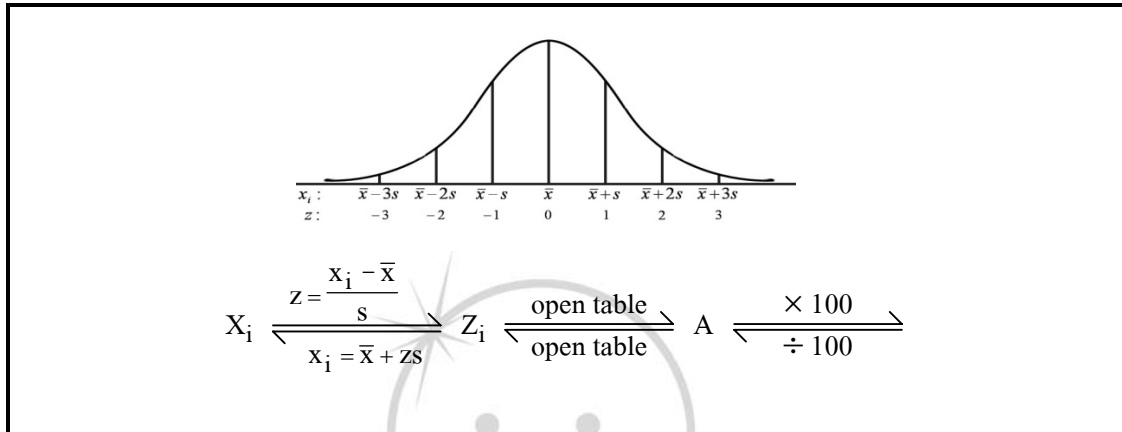
8. พื้นที่ใต้โค้ง

สมบัติของเส้นโค้งปกติ

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม จะมีค่าเท่ากัน และจะอยู่ ณ จุดที่เส้นตรงที่ลากผ่านจุดโค้งสุดของเส้นโค้งนั้นตั้งฉากกับแกนนอน
2. เส้นโค้งจะมีเส้นตั้งฉากกับแกนนอนที่ลากผ่านค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นแกนสมมาตร
3. พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ
4. พื้นที่ที่อยู่เหนือค่าใดค่าหนึ่งของ X จะเป็น 0 เสมอ จะได้ว่าพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ $[X_1, X_2]$ มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ (x_1, x_2)

หลักการหาพื้นที่ใต้โค้งปกติทุกรูปแบบ

การทำพื้นที่ใต้โค้งปกติทุกรูปแบบให้ได้อย่างง่ายดายนั้น เราจะต้องรู้จักโครงสร้างต่างๆ ของโค้ง ซึ่งเมื่อนำมาสรุปเราจะได้โครงสร้างของสูตรที่สามารถนำไปใช้แก้โจทย์ทุกๆ ข้อได้ดังนี้



แนวโจทย์พื้นที่ใต้โค้งปกติ

จากหลักการหาพื้นที่ใต้โค้งปกติทุกรูปแบบที่สรุปมาแล้วนั้น เราจะสามารถแบ่งประเภทของโจทย์เพื่อให้ง่ายแก่การเข้าใจ ได้ดังนี้

แนวที่ 1 หาจำนวนข้อมูลที่อยู่ระหว่าง x_i ที่โจทย์กำหนดมาให้

แนวที่ 2 หาค่าสังเกต x_i ด้วยการกำหนดจำนวนข้อมูลในขอบเขต x_i ที่ต้องการหา

9. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน

- ความหมาย ถ้าเราทราบค่าของ 2 ตัวแปร คือ ตัวแปรต้น (ตัวแปรอิสระ : x) และตัวแปรตาม (y) โดยทราบว่า x และ y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง เราสามารถสร้างสมการเพื่อทำนายค่าของตัวแปรตามเมื่อทราบตัวแปรต้นได้ ในรูป

$$\hat{y} = mx + c \text{ เรียกสมการดังกล่าวว่า สมการทำนาย}$$

การสร้างสมการทำนาย

จุดที่ควรจำ

1. ถ้า “ค่าคงตัวที่ต้องการหา” มี k ตัว ต้องสร้างสมการปกติขึ้น k สมการด้วย
2. โดยปกติแล้วจำนวนตัวแปรของสมการจะเป็นดังนี้
 - สมการเส้นตรง จะมีสมการปกติ 2 สมการ
 - สมการพาราโบลา จะมีสมการปกติ 3 สมการ
 - สมการสมการเอกซ์โพเนนเชียล จะมีสมการปกติ 2 สมการ

Tip... สมการปกติถึงแม้ว่าจะดูยุ่งยากแต่เรามีวิธีการหาได้ดังนี้

- เจอโจทย์ 1 ตัวแปร Take $\sum$ ที่สมการทั่วไป
- เจอโจทย์ 2 ตัวแปร Take $\sum$ และ $\sum x$ ที่สมการทั่วไป
- เจอโจทย์ 3 ตัวแปร Take $\sum$ และ $\sum x$ และ $\sum x^2$ ที่สมการทั่วไป
- เจอโจทย์ k ตัวแปร Take $\sum$ และ $\sum x$ และ $\sum x^2, \dots$ ที่สมการทั่วไป

สมการปกติ	สำหรับ	สมการเส้นตรง
รูปทั่วไป	:	$y = ax + b$
สมการปกติ	:	$\sum y = a \sum x + nb$ $\sum xy = a \sum x^2 + b \sum x$

Note

1. ตัวแปร $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ สอดคล้องกับสมการ $\hat{y} = mx + c$ ดังนั้น $\bar{y} = m\bar{x} + c$
2. สมการ $\hat{y} = mx + c$ มีไว้ทำนายค่า y เมื่อรู้ค่า x เท่านั้น ไม่สามารถย้อนเพื่อทำนาย x เมื่อทราบ y ได้
หากต้องการทำนาย x จาก y จะต้องสร้างสมการปกติในรูป $\hat{x} = my + c$
โดยการ take $\sum$ และ take $\sum y$ เพื่อหาค่า m และ c ใหม่

อนุกรมเวลา

หลักการ สมมุติค่า x จะดูจากจำนวนค่าของ x ว่าเป็นจำนวนคู่หรือคี่ ดังนี้

กรณีเป็นจำนวนคี่ จะสมมุติเป็น $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ (ห่างกันทีละ 1 เพื่อให้ $\sum x = 0$)

กรณีเป็นจำนวนคู่ จะสมมุติเป็น $\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots$ (ห่างกันทีละ 2 เพื่อให้ $\sum x = 0$)

เมื่อได้ค่า x แล้วก็สร้างสมการทำนายตามหลักการที่กล่าวไปแล้ว

ตัวอย่างข้อสอบ PAT 1 เรื่อง สถิติ

Problem.1 นักเรียนห้องหนึ่งสอบวิชาคณิตศาสตร์ได้ เท่ากับ 40 คะแนน ถ้านักเรียนชายสอบได้คะแนนเฉลี่ยเลขคณิต 35 คะแนน และนักเรียนหญิงสอบได้คะแนนเฉลี่ยเลขคณิต 50 คะแนน อัตราส่วนของนักเรียนชายต่อนักเรียนหญิงตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 3:2 2. 2:3 *3. 2:1 4. 1:2

Problem.2 กำหนดตารางแจกแจงความถี่แสดงอายุของคนในหมู่บ้านแห่งหนึ่ง เป็นดังนี้

อายุ (ปี)	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
จำนวน (คน)	5	10	A	20	10	10

ถ้าอายุเฉลี่ยของคนในหมู่บ้านนี้เท่ากับ 33.33 ปี แล้ว จำนวนคนในหมู่บ้านเท่ากับเท่าใด (ตอบ 57)

Problem.3 สร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนการสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง โดยให้ความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้วปรากฏว่ามัธยฐานของคะแนนการสอบเท่ากับ 57 คะแนน ซึ่งอยู่ในช่วง 50 – 59 ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนต่ำกว่า 49.5 คะแนน อยู่จำนวน 12 คน และมีนักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 59.5 คะแนนอยู่จำนวน 20 คน จงหาว่านักเรียนกลุ่มนี้มีทั้งหมดกี่คน (ตอบ 36)

Problem.4 ข้อมูลชุดหนึ่งมี 6 จำนวน คือ 2,3,6,11, a , b ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 8 และค่าฐานนิยมเท่ากับ 7 แล้ว $|a-b|$ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 10)

Problem.5 ข้อมูลชุดหนึ่งมี 99 จำนวนเรียงลำดับจากน้อยไปมากได้เป็น $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับมัธยฐาน แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\sum_{i=1}^{49} x_i = \sum_{i=51}^{99} x_i$ 2. $\sum_{i=1}^{49} (x_{50} - x_i) = \sum_{i=51}^{99} (x_{50} - x_i)$
- *3. $\sum_{i=1}^{49} |x_{50} - x_i| = \sum_{i=51}^{99} |x_{50} - x_i|$ 4. $\sum_{i=1}^{49} (x_{50} - x_i)^2 = \sum_{i=51}^{99} (x_{50} - x_i)^2$

Problem.6

ถ้าตารางแจกแจงความถี่แสดงน้ำหนักของเด็กจำนวน 40 คน เป็นดังนี้

น้ำหนัก (กิโลกรัม)	จำนวน
9 – 11	15
12 – 14	5
15 – 17	5
18 – 20	10
21 – 23	5

ถ้า $\bar{x}$ แทนค่าเฉลี่ยของน้ำหนักเด็กกลุ่มนี้ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\bar{x} = 17.444$ และมีฐานน้อยกว่าฐานนิยม
2. $\bar{x} = 14.875$ และมีฐานน้อยกว่าฐานนิยม
3. $\bar{x} = 17.444$ และมีฐานมากกว่าฐานนิยม
- *4. $\bar{x} = 14.875$ และมีฐานมากกว่าฐานนิยม

Problem.7

ข้อมูลชุดนี้มี 5 จำนวน และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 12 ถ้าควอไทล์ที่ 1 และ 3 ของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ 5 และ 20 ตามลำดับ แล้ว เดไซล์ที่ 5 ของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 10)

Problem.8

ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 2 ห้อง ซึ่งทำคะแนนเฉลี่ยได้ 60 คะแนน โดยห้องแรกมีนักเรียนจำนวน 40 คน และห้องที่สองมีนักเรียนจำนวน 30 คน ถ้าคะแนนสอบในห้องแรกเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 มีค่า 64 คะแนน และฐานนิยมมีค่าเป็น 66 คะแนน แล้ว คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนห้องที่สองมีค่าเท่ากับเท่าใด (ตอบ 56)

Problem.9 กำหนดตารางแจกแจงความถี่แสดงความสูงของนักเรียนในโรงเรียนแห่งหนึ่ง เป็นดังนี้

ความสูง (เซนติเมตร)	จำนวนนักเรียน (คน)
120 – 129	10
130 – 139	20
140 – 149	40
150 – 159	50
160 – 169	30

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. มัธยฐานของความสูงมีค่าน้อยกว่า 149 เซนติเมตร
2. ฐานนิยมของความสูงมีค่าน้อยกว่า 147 เซนติเมตร
- *3. ควอไทล์ที่ 3 ของความสูงมีค่ามากกว่า 150 เซนติเมตร
4. เปอร์เซ็นไทล์ที่ 20 ของความสูงมีค่ามากกว่า 145 เซนติเมตร

Problem.10 ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์คะแนนเต็ม 60 คะแนน มีนักเรียนเข้าสอบ 30 คน นาย ก เป็นนักเรียนคนหนึ่งที่เข้าสอบในครั้งนี้ นาย ก สอบได้คะแนน 53 คะแนน และมีจำนวนนักเรียนที่มีคะแนนสอบน้อยกว่า 53 คะแนนอยู่ 27 คน ถ้ามีการจัดกลุ่มคะแนนสอบเป็นช่วงคะแนน โดยมีอันตรภาคชั้นกว้างเท่าๆกัน คะแนนสอบของนาย ก อยู่ในช่วงคะแนน 51–60 จำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนนในช่วงคะแนน 51–60 นี้มีทั้งหมดกี่คน

1. 3 *2. 4 3. 5 4. 9

Problem.11 โรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่งมีนักเรียน 80 คน โดยการแจกแจงของอายุนักเรียนเป็นดังตาราง

อายุ (ปี)	3.5	4	4.5	5	5.5	6
จำนวนนักเรียน (คน)	a	15	10	20	b	5

ถ้าค่าเฉลี่ยของอายุนักเรียนมีค่า 4.5 ปี แล้วส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของอายุนักเรียนมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{16}$ 2. $\frac{7}{16}$ 3. $\frac{9}{16}$ *4. $\frac{11}{16}$

Problem.12 ถ้าความยาวรัศมีของวงกลม 10 ว. มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 3 และมีความแปรปรวนเท่ากับ 5 แล้วผลรวมของพื้นที่วงกลมทั้ง 10 วงนี้ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 90π 2. 95π *3. 140π 4. 340π

Problem.13 จากการสำรวจของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 4 คน มี 2 คน น้ำหนักเท่ากันและหนักน้อยกว่า 2 คนที่เหลือ ถ้าฐานนิยม มัธยมฐาน และพิสัยของน้ำหนักนักเรียน 4 คนนี้ คือ 45 , 46 และ 6 กิโลกรัม ตามลำดับ แล้วความแปรปรวนของทั้ง 4 คนนี้เท่ากับเท่าใด (ตอบ 6)

Problem.14 ถ้านักเรียน 5 คน ร่วมกันบริจาคเงินได้รวม 360 บาท ความแปรปรวน (ประชากร) เท่ากับ 660 ถ้านักเรียนเพิ่มอีก 1 คน มาร่วมบริจาคเป็น 60 บาท ความแปรปรวน จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงตรงกับข้อใดไปนี้

1. เพิ่มขึ้น 60 2. เพิ่มขึ้น 90 3. ลดลง 80 *4. ลดลง 90

Problem.15 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเท่ากับ 72 คะแนน ความแปรปรวน (ประชากร) เท่ากับ 600 ถ้ามีนักเรียนมาเพิ่มอีก 1 คน ซึ่งสอบได้ 60 คะแนน ทำให้ค่าเฉลี่ยเปลี่ยนไป 70 คะแนน ความแปรปรวนของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับเท่าใด (ตอบ 520)

Problem.16 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. ในการสอบของนักเรียน 3 คน พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเท่ากับ 80 คะแนน ค่ามัธยฐานเท่ากับ 75 คะแนน และพิสัยเท่ากับ 25 คะแนน คะแนนสอบของนักเรียนที่ได้คะแนนต่ำสุดเท่ากับ 70 คะแนน
- ข. ข้อมูลชุดที่หนึ่งมี 5 จำนวน คือ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 และข้อมูลชุดที่สองมี 4 จำนวน คือ x_1, x_2, x_3, x_4 โดยที่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน ถ้า a และ b เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่หนึ่ง และชุดที่สอง

ตามลำดับ แล้ว $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อต้อง

- *1. ក ឆ្លុក ឆ្លើង ឃ ឆ្លុក
2. ក ឆ្លុក ឆ្លើង ឃ ឆ្លុក
3. ក ឆ្លុក ឆ្លើង ឃ ឆ្លុក
4. ក ឆ្លុក ឆ្លើង ឃ ឆ្លុក

Problem.17 ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้าหีบข้อมูล a, b, c, d มาคำนวณค่ามาตรฐานปรากฏว่าได้ค่าดังตาราง

ข้อมูล	a	b	c	d
ค่ามาตรฐาน (Z)	-3	-0.45	0.45	1

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $-a + 2b + 2c - 3d = 0$ 2. $-a + b + c - 3d = 0$
 3. $a - 2b + 3c + 2d = 0$ 4. $a - b + c - d = 0$

Problem.18 ในการสอบคัดเลือกเข้าศึกษาต่อของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ถ้าสอบได้คะแนน 700 คะแนน แปลงคะแนนเป็นค่ามาตรฐานได้ 4 แต่ถ้าสอบได้ 400 คะแนน แปลงเป็นค่ามาตรฐานได้ -2 แล้วสัมประสิทธิ์การแปรผันร้อยละเท่าใด (ตอบ 10)

Problem.19 ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 30 คน มีคะแนนเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 60 คะแนน และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 ถ้าผลรวมของค่ามาตรฐานของคะแนนของนักเรียนกลุ่มนี้เพียง 29 คน เท่ากับ 2.5 แล้วนักเรียนอีก 1 คน ที่เหลือสอบได้คะแนนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 35 2. 58 3. 60 4. 85

Problem.20 ข้อมูลความสูงของนักเรียนชั้น ม. 6 โรงเรียนแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้าจำนวนนักเรียนที่มีความสูงน้อยกว่า 140.6 เซนติเมตรมีอยู่ 3.01% และจำนวนนักเรียนที่มีความสูงมากกว่าค่ามัธยฐาน แต่น้อยกว่า 159.4 เซนติเมตรมีอยู่ 46.99% แล้วจำนวนนักเรียนที่มีความสูงไม่น้อยกว่า 155 เซนติเมตร แต่ไม่เกิน 160 เซนติเมตร มีเปอร์เซ็นต์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

เมื่อกำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน ระหว่าง 0 ถึง z เป็นดังนี้

(Z)	1.00	1.12	1.88	2.00
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.3413	0.3686	0.4699	0.4772

1. 12.86 % 2. 13.14 % 3. 15.87 % *4. 13.59 %

Problem.21 บริษัทผลิตหลอดไฟต้องการประกันคุณภาพผลิตภัณฑ์ของบริษัท โดยจะเปลี่ยนเป็นหลอดใหม่ ถ้าหลอดเดิมชำรุด บริษัทจะรับประกันไม่เกิน 4.1% ของจำนวนที่ผลิตหลอดไฟมีอายุใช้งานเฉลี่ย 2500 ชั่วโมง มีสัมประสิทธิ์ของความแปรผันเท่ากับ 0.20 ถ้าคาดว่าตามปกติคนจะใช้หลอดไฟวันละ 5 ชั่วโมง บริษัทนี้ควรกำหนดเวลาประกันมากที่สุดกี่วัน

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานอยู่ระหว่าง 0 ถึง z

z	1.34	1.44	1.54	1.74	1.84
พื้นที่	0.410	0.425	0.438	0.459	0.467

1. 362 วัน 2. 352 วัน 3. 346 วัน *4. 326 วัน

Problem.22 กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานอยู่ระหว่าง 0 ถึง z

z	1.14	1.24	1.34	1.44
พื้นที่	0.373	0.392	0.410	0.425

ความสูงของนักเรียน 2 กลุ่ม มีการแจกแจงปกติ ดังนี้

กลุ่ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
นักเรียนหญิง	158 เซนติเมตร	4 เซนติเมตร
นักเรียนชาย	169.06 เซนติเมตร	5 เซนติเมตร

ถ้านักเรียนคนหนึ่งมีความสูงตรงกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 91 ของกลุ่มนักเรียนหญิงนี้แล้ว จำนวนนักเรียนชายที่มีความสูงน้อยกว่าความสูงของนักเรียนหญิงคนนี้ คิดเป็นร้อยละเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- *1. 12.7 2. 11.4 3. 10.7 4. 9.4

Problem.23 ข้อมูลความสูง (เซนติเมตร) และน้ำหนัก (กิโลกรัม) ของนักเรียนหญิง 4 คน ดังนี้

นักเรียนหญิง	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4
ความสูง (เซนติเมตร)	150	152	154	156
น้ำหนัก (กิโลกรัม)	45	45	48	50

ถ้าส่วนสูงและน้ำหนักของนักเรียนมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นเส้นตรง $y = a + 0.9x$ เมื่อ x เป็นส่วนสูง และ y เป็นน้ำหนักแล้ว นักเรียนที่มีส่วนสูง 155 เซนติเมตร จะมีน้ำหนักกี่กิโลกรัม (ตอบ 48.80)

Problem.24 ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 (x) และปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (y) จากตัวอย่างอาหารจำนวน 100 ตัวอย่าง พบว่าความแปรปรวนของปริมาณสารที่ 1 มีค่าเท่ากับ 1.75 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของปริมาณสารชนิดที่ 2 มีค่าเท่ากับ 0.5 , $\sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 100$ และ $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 200$ ถ้าสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูป $Y = a + bX$ แล้วเมื่อพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 อยู่ 4 หน่วย จะพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (โดยประมาณ) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.5 หน่วย 2. 1 หน่วย 3. 1.5 หน่วย *4. 2 หน่วย



BRANDS® Summer Camp

2013