

BRANDS ซัมเมอร์แคมป์



ขอขอบคุณ

คณะเภสัชศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
คณะเภสัชศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น
คณะแพทยศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

ที่เป็นหนึ่งในการผลักดันและสร้างความสำเร็จทางการศึกษาให้แก่เยาวชนไทย

เอกสารประกอบการบรรยาย

วิชา คณิตศาสตร์

ส่วนที่ 1	(ONET).....โดย อ.ตุลนันท์ นวลเพ็ญ.....หน้า	2-50
ส่วนที่ 2	(PAT 1).....โดย อ.ภาควงมณี อร่ามวารีกุล (พี่แสบ).....หน้า	51-83
ส่วนที่ 3	(PAT 1).....โดย อ.ศุภฤกษ์ สกุลชัยพรเลิศ (ครู sup'k).....หน้า	84-209
ส่วนที่ 4	ชุดแก๊งข้อสอบ.....หน้า	210-224

www.brandssummmercamp.com

facebook.com/BRANDSWorldThailand

แจกฟรี ห้ามจำหน่าย

ประธานงานอาจารย์และจัดพิมพ์โดย ชมรมบัณฑิตก้นท่อน



BRANDS ซัมเมอร์แคมป์ ปีที่ 26



เอกสารประกอบการบรรยาย
วิชา **ONET**
คณิตศาสตร์

โดย อ.ตุลนันท นวลเพ็ญ
โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา

เซต

เซตจำกัด คือ เซตที่สามารถระบุจำนวนสมาชิกได้

เซตอนันต์ คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกมากมาย

เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก หรือมีจำนวนสมาชิกเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย ϕ หรือ $\{ \}$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ A เป็นเซตจำกัด และ B เป็นเซตอนันต์ ข้อความใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

- 1) มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ A
- 2) มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ B
- 3) มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ A
- 4) มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ B

สับเซต

บทนิยาม เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อสมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และเขียนเป็นสัญลักษณ์ คือ $A \subset B$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ เนื่องจากสมาชิกของเซต A ทุกตัวเป็นสมาชิกของเซต B ดังนั้น $A \subset B$

เพาเวอร์เซต

บทนิยาม เพาเวอร์เซตของเซต A คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสับเซตทั้งหมดของเซต A เขียนแทนด้วย $P(A)$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้สับเซตทั้งหมดของ A ได้แก่

$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

สมบัติของสับเซตและเพาเวอร์เซต

1. ϕ เป็นสับเซตของเซตทุกเซต
2. ϕ เป็นสมาชิกของเพาเวอร์เซตเสมอ
3. $A \subset A$
4. $A \in P(A)$
5. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
6. จำนวนสับเซตของเซต A ทั้งหมดเท่ากับ $2^{n(A)}$
7. จำนวนสมาชิกของ $P(A)$ ทั้งหมดเท่ากับ $2^{n(A)}$

การดำเนินการทางเซต

1. ยูเนียน เซต A ยูเนียนกับเซต B คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของเซต A หรือเซต B เขียนแทนด้วย $A \cup B$
2. อินเตอร์เซกชัน เซต A อินเตอร์เซกชันกับเซต B คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \cap B$
3. ผลต่าง ผลต่างของ A และ B คือ เซตที่มีสมาชิกในเซต A แต่ไม่เป็นสมาชิกในเซต B เขียนแทนด้วย $A - B$
4. คอมพลีเมนต์ ถ้า A เป็นเซตเซตใดในเอกภพสัมพัทธ์ U แล้ว คอมพลีเมนต์ของเซต A คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย A'

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
 $A = \{1, 2, 4, 8\}$
 $B = \{2, 4, 6, 10\}$
 จะได้ $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$
 $A \cap B = \{2, 4\}$
 $A - B = \{1, 8\}$
 $B - A = \{6, 10\}$
 $A' = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
 และ $B' = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $A - B = \{2, 4, 6\}$, $B - A = \{0, 1, 3\}$ และ $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 แล้ว $A \cap B$ เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $\{0, 1, 4, 5, 6, 7\}$ | 2) $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$ |
| 3) $\{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$ | 4) $\{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ |

ตัวอย่างที่ 6 ให้ $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ และ $B = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, 6, 7, 8, \dots\}$ ข้อใดเป็นเท็จ

- 1) $A - B$ มีสมาชิก 5 ตัว
- 2) จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ $B - A$ เท่ากับ 4
- 3) จำนวนสมาชิกของ $(A - B) \cup (B - A)$ เป็นจำนวนคู่
- 4) $A \cap B$ คือ เซตของจำนวนนับที่มีค่ามากกว่า 5

จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด

ให้ $n(A)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต A

1. $n(U) = n(A) + n(A')$
2. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
3. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
4. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

ตัวอย่างที่ 7 ถ้ากำหนดจำนวนสมาชิกของเซตต่างๆ ตามตารางต่อไปนี้

เซต	$A \cup B$	$A \cup C$	$B \cup C$	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$
จำนวนสมาชิก	25	27	26	30	7

แล้วจำนวนสมาชิกของ $(A \cap B) \cup C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 23 2) 24 3) 25 4) 26

ตัวอย่างที่ 8 นักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 46 คน แต่ละคนมีเสื้อสีเหลืองหรือเสื้อสีฟ้าอย่างน้อยสีละหนึ่งตัว ถ้านักเรียน 39 คนมีเสื้อสีเหลือง และ 19 คนมีเสื้อสีฟ้า แล้วนักเรียนกลุ่มนี้ที่มีทั้งเสื้อสีเหลืองและเสื้อสีฟ้ามีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 9 2) 10 3) 11 4) 12

ตัวอย่างที่ 9 นักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 50 คน มี 32 คน ไม่ชอบเล่นกีฬาและไม่ชอบฟังเพลง ถ้ามี 6 คน ชอบฟังเพลงแต่ไม่ชอบเล่นกีฬา และมี 1 คน ชอบเล่นกีฬาแต่ไม่ชอบฟังเพลง แล้วนักเรียนในกลุ่มนี้ที่ชอบเล่นกีฬาและชอบฟังเพลงมีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 11 คน 2) 12 คน 3) 17 คน 4) 18 คน

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ A และ B เป็นเซต ซึ่ง $n(A \cup B) = 88$ และ $n[(A - B) \cup (B - A)] = 76$ ถ้า $n(A) = 45$ แล้ว $n(B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 45 2) 48 3) 53 4) 55

ตัวอย่างที่ 11 ในการสอบถามพ่อบ้านจำนวน 300 คน พบว่ามีคนที่ไม่ดื่มทั้งชาและกาแฟ 100 คน มีคนที่ดื่มชา 100 คน และมีคนที่ดื่มกาแฟ 150 คน พ่อบ้านที่ดื่มทั้งชาและกาแฟมีจำนวนเท่าใด

ตัวอย่างที่ 12 ในการสอบของนักเรียนชั้นประถมกลุ่มหนึ่ง พบว่า มีผู้สอบผ่านวิชาต่างๆ ดังนี้

คณิตศาสตร์	36 คน
สังคมศึกษา	50 คน
ภาษาไทย	44 คน
คณิตศาสตร์และสังคมศึกษา	15 คน
ภาษาไทยและสังคมศึกษา	12 คน
คณิตศาสตร์และภาษาไทย	7 คน
ทั้งสามวิชา	5 คน

จำนวนผู้สอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชา มีกี่คน

การให้เหตุผล

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมีอยู่ 2 วิธี ได้แก่

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)

หมายถึง วิธีการสรุปผลในการค้นหาความจริง จากการสังเกตหรือการทดลองหลายๆ ครั้งจากกรณีย่อยแล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning)

หมายถึง วิธีการสรุปข้อเท็จจริงโดยการนำความรู้พื้นฐาน ความเชื่อ ข้อตกลง หรือบทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อนและยอมรับว่าเป็นจริง เพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้เป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัยหรือนิรนัย

- 1) เหตุ 1. นัทชอบทานไอศกรีม
2. แนนชอบทานไอศกรีม
ผล เด็กทุกคนชอบทานไอศกรีม
- 2) เหตุ 1. เด็กทุกคนชอบทานไอศกรีม
2. แนนเป็นเด็ก
ผล แนนชอบทานไอศกรีม

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า a จากแบบรูปของจำนวนที่กำหนดให้

- 1, 4, 9, 16, 25, a
2, 4, 8, 16, 32, a

ความสมเหตุสมผล

ส่วนประกอบของการให้เหตุผล

การตรวจสอบความสมเหตุสมผลโดยแผนภาพเวนน-ออยเลอร์

1. a เป็นสมาชิกของ A

2. a ไม่เป็นสมาชิกของ A

3. สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

4. ไม่มีสมาชิกตัวใดใน A เป็นสมาชิกของ B

5. สมาชิกบางตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

6. สมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดเหตุให้ดังต่อไปนี้

เหตุ ก. ทุกจังหวัดที่อยู่ไกลจากกรุงเทพมหานครเป็นจังหวัดที่มีอากาศดี

ข. เชียงใหม่เป็นจังหวัดที่มีอากาศไม่ดี

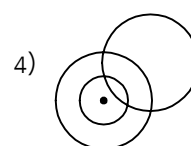
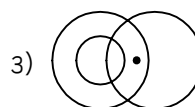
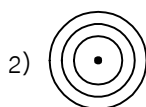
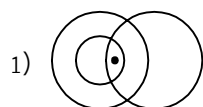
ข้อสรุปในข้อใดต่อไปนี้สมเหตุสมผล

- 1) เชียงใหม่เป็นจังหวัดที่อยู่ไม่ไกลจากกรุงเทพมหานคร
- 2) นราธิวาสเป็นจังหวัดที่อยู่ไม่ไกลจากกรุงเทพมหานคร
- 3) เชียงใหม่เป็นจังหวัดที่อยู่ไกลจากกรุงเทพมหานคร
- 4) นราธิวาสเป็นจังหวัดที่อยู่ไกลจากกรุงเทพมหานคร

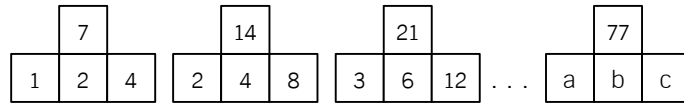
ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. คนตีกอล์ฟทุกคนเป็นคนสายตาดำ
2. คนที่ตีกอล์ฟได้ไกลกว่า 300 หลา บางคนเป็นคนสายตาดำ
3. ธงชัยตีกอล์ฟเก่ง แต่ตีได้ไม่ไกลกว่า 300 หลา

แผนภาพในข้อใดต่อไปนี้ มีความเป็นไปได้ที่จะสอดคล้องกับข้อความทั้งสามข้อข้างต้น เมื่อจุดแทนธงชัย



ตัวอย่างที่ 5 จากแบบรูปต่อไปนี้



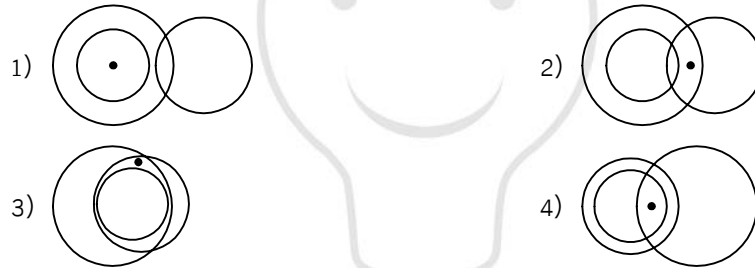
โดยการให้เหตุผลแบบอุปนัย $2a - b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 11 2) 22 3) 33 4) 44

ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. นักกีฬาทุกคนมีสุขภาพดี
ข. คนที่มีสุขภาพดีบางคนเป็นคนดี
ค. ฆาตรกรเป็นนักกีฬา และเป็นคนดี

แผนภาพในข้อใดต่อไปนี้ มีความเป็นไปได้ที่จะสอดคล้องกับข้อความทั้งสามข้อข้างต้น เมื่อจุดแทนฆาตรกร



ตัวอย่างที่ 7 เหตุ 1. ไม่มีคนขยันคนใดเป็นคนดกงาน

2. มีคนดกงานที่เป็นคนใช้เงินเก่ง

3. มีคนขยันที่ไม่เป็นคนใช้เงินเก่ง

ผล ในข้อใดต่อไปนี้ที่เป็นการสรุปผลจากเหตุข้างต้นที่เป็นไปอย่างสมเหตุสมผล

- 1) มีคนขยันที่เป็นคนใช้เงินเก่ง 2) มีคนใช้เงินเก่งที่เป็นคนดกงาน
3) มีคนใช้เงินเก่งที่เป็นคนขยัน 4) มีคนดกงานที่เป็นคนขยัน

ตัวอย่างที่ 8 พิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้

เหตุ 1) A

2) เห็ดเป็นพืชมีดอก

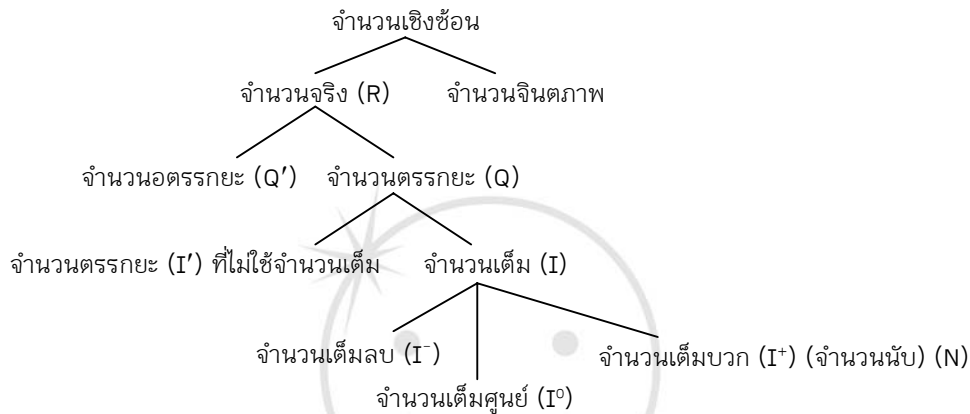
ผล เห็ดเป็นพืชชั้นสูง

ข้อสรุปข้างต้นสมเหตุสมผล ถ้า A แทนข้อความใด

- 1) พืชชั้นสูงทุกชนิดมีดอก 2) พืชชั้นสูงบางชนิดมีดอก
3) พืชมีดอกทุกชนิดเป็นพืชชั้นสูง 4) พืชมีดอกบางชนิดเป็นพืชชั้นสูง

ระบบจำนวนจริง

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของระบบจำนวน



จำนวนอตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือทศนิยมซ้ำได้ เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, π , 2.17254... เป็นต้น

จำนวนตรรกยะ หมายถึง จำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. มีจำนวนตรรกยะที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 0
- ข. มีจำนวนอตรรกยะที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 0

ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ผิด 2) ก. และ ข. ถูก 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ค่าประมาณที่ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3 ของ $\sqrt{3}$ และ $\sqrt{5}$ คือ 1.732 และ 2.236 ตามลำดับ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $2.235 + 1.731 \leq \sqrt{5} + \sqrt{3} \leq 2.237 + 1.733$
- ข. $2.235 - 1.731 \leq \sqrt{5} - \sqrt{3} \leq 2.237 - 1.733$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. จำนวนที่เป็นจุดทศนิยมไม่รู้จบบางจำนวนเป็นจำนวนอตรรกยะ

ข. จำนวนที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบบางจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

ข้อใดถูกต้อง

1) ก. และ ข. ถูก

2) ก. เท่านั้น

3) ข. เท่านั้น

4) ก. และ ข. ผิด

สมบัติของจำนวนจริง

1. สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$

1) สมบัติการสะท้อน

$$a = a$$

2) สมบัติการสมมาตร

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } b = a$$

3) สมบัติการถ่ายทอด

$$\text{ถ้า } a = b \text{ และ } b = c \text{ แล้ว } a = c$$

4) สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } a + c = b + c$$

5) สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } a + c = b + c$$

2. สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับพีชคณิต

กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$

สมบัติ	สมบัติของการบวก	สมบัติของการคูณ
สมบัติปิด	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
สมบัติการสลับที่	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	มี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก ซึ่ง $0 + a = a = a + 0$	มี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ ซึ่ง $1 \cdot a = a = a \cdot 1$
สมบัติการมีอินเวอร์ส	สำหรับจำนวนจริง a มีจำนวนจริง $-a$ ที่ $(-a) + a = 0 = a + (-a)$	สำหรับจำนวนจริง a ที่ $a \neq 0$ จะมี a^{-1} ที่ $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
สมบัติการแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

ตัวอย่างที่ 4 ให้ a และ b เป็นจำนวนตรรกยะที่แตกต่างกัน

c และ d เป็นจำนวนอตรรกยะที่แตกต่างกัน

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $a - b$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ข. $c - d$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ข้อสรุปใดต่อไปนี้เป็นจริง

1) ก. และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 5 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. สมบัติการมีอินเวอร์สการบวกของจำนวนจริง b ที่ $b + a = 0 = a + b$

ข. สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณของจำนวนจริงกล่าวว่า สำหรับจำนวนจริง a จะมีจำนวนจริง

b ที่ $ba = 1 = ab$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้เป็นจริง

1) ก. และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. และ ข. ผิด

ทบทวนสูตร

1. กำลังสองสมบูรณ์

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. กำลังสามสมบูรณ์

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

3. ผลต่างกำลังสอง

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

4. ผลต่างกำลังสาม

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

จากสมการพหุนามกำลังสอง

$ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงที่, $a \neq 0$

$$\text{จะได้ } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้ว x จะมี 2 คำตอบ

ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แล้ว x จะมี 1 คำตอบ

ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้ว x จะไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 6 ถ้า $\frac{3}{4}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ $4x^2 + bx - 6 = 0$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริงแล้ว
อีกผลเฉลยหนึ่งของสมการนี้มีค่าตรงกับข้อใด

1) -2

2) $-\frac{1}{2}$

3) $\frac{1}{2}$

4) 2

สมบัติของอสมการ ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1. สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

2. สมบัติการบวกด้วยจำนวนจริงที่เท่ากัน

ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

3. สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

4. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

จาก $a < x < b$

จะได้ $a < x$ และ $x < b$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ s, t, u และ v เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $s < t$ และ $u < v$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $s - u < t - v$

ข. $s - v < t - u$

ข้อใดถูกต้อง

1) ก. และ ข. ถูก

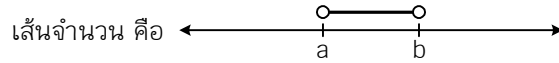
2) ก. เท่านั้น

3) ข. เท่านั้น

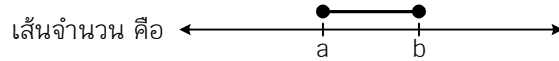
4) ก. และ ข. ผิด

ช่วงของจำนวนจริง ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a < b$

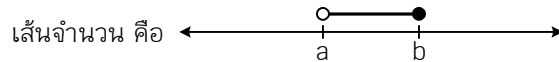
1. $(a, b) = \{x | a < x < b\}$



2. $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$



3. $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$



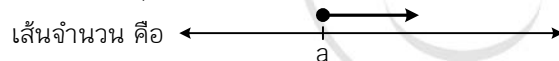
4. $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$



5. $(-\infty, a) = \{x | x < a\}$



6. $[a, \infty) = \{x | x \geq a\}$

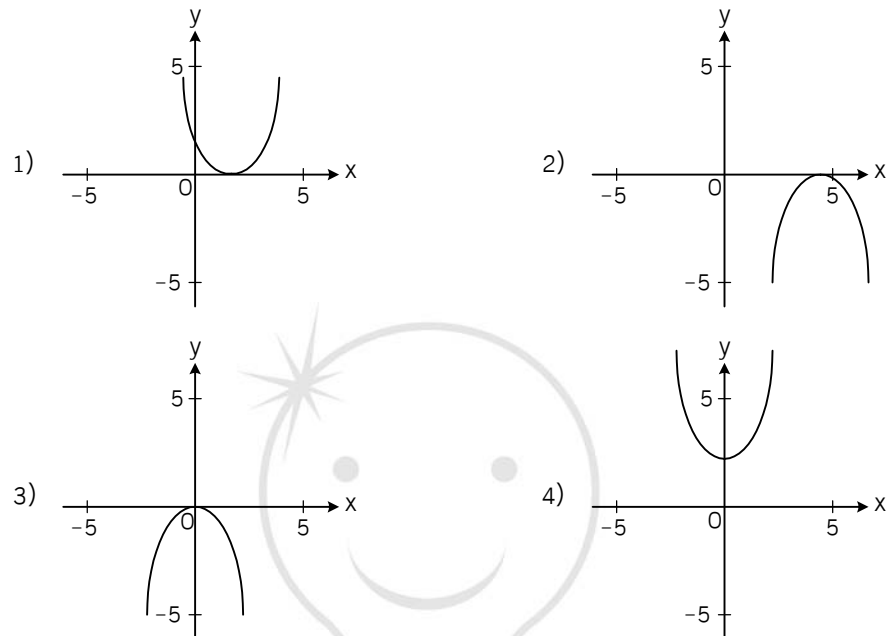


ตัวอย่างที่ 8 ต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่ 65 ตารางวา โดยด้านยาวของที่ดินยาวกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่ 3 วา จะต้องใช้รั้วที่มีความยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 30 วา
- 2) 36 วา
- 3) 42 วา
- 4) 48 วา



ตัวอย่างที่ 9 เมื่อเขียนกราฟของ $y = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a \neq 0$ เพื่อหาคำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ กราฟในข้อใดต่อไปนี้แสดงว่าสมการไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง



ตัวอย่างที่ 10 แม่ค้านำเมล็ดมะม่วงหิมพานต์ 1 กิโลกรัม ถั่วลิสง 3 กิโลกรัม และเมล็ดฟักทอง 4 กิโลกรัม มาผสมกัน แล้วแบ่งใส่ถุง ถุงละ 100 กรัม ถ้าแม่ค้าซื้อเมล็ดมะม่วงหิมพานต์ ถั่วลิสง และเมล็ดฟักทองมาในราคากิโลกรัมละ 250 บาท 50 บาท และ 100 บาท ตามลำดับ แล้วแม่ค้าจะต้องขายเมล็ดพืชผสมถุงละ 100 กรัมนี้ ในราคาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้จึงจะได้กำไร 20% เมื่อขายหมด

- | | |
|-----------|-----------|
| 1) 10 บาท | 2) 12 บาท |
| 3) 14 บาท | 4) 16 บาท |

ตัวอย่างที่ 11 เซตคำตอบของอสมการ $-1 \leq \sqrt{2} + \frac{x}{1 - \sqrt{2}} \leq 1$ คือเซตใดต่อไปนี้

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $[\sqrt{2} - 1, 1]$ | 2) $[\sqrt{2} - 1, 2]$ |
| 3) $[3 - 2\sqrt{2}, 1]$ | 4) $[3 - 2\sqrt{2}, 2]$ |

ค่าสัมบูรณ์

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์

1. $|x| = a$ ก็ต่อเมื่อ $x = a$ หรือ $x = -a$

2. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

$$|x| < a \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad -a < x < a$$

$$|x| \leq a \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x < -a \quad \text{หรือ} \quad x > a$$

$$|x| \geq a \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x \leq -a \quad \text{หรือ} \quad x \geq a$$

ตัวอย่างที่ 12 พิจารณาสมการ $|x - 7| = 6$ ข้อสรุปใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

- 1) คำตอบหนึ่งของสมการมีค่าระหว่าง 10 และ 15
- 2) ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการมีค่าเท่ากับ 14
- 3) สมการนี้มีคำตอบมากกว่า 2 คำตอบ
- 4) ในบรรดาคำตอบทั้งหมดของสมการ คำตอบที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าน้อยกว่า 3

ตัวอย่างที่ 13 จำนวนสมาชิกของเซต $\left\{ x \mid x = \left(\left(a + \frac{1}{|a|} \right)^2 - \left(|a| - \frac{1}{a} \right)^2 \right) \right\}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับ 0 เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) 1
- 2) 2[®]
- 3) 3
- 4) มากกว่าหรือเท่ากับ 4

ตัวอย่างที่ 14 ผลบวกของคำตอบทุกคำตอบของสมการ $x^3 - 2x = |x|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) 0
- 2) $\sqrt{3}$
- 3) $\sqrt{3} - 1$
- 4) $\sqrt{3} + 1$

ตัวอย่างที่ 15 ผลเฉลยของสมการ $2|5 - x| = 1$ อยู่ในช่วงใด

- 1) $(-10, -5)$
- 2) $(-6, -4)$
- 3) $(-4, 5)$
- 4) $(-3, 6)$

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

คู่อันดับ (a, b) โดยที่ a คือ สมาชิกตัวหน้า และ b คือ สมาชิกตัวหลัง

บทนิยาม $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ผลคูณคาร์ทีเซียน กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B คือ $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ และ } b \in B\}$

เช่น ให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{a, b, c\}$

จะได้ $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ

1. $A \times \phi = \phi \times A = \phi$
2. $A \times B \neq B \times A$
3. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{a, b\}$ คู่อันดับในข้อต่อไปนี้เป็นสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน

$A \times B$

1) $(2, b)$

2) (b, a)

3) $(a, 1)$

4) $(1, 2)$

ความสัมพันธ์ คือ เซตของคู่อันดับที่เกี่ยวข้องกันตามเงื่อนไขที่กำหนดและเป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียน

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เขียนแทนด้วย $r \subset A \times B$

r เป็นความสัมพันธ์ใน A เขียนแทนด้วย $r \subset A \times A$

* จำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดจาก A ไป B เท่ากับ $2^{n(A) \times n(B)}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$$

$$S = \left\{ (a, b) \in A \times B \mid b = 2a + \frac{a}{2} \right\}$$

จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $r = \{(m, n) \in A \times A \mid m \leq n\}$ แล้วจำนวนสมาชิกในความสัมพันธ์ r เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1) 8

2) 10

3) 12

4) 16

โดเมนของ r เขียนแทนด้วย D_r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r สัญลักษณ์ คือ

$$D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$$

เรนจ์ของ r เขียนแทนด้วย R_r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r สัญลักษณ์ คือ

$$R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$$

$$\text{เช่น จาก } r = \{(-2, 4), (-1, 1), (1, 1)\}$$

$$\text{จะได้ } D_r = \{-2, -1, 1\}$$

$$\text{และ } R_r = \{1, 4\}$$

การหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ของ $r \subset R \times R$

1. โดเมน หาโดยจัดรูปสมการเป็น y ในรูปของ x และพิจารณาว่า x สามารถเป็นจำนวนจริงใดได้บ้างที่สามารถหาค่า y ที่เป็นจำนวนจริงได้

2. เรนจ์ หาโดยจัดรูปสมการเป็น x ในรูปของ y และพิจารณาว่า y สามารถเป็นจำนวนจริงใดได้บ้าง

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่คู่อันดับทุกๆ ตัวในความสัมพันธ์ ถ้าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับสองคู่เท่ากัน แล้วสมาชิกตัวหลังของทั้งสองคู่อันดับต้องเท่ากันด้วย

นั่นคือ r เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ แล้ว $y = z$

r ไม่เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ มี $(x, y) \in r$ และ $(x, z) \in r$ ซึ่ง $y \neq z$

การตรวจสอบฟังก์ชัน

1. กรณี r เขียนแบบแจกแจงสมาชิก

ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ ซึ่งเป็นสมาชิกใน r จับคู่กับสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับมากกว่า 1 ตัวขึ้นไป r ไม่เป็นฟังก์ชัน

เช่น $r_1 = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 4)\}$

จะได้ r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ b จับคู่กับ 2 และ 3

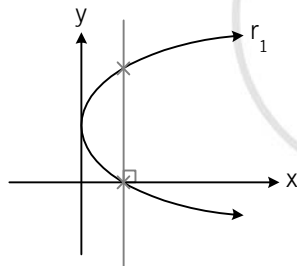
$r_2 = \{(p, 2), (q, 4), (r, 6)\}$

จะได้ r_2 เป็นฟังก์ชัน เพราะสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทุกตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียวเท่านั้น

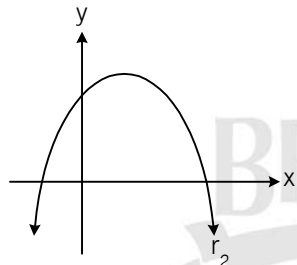
2. กรณี r วาดเป็นรูปกราฟ

ให้ลากเส้นตรงตั้งฉากกับแกน x ถ้ามีกรณีที่เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x ตัดกับกราฟของ r เกิน 1 จุดขึ้นไป r ไม่เป็นฟังก์ชัน

เช่น



เนื่องจากมีกรณีที่เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x ตัดกับกราฟ r เกิน 1 จุด
ดังนั้น r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน



เนื่องจากไม่มีกรณีที่เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x ตัดกับกราฟ r เกิน 1 จุด
ดังนั้น r_2 เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 4 ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4)\}$

2) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

3) $\{(1, 3), (1, 2), (1, 1), (1, 4)\}$

4) $\{(1, 3), (2, 1), (3, 3), (4, 1)\}$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $A = \{1, 99\}$ ความสัมพันธ์ใน A ในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

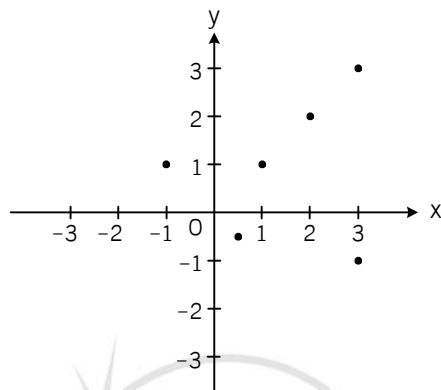
1) เท่ากับ

2) ไม่เท่ากับ

3) หารลงตัว

4) หารไม่ลงตัว

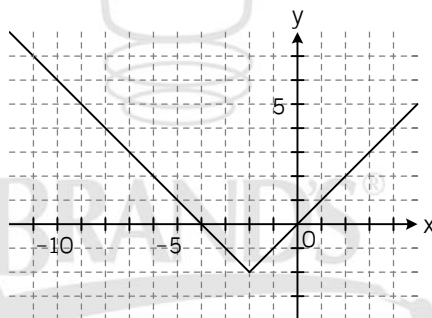
ตัวอย่างที่ 6 จากความสัมพันธ์ r ที่แสดงด้วยกราฟดังรูป



ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) r เป็นฟังก์ชันเพราะ $(1, 1)$, $(2, 2)$ และ $(3, 3)$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
- 2) r เป็นฟังก์ชันเพราะมีจำนวนจุดเป็นจำนวนจำกัด
- 3) r ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมีจุด $(3, 3)$ และ $(3, -1)$ อยู่บนกราฟ
- 4) r ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมีจุด $(1, 1)$ และ $(-1, 1)$ อยู่บนกราฟ

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้กราฟของฟังก์ชัน f เป็นดังนี้



ค่าของ $11f(-11) - 3f(-3)f(3)$ คือข้อใด

- 1) 57
- 2) 68
- 3) 75
- 4) 86

ตัวอย่างที่ 8 ถ้า $f(x) = \sqrt{3-x}$ และ $g(x) = -2 + |x - 4|$ แล้ว $D_f \cup R_g$ คือข้อใด

- 1) $(-\infty, 3]$
- 2) $[-2, \infty)$
- 3) $[-2, 3]$
- 4) $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างที่ 9 จำนวนในข้อใดต่อไปนี้เป็นสมาชิกของโดเมนของฟังก์ชัน $f = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{x}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x - 1}{x^2 - 1} \right\}$

1) -2

2) -1

3) 0

4) 1

ฟังก์ชันประเภทต่างๆ

ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$

ฟังก์ชันคงที่ (Constant Function) คือ ฟังก์ชันเชิงเส้นที่มี $a = 0$ กราฟของฟังก์ชันจะเป็นเส้นตรงขนานกับแกน X

ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$

ถ้า $a > 0$ กราฟหงาย มีจุดวกกลับเป็นจุดต่ำสุดของฟังก์ชัน และถ้า $a < 0$ กราฟคว่ำ มีจุดวกกลับเป็นจุดสูงสุดของฟังก์ชัน

ถ้ารูปทั่วไปของสมการ คือ $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ จุดวกกลับอยู่ที่ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$ หรือ $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$

ถ้ารูปทั่วไปของสมการ คือ $f(x) = a(x - h)^2 + k$ เมื่อ $a, k \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$ จุดวกกลับอยู่ที่ (h, k)

การแก้สมการโดยใช้กราฟ

1. ในกรณีที่กราฟไม่ตัดแกน x จะไม่มีคำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง

2. กราฟของ $y = a(x + c)^2$ เมื่อ $c > 0$ จะตัดแกน x ที่จุด $(-c, 0)$ สมการมีคำตอบเดียว คือ $x = -c$

กราฟของ $y = a(x - c)^2$ เมื่อ $c > 0$ จะตัดแกน x ที่จุด $(c, 0)$ สมการมีคำตอบเดียว คือ $x = c$

3. นอกเหนือจากนี้กราฟตัดแกน x สองจุด โดยพิจารณาจากการแก้สมการ หรือสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = |x - a| + c$ เมื่อ $a, c \in \mathbb{R}$

ฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ และมีค่าฟังก์ชันคงตัวเป็นช่วงๆ มากกว่าสองช่วง กราฟของฟังก์ชันจะมีรูปคล้ายบันได

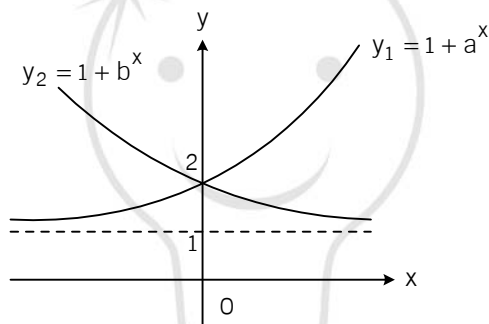
ตัวอย่างที่ 10 ค่าของ a ที่ทำให้กราฟของฟังก์ชัน $y = a(2^x)$ ผ่านจุด $(3, 16)$ คือข้อใดต่อไปนี้

- 1) 2 2) 3
3) 4 4) 5

ตัวอย่างที่ 11 ทุก x ในช่วงใดต่อไปนี้ที่กราฟของสมการ $y = -4x^2 - 5x + 6$ อยู่เหนือแกน x

- $$\begin{array}{ll} 1) \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) & 2) \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) \\ 3) \left(\frac{1}{4}, \frac{6}{7}\right) & 4) \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ถ้ากราฟของฟังก์ชัน $y_1 = 1 + a^x$ และ $y_2 = 1 + b^x$ มีลักษณะดังแสดงในภาพต่อไปนี้



ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) $1 < a < b$
 2) $a < 1 < b$
 3) $b < 1 < a$
 4) $b < a < 1$

ตัวอย่างที่ 13 ถ้าเส้นตรง $x = 3$ เป็นเส้นสมมาตรของกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = -x^2 + (k + 5)x + (k^2 - 10)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง แล้ว f มีค่าสูงสุดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -4 2) 0
3) 6 4) 14
- Summer Camp

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x - 15$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

- 1) $f(x) \geq -17$ ทุกจำนวนจริง x
- 2) $f(-3 - \sqrt{2} - \sqrt{3}) > 0$
- 3) $f(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) = f(1 - \sqrt{3} - \sqrt{5})$
- 4) $f(-1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) > f(-1 - \sqrt{3} - \sqrt{5})$

ตัวอย่างที่ 15 ถ้า $f(x) = -x^2 + x + 2$ แล้วข้อใดสรุปถูกต้อง

- 1) $f(x) \geq 0$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 2$
- 2) จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน f อยู่ในจุดภาคที่สอง
- 3) ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดเท่ากับ 2
- 4) ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 16 ขบวนพาเหรดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขบวนหนึ่ง ประกอบด้วยผู้เดินเป็นแถว แถวละเท่าๆ กัน (มากกว่า 1 แถว และแถวละมากกว่า 1 คน) โดยมีเฉพาะผู้อยูริมด้านนอกทั้งสี่ด้านของขบวนเท่านั้นที่สวมชุดสีแดง ซึ่งมีทั้งหมด 50 คน ถ้า x คือ จำนวนแถวของขบวนพาเหรด และ N คือ จำนวนคนที่อยู่ในขบวนพาเหรด แล้วข้อใดถูกต้อง

- 1) $31x - x^2 = N$
- 2) $29x - x^2 = N$
- 3) $27x - x^2 = N$
- 4) $25x - x^2 = N$



เลขยกกำลัง

สมบัติของเลขยกกำลัง

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ k เป็นจำนวนเต็ม

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(a^m \cdot b^n)^k = a^{mk} \cdot b^{nk}$

5. $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^k = \frac{a^{mk}}{b^{nk}}, b \neq 0$

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$

7. $a^0 = 1, a \neq 0$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนที่มากกว่า 1

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

บทนิยาม กำหนด a เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

ที่ ห.ร.ม. ของ m และ n เท่ากับ 1

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

ตัวอย่างที่ 1 ค่าของ $\sqrt{(-2)^2} + \left(\frac{8^{1/2} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{32}}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1) -1

2) 1

3) 3

4) 5

ตัวอย่างที่ 2 $(\sqrt{18} + 2\sqrt[3]{-125} - 3\sqrt[4]{4})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี

1) -10

2) 10

3) $2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$

4) $5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$

ตัวอย่างที่ 3 $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right)^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{3}{10}$

2) $\frac{7}{10}$

3) $\sqrt{5} - 2$

4) $\sqrt{6} - 2$

ตัวอย่างที่ 4 $\frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}} + \frac{2^6}{(64)^{3/2}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $-\frac{13}{24}$

2) $-\frac{5}{6}$

3) $\frac{2}{3}$

4) $\frac{19}{24}$

ตัวอย่างที่ 5 $(\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32})^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 60

2) $60\sqrt{2}$

3) $100\sqrt{2}$

4) 200

ตัวอย่างที่ 6 ข้อใดมีค่าต่างจากข้ออื่น

1) $(-1)^0$

2) $(-1)^{0.2}$

3) $(-1)^{0.4}$

4) $(-1)^{0.8}$

ตัวอย่างที่ 7 $(|4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}| - |3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}| + |4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}|)^2$ เท่ากับข้อใด

1) 0

2) 180

3) 192

4) 200

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนคู่บวก

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(\sqrt[n]{a})^n = |a|$

ข. $(\sqrt[n]{a^n}) = |a|$

ข้อใดถูกต้อง

1) ก. และ ข.

2) ก. เท่านั้น

3) ข. เท่านั้น

4) ก. และ ข. ผิด

สมการในรูปเลขยกกำลัง

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1 และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ

จะได้ว่า 1. $a^m = a^n$ ก็ต่อเมื่อ $m = n$

2. $a^m = b^m$ ก็ต่อเมื่อ $m = 0$ และ $a, b \neq 0$

ตัวอย่างที่ 9 ถ้า $\left(\sqrt{\frac{8}{125}}\right)^4 = \left(\frac{16}{625}\right)^{1/x}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{3}{4}$

2) $\frac{2}{3}$

3) $\frac{3}{2}$

4) $\frac{4}{3}$

ตัวอย่างที่ 10 ถ้า $8^x - 8^{(x+1)} + 8^{(x+2)} = 228$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{3}$

2) $\frac{2}{3}$

3) $\frac{4}{3}$

4) $\frac{5}{3}$

ตัวอย่างที่ 11 ถ้า $\left(3 + \frac{3}{8}\right)^{3x} = \frac{16}{81}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $-\frac{4}{9}$

2) $-\frac{2}{9}$

3) $-\frac{1}{9}$

4) $\frac{1}{9}$

ตัวอย่างที่ 12 ถ้า $4^a = \sqrt{2}$ และ $16^{-b} = \frac{1}{4}$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตัวอย่างที่ 13 ค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{2}^{(x^2)} = \frac{2^{(4x)}}{4^4}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 2

2) 3

3) 4

4) 5

อสมการในรูปเลขยกกำลัง

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1 และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ

จะได้ว่า 1. $a^m < a^n$ และ $a > 1$ จะได้ว่า $m < n$

2. $a^m < a^n$ และ $0 < a < 1$ จะได้ว่า $m > n$

ตัวอย่างที่ 14 ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1) $(24)^{30} < 2^{20} \cdot 3^{30} \cdot 4^{40}$

2) $(24)^{30} < 2^{30} \cdot 3^{20} \cdot 4^{40}$

3) $2^{20} \cdot 3^{40} \cdot 4^{30} < (24)^{30}$

4) $2^{30} \cdot 3^{40} \cdot 4^{20} < (24)^{30}$

ตัวอย่างที่ 15 เซตคำตอบของสมการ $4(2x^2-4x-5) \leq \frac{1}{32}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ 2) $\left[-\frac{5}{2}, 1\right]$ 3) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 4) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$

ตัวอย่างที่ 16 ข้อใดต่อไปนี้ผิด

- 1) $\sqrt{0.9+10} < \sqrt{0.9} + \sqrt{10}$ 2) $(\sqrt{0.9})(\sqrt[4]{0.9}) < 0.9$
3) $(\sqrt{0.9})(\sqrt[3]{1.1}) < (\sqrt{1.1})(\sqrt[3]{0.9})$ 4) $\sqrt[300]{125} < \sqrt[200]{100}$

ตัวอย่างที่ 17 อสมการในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

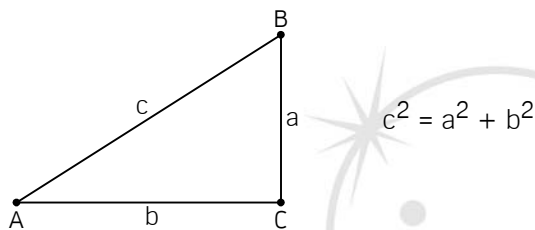
- 1) $2^{1000} < 3^{600} < 10^{300}$ 2) $3^{600} < 2^{1000} < 10^{300}$
3) $3^{600} < 10^{300} < 2^{1000}$ 4) $10^{300} < 2^{1000} < 3^{600}$



อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

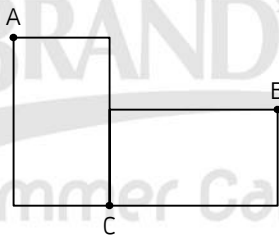
ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมี $\angle C$ เป็นมุมฉาก c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีพื้นที่ 600 ตารางเซนติเมตร ถ้าด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาวเป็น 75% ของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่ง แล้วเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้ยาวกี่เซนติเมตร

- 1) 120 2) 40 3) $60\sqrt{2}$ 4) $20\sqrt{2}$

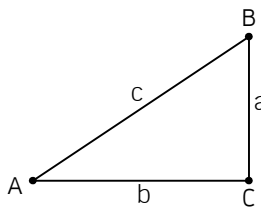
ตัวอย่างที่ 2 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปมีขนาดเท่ากัน โดยมีเส้นทแยงมุมยาวเป็นสองเท่าของด้านกว้าง ถ้านำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองมาวางต่อกันดังรูป จุด A และจุด B อยู่ห่างกันเป็นระยะกี่เท่าของด้านกว้าง



- 1) 1.5 2) 3 3) $\sqrt{2}$ 4) $2\sqrt{2}$

อัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

บทนิยาม กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



ไซน์ (sine) ของมุม A = $\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

โคไซน์ (cosine) ของมุม A = $\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

แทนเจนต์ (tangent) ของมุม A = $\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}, \tan A = \frac{a}{b}$$

และยังมีอัตราส่วนอื่นๆ อีก คือ

$$1. \csc A = \frac{1}{\sin A}, \sec A = \frac{1}{\cos A}, \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

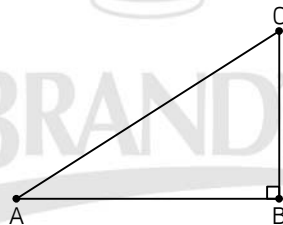
$$2. \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$3. \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$4. \tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$5. 1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

ความสัมพันธ์ระหว่างมุม A กับมุม $90^\circ - A$ ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



$$\sin A = \cos (90^\circ - A), \csc A = \sec (90^\circ - A)$$

$$\cos A = \sin (90^\circ - A), \sec A = \csc (90^\circ - A)$$

$$\tan A = \cot (90^\circ - A), \cot A = \tan (90^\circ - A)$$

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

มุม	sin	cos	tan	csc	sec	cot
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

การเปรียบเทียบมาตรการวัดมุมระบบอังกฤษและระบบเรเดียน

$$360^\circ = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

$$180^\circ = \pi \text{ เรเดียน}$$

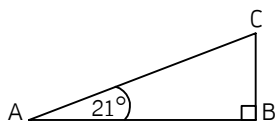
$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน}$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ เรเดียน}$$

ตัวอย่างที่ 3



จากรูป ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $\sin 21^\circ = \cos 69^\circ$
- 2) $\sin 21^\circ = \cos 21^\circ$
- 3) $\cos 21^\circ = \tan 21^\circ$
- 4) $\tan 21^\circ = \cos 69^\circ$

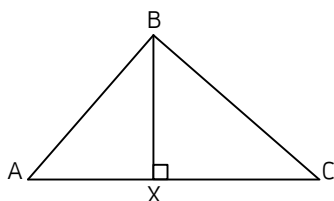
ตัวอย่างที่ 4 ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $\sin 30^\circ < \sin 45^\circ$
- 2) $\cos 30^\circ < \cos 45^\circ$
- 3) $\tan 45^\circ < \cot 45^\circ$
- 4) $\tan 60^\circ < \cot 60^\circ$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ตาราง A ตาราง B และตาราง C เป็นตารางหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมขนาดต่างๆ ดังนี้

ตาราง A		ตาราง B		ตาราง C	
θ	sin θ	θ	cos θ	θ	tan θ
40°	0.643	40°	0.766	40°	0.839
41°	0.656	41°	0.755	41°	0.869
42°	0.669	42°	0.743	42°	0.900

ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก มุม C มีขนาด 41° และส่วนสูง BX ยาว 1 หน่วย แล้วความยาวของส่วนของเส้นตรง AX เป็นดังข้อใดต่อไปนี้



- 1) ปรากฏอยู่ในตาราง A
- 2) ปรากฏอยู่ในตาราง B
- 3) ปรากฏอยู่ในตาราง C
- 4) ไม่ปรากฏอยู่ในตาราง A, B และ C

ตัวอย่างที่ 6 ถ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีความสูง 1 หน่วย แล้วด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ หน่วย 3) $\frac{4}{3}$ หน่วย 4) $\frac{3}{2}$ หน่วย

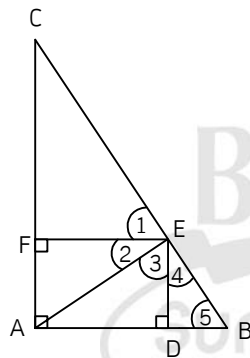
ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\cos B = \frac{2}{3}$ ถ้าด้าน BC ยาว 1 หน่วย แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ตารางหน่วย 2) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ตารางหน่วย
3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ตารางหน่วย 4) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ 12 หน่วย และ $\tan \hat{A}BD = \frac{1}{3}$ ถ้า AE ตั้งฉากกับ BD ที่จุด E แล้ว AE ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ หน่วย 2) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ หน่วย
3) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ หน่วย 4) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 9



พิจารณารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ โดยที่ $\hat{C}FE$, $\hat{C}AB$, $\hat{A}EB$ และ $\hat{E}DB$ ต่างเป็นมุมฉาก ข้อใดต่อไปนี้ผิด

- 1) $\sin (\hat{1}) = \sin (\hat{5})$
2) $\cos (\hat{3}) = \cos (\hat{5})$
3) $\sin (\hat{2}) = \cos (\hat{4})$
4) $\cos (\hat{2}) = \sin (\hat{3})$

ตัวอย่างที่ 10 พิจารณาดาวหางฮัตตราส่วนตรีโกณมิติของมุมขนาดต่างๆ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$
72°	0.951	0.309
73°	0.956	0.292
74°	0.961	0.276
75°	0.966	0.259

มุมภายในที่มีขนาดเล็กที่สุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาว 7, 24 และ 25 หน่วย มีขนาดใกล้เคียงกับข้อใดมากที่สุด

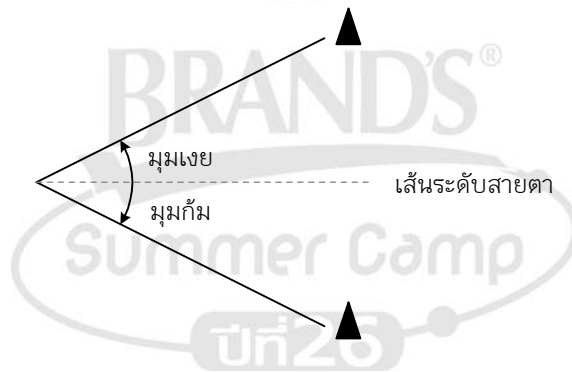
- 1) 15° 2) 16° 3) 17° 4) 18°

ตัวอย่างที่ 11 มุมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีขนาดเท่ากับ 60° องศา ถ้าเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมนี้ยาว $3 - \sqrt{3}$ ฟุต แล้วด้านที่ยาวเป็นอันดับสองมีความยาวเท่ากับข้อใด

- 1) $2 - \sqrt{3}$ ฟุต 2) $2 + \sqrt{3}$ ฟุต
3) $2\sqrt{3} - 3$ ฟุต 4) $2\sqrt{3} + 3$ ฟุต

มุมก้มหรือมุมกดลง หมายถึง มุมที่วัดจากเส้นระดับสายตาไปยังเส้นแนวการมองเห็นวัตถุอยู่ต่ำกว่าเส้นระดับสายตา

มุมเงยหรือมุมยกขึ้น หมายถึง มุมที่วัดจากเส้นระดับสายตาไปยังเส้นแนวการมองเห็นวัตถุอยู่สูงกว่าเส้นระดับสายตา



ตัวอย่างที่ 12 กล้องวงจรปิดซึ่งถูกติดตั้งอยู่สูงจากพื้นถนน 2 เมตร สามารถจับภาพได้ต่ำที่สุดที่มุมก้ม 45° และสูงที่สุดที่มุมก้ม 30° ระยะทางบนพื้นถนนในแนวกล้องที่กล้องนี้สามารถจับภาพได้คือเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.73$)

- 1) 1.00 เมตร 2) 1.46 เมตร 3) 2.00 เมตร 4) 3.46 เมตร

ลำดับและอนุกรม

ลำดับ (Sequences)

บทนิยาม ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก หรือโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก เรียกว่า ลำดับจำกัด (Finite Sequences)

ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกว่า ลำดับอนันต์ (Infinite Sequences)

ตัวอย่างที่ 1 ใน 40 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 3 + (-1)^n$ มีกี่พจน์ ที่มีค่าเท่ากับพจน์ที่ 40

- 1) 10 2) 20 3) 30 4) 40

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequences)

บทนิยาม ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้ เรียกว่า ผลต่างร่วม (Common Difference)

- เมื่อกำหนดให้พจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ a_1 และผลต่างร่วม คือ d โดยที่ $d = a_{n+1} - a_n$ พจน์ที่ n ของลำดับนี้ คือ $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- ลำดับเลขคณิต n พจน์แรก คือ $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$

ตัวอย่างที่ 2 ลำดับเลขคณิตในข้อใดต่อไปนี้มีบางพจน์เท่ากับ 40

- 1) $a_n = 1 - 2n$ 2) $a_n = 1 + 2n$ 3) $a_n = 2 - 2n$ 4) $a_n = 2 + 2n$

ตัวอย่างที่ 3 พจน์ที่ 31 ของลำดับเลขคณิต $-\frac{1}{20}, -\frac{1}{30}, -\frac{1}{60}, \dots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) $\frac{5}{12}$ 2) $\frac{13}{30}$ 3) $\frac{9}{20}$ 4) $\frac{7}{15}$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่ง $a_{30} - a_{10} = 30$ แล้ว ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) 1.25 2) 1.5 3) 1.75 4) 2.0

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต ผลบวกของพจน์ที่ 40 และพจน์ที่ 42 เท่ากับข้อใด

- 1) -18 2) -19 3) -37 4) -38

ตัวอย่างที่ 6 ในสวนป่าแห่งหนึ่ง เจ้าของปลูกต้นยูคาลิปตัสเป็นแถวดังนี้ แถวแรก 12 ต้น แถวที่สอง 14 ต้น แถวที่สาม 16 ต้น โดยปลูกเพิ่มเช่นนี้ตามลำดับเลขคณิต ถ้าเจ้าของปลูกต้นยูคาลิปตัสไว้ทั้งหมด 15 แถว จะมีต้นยูคาลิปตัสในสวนป่านี้อย่างไรทั้งหมดกี่ต้น

ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequences)

บทนิยาม ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่ $n + 1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้ เรียกว่า อัตราส่วนร่วม (Common Ratio)

- เมื่อกำหนดพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตเป็น a_1 และอัตราส่วนร่วม คือ r โดยที่ $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
- ลำดับเรขาคณิต n พจน์แรก คือ $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ a_1, a_2, a_3 เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = 2$ และ $a_3 = 200$ ถ้า a_2 คือค่าในข้อใด ข้อหนึ่งต่อไปนี้ แล้วข้อดังกล่าวคือข้อใด

- 1) -20 2) -50 3) 60 4) 100

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต พิจารณาลำดับสามลำดับต่อไปนี้

- ก. $a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \dots$
ข. $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, \dots$
ค. $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1) ทั้งสามลำดับเป็นลำดับเรขาคณิต 2) มีหนึ่งลำดับไม่เป็นลำดับเรขาคณิต
3) มีสองลำดับไม่เป็นลำดับเรขาคณิต 4) ทั้งสามลำดับไม่เป็นลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 9 พจน์ที่ 16 ของลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{625}, \frac{1}{125\sqrt{5}}, \frac{1}{125}, \dots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $25\sqrt{5}$ 2) 125
3) $125\sqrt{5}$ 4) 625

ตัวอย่างที่ 10 ลำดับในข้อใดต่อไปนี้ เป็นลำดับเรขาคณิต

1) $a_n = 2^n \cdot 3^{2n}$

2) $a_n = 2^n + 4^n$

3) $a_n = 3^{n^2}$

4) $a_n = (2n)^n$

อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series)

เมื่อ	$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$	เป็นลำดับเลขคณิต
จะได้ว่า	$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$	เป็นอนุกรมเลขคณิต

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

คือ $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

หรือ $S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$

ตัวอย่างที่ 11 ค่าของ $1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 101$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 970

2) 1020

3) 1050

4) 1071

ตัวอย่างที่ 12 ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่ง $a_2 + a_3 + \dots + a_9 = 100$

แล้ว $S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 120

2) 125

3) 130

4) 135

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $S = \{101, 102, 103, \dots, 999\}$ ถ้า a เท่ากับผลบวกของจำนวนคู่ทั้งหมดใน S และ b เท่ากับผลบวกของจำนวนคี่ทั้งหมดใน S แล้ว $b - a$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -550

2) -500

3) -450

4) 450

อนุกรมเรขาคณิต (Geometrics Series)

เมื่อ	$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$	เป็นลำดับเรขาคณิต
จะได้ว่า	$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$	เป็นอนุกรมเรขาคณิต

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \text{ เมื่อ } r \neq 1$$

ตัวอย่างที่ 14 ข้อใดต่อไปนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 100 พจน์

- 1) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + \dots + 199$
- 2) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)} + \dots + \frac{1}{199}$
- 3) $1 + 2 + 4 + \dots + (2^{n-1}) + \dots + 2^{199}$
- 4) $\frac{1}{5} + \frac{1}{125} + \frac{1}{3125} + \dots + \frac{1}{5^{2n-1}} + \dots + \frac{1}{5^{199}}$

ตัวอย่างที่ 15 ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $1 - 2 + 4 - 8 + \dots + 256$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) -171
- 2) -85
- 3) 85
- 4) 171

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 2

ถ้า $S_{10} - S_8 = 32$ แล้วพจน์ที่ 9 ของอนุกรมนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) $\frac{16}{3}$
- 2) $\frac{20}{3}$
- 3) $\frac{26}{3}$
- 4) $\frac{32}{3}$

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ถ้า $a_2 = 8$ และ $a_5 = -64$ แล้วผลบวกของ 10 พจน์แรกของลำดับนี้เท่ากับข้อใด

- 1) 2048
- 2) 1512
- 3) 1364
- 4) 1024

ความน่าจะเป็น

กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

1. กฎการบวก ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งแบ่งออกเป็น k กรณี โดยที่กรณีที่ 1 มีจำนวน n_1 วิธี
กรณีที่ 2 มีจำนวน n_2 วิธี
กรณีที่ 3 มีจำนวน n_3 วิธี
 $\vdots$
กรณีที่ k มีจำนวน n_k วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีในการทำงานทั้งหมดจะเท่ากับ $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$ วิธี
2. กฎการคูณ ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งแบ่งออกเป็น k ขั้นตอน โดยที่ขั้นตอนที่ 1 มีจำนวน n_1 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 มีจำนวน n_2 วิธี
ขั้นตอนที่ 3 มีจำนวน n_3 วิธี
 $\vdots$
ขั้นตอนที่ k มีจำนวน n_k วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีในการทำงานทั้งหมดจะเท่ากับ $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ วิธี

แฟกทอเรียล

นิยาม กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ขึ้นไป

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

เช่น $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

* $0! = 1$

- ตัวอย่างที่ 1 ในการคัดเลือกคณะกรรมการหมู่บ้านซึ่งประกอบด้วยประธานฝ่ายชาย 1 คน ประธานฝ่ายหญิง 1 คน กรรมการฝ่ายชาย 1 คน และกรรมการฝ่ายหญิง 1 คน จากผู้สมัครชาย 4 คน และหญิง 8 คน มีวิธีการเลือกคณะกรรมการได้กี่วิธี
- 1) 168 วิธี
 - 2) 324 วิธี
 - 3) 672 วิธี
 - 4) 1344 วิธี

ตัวอย่างที่ 2 มาลีต้องการเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง C โดยต้องเดินทางผ่านไปยังเมือง B ก่อน จากเมือง A ไปเมือง B มาลีสามารถเลือกเดินทางโดยรถยนต์ รถไฟ หรือเครื่องบินได้ แต่จากเมือง B ไปเมือง C สามารถเดินทางไปทางเรือ รถยนต์ รถไฟ หรือเครื่องบิน ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนวิธีในการเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง C ที่จะต้องเดินทางโดยรถไฟเป็นจำนวน 1 ครั้ง

- 1) 5 2) 6 3) 8 4) 9

ตัวอย่างที่ 3 ครอบครัวหนึ่งมีพี่น้อง 6 คน เป็นชาย 2 คน หญิง 4 คน จำนวนวิธีที่จะจัดให้คนทั้ง 6 คนยืนเรียงกันเพื่อถ่ายรูป โดยให้ชาย 2 คนยืนอยู่ริมสองข้างเสมอเท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนวิธี

- 1) 12 วิธี 2) 24 วิธี 3) 36 วิธี 4) 48 วิธี

ตัวอย่างที่ 4 ตู้โทรศัพท์มีระบบล็อกที่เป็นรหัสประกอบด้วยเลขโดด 0 ถึง 9 จำนวน 3 หลัก จำนวนรหัสทั้งหมดที่มีบางหลักซ้ำกันคือเท่าใด

ตัวอย่างที่ 5 จำนวนวิธีในการจัดให้หญิง 3 คน และชาย 3 คน นั่งเรียงกันเป็นแถว โดยให้สามีภรรยาคนหนึ่งนั่งติดกันเสมอมีทั้งหมดกี่วิธี

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองใดๆ ซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรก็ได้บ้าง แต่ไม่สามารถทำนายผลล่วงหน้าได้

ความน่าจะเป็น คือ อัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจกับจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ เขียนแทนด้วย $P(E)$

$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ } E \text{ คือ } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

โดยที่ $n(E)$ คือ จำนวนของเหตุการณ์ที่สนใจ

$n(S)$ คือ จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

สมบัติของความน่าจะเป็น

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(\phi) = 0, P(S) = 1$
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
4. $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$
5. $P(E) = 1 - P(E')$ เมื่อ $P(E')$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. การทดลองสุ่มเป็นการทดลองที่ทราบผลลัพธ์อาจเป็นอะไรได้บ้าง

ข. แต่ละผลลัพธ์ของการทดลองสุ่มมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน

ข้อสรุปใดต่อไปนี้เป็นข้อถูกต้อง

1) ก. และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 7 โรงเรียนแห่งหนึ่งมีรถโรงเรียน 3 คัน นักเรียน 9 คน กำลังเดินทางไปขึ้นรถโรงเรียนโดยสุ่มความน่าจะเป็นที่ไม่มีนักเรียนคนใดขึ้นรถคันแรกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^9$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^9$

3) $\left(\frac{1}{9}\right)^3$

4) $\left(\frac{2}{9}\right)^3$

ตัวอย่างที่ 8 โรงแรมแห่งหนึ่งมีห้องว่างชั้นที่หนึ่ง 15 ห้อง ชั้นที่สอง 10 ห้อง ชั้นที่สาม 25 ห้อง ถ้าครูสมใจต้องการเข้าพักในโรงแรมแห่งนี้โดยวิธีสุ่มแล้ว ความน่าจะเป็นที่ครูสมใจจะได้เข้าพักห้องชั้นที่สองของโรงแรมเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{10}$

2) $\frac{1}{5}$

3) $\frac{3}{10}$

4) $\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 9 ในการหยิบบัตรสามใบ โดยหยิบทีละใบจากบัตรสี่ใบ ซึ่งมีหมายเลข 0, 1, 2 และ 3 ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของตัวเลขบนบัตรสองใบแรกน้อยกว่าตัวเลขบนบัตรใบที่สามเท่ากับข้อใด

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{3}{4}$

3) $\frac{1}{2}$

4) $\frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 10 กล่อง 12 ใบ มีหมายเลขกำกับเป็นเลข 1, 2, ..., 12 และกล่องแต่ละใบบรรจุลูกบอล 4 ลูก เป็นลูกบอลสีดำ สีแดง สีขาว และสีเขียว ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องแต่ละใบ ใบละ 1 ลูก แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงจากกล่องหมายเลขคู่ และได้ลูกบอลสีดำจากกล่องหมายเลขคี่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\left(\frac{1}{12}\right)^2$

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{12}$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$

4) $\left(\frac{1}{12}\right)^4$

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$

$$B = \{5, 6, \dots, 14\}$$

$$\text{และ } r = \{(m, n) | m \in A \text{ และ } n \in B\}$$

ถ้าสุ่มหยิบคู่อันดับ 1 คู่ จากความสัมพันธ์ r แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้คู่อันดับ (m, n) ซึ่ง 5 หาร n แล้วเหลือเศษ 3 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{15}$

2) $\frac{1}{10}$

3) $\frac{1}{5}$

4) $\frac{3}{5}$

ตัวอย่างที่ 12 ช่างไฟคนหนึ่งสุ่มหยิบบันได 1 อันจากบันได 9 อัน ซึ่งมีความยาว 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 และ 12 ฟุต แล้วนำมาพาดกับกำแพง โดยให้ปลายข้างหนึ่งห่างจากกำแพง 3 ฟุต ความน่าจะเป็นที่บันไดจะทำมุมกับพื้นราบน้อยกว่า 60° มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{9}$

2) $\frac{2}{9}$

3) $\frac{3}{9}$

4) $\frac{4}{9}$

ตัวอย่างที่ 13 ถ้าสุ่มตัวเลขหนึ่งตัวจากข้อมูลชุดใดๆ ซึ่งประกอบด้วยตัวเลข 101 ตัว แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1) ความน่าจะเป็นที่ตัวเลขที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่าค่ามัธยฐาน $< \frac{1}{2}$

2) ความน่าจะเป็นที่ตัวเลขที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต $< \frac{1}{2}$

3) ความน่าจะเป็นที่ตัวเลขที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่าค่ามัธยฐาน $> \frac{1}{2}$

4) ความน่าจะเป็นที่ตัวเลขที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต $> \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 14 ทาสีเหรียญสามอันดังนี้ เหรียญแรกด้านหนึ่งทาสีขาวอีกด้านหนึ่งทาสีสีแดง เหรียญที่สอง ด้านหนึ่งทาสีแดงอีกด้านหนึ่งทาสีฟ้า เหรียญที่สามด้านหนึ่งทาสีฟ้าอีกด้านหนึ่งทาสีขาว โยนเหรียญทั้งสามขึ้นพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหน้าต่างกันทั้งหมดเป็นดังข้อใด

1) $\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{4}$

3) $\frac{1}{8}$

4) $\frac{1}{16}$

ตัวอย่างที่ 15 กล่องใบหนึ่งบรรจุสลากหมายเลข 1-10 หมายเลขละ 1 ใบ ถ้าสุ่มหยิบสลากจำนวนสองใบ โดยหยิบทีละใบแบบไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้สลากหมายเลขต่ำกว่า 5 เพียงหนึ่งใบ เท่านั้นเท่ากับข้อใด

1) $\frac{2}{9}$

2) $\frac{8}{15}$

3) $\frac{2}{35}$

4) $\frac{11}{156}$

ตัวอย่างที่ 16 ในการวัดส่วนสูงนักเรียนแต่ละคนในชั้น พบว่านักเรียนที่สูงที่สุด สูง 177 เซนติเมตร และนักเรียนที่เตี้ยที่สุด สูง 145 เซนติเมตร พิจารณาเซตของส่วนสูงต่อไปนี้

$S = \{H | H \text{ เป็นส่วนสูงในหน่วยเซนติเมตรของนักเรียนในชั้น}\}$

$T = \{H | 145 \leq H \leq 177\}$

เซตใดถือเป็นปริภูมิตัวอย่าง (แซมเปิลสเปซ) สำหรับการทดลองสุ่มนี้

1) S และ T

2) S เท่านั้น

3) T เท่านั้น

4) ทั้ง S และ T ไม่เป็นปริภูมิตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 17 ในการคัดเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วย ประธาน รองประธาน และเลขานุการ อย่างละ 1 คน จากหญิง 6 คน และชาย 4 คน ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้จะมีประธาน และรองประธานเป็นหญิงเท่ากับข้อใด

1) $\frac{1}{18}$

2) $\frac{1}{12}$

3) $\frac{1}{9}$

4) $\frac{1}{3}$



สถิติ

สถิติเชิงพรรณนา (Descriptive) คือ การวิเคราะห์ขั้นต้นที่มุ่งวิเคราะห์ เพื่ออธิบายลักษณะกว้างๆ ของข้อมูลชุดนั้น เช่น การวัดค่าแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง ค่าวัดการกระจาย การแจกแจงความถี่ของข้อมูล และการนำเสนอผลสรุปด้วย ตาราง แผนภูมิแท่ง เพื่ออธิบายข้อมูลชุดนั้น

สถิติเชิงอนุมาน (Inferential Statistic) คือ การวิเคราะห์ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากตัวอย่างเพื่ออ้างอิงไปถึงข้อมูลทั้งหมด

องค์ประกอบของสถิติ

1. การเก็บรวบรวมข้อมูล เช่น การสอบถาม การสังเกต การทดลอง เป็นต้น
2. การวิเคราะห์ข้อมูล โดยข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์เพียงส่วนหนึ่ง เรียกว่า กลุ่มตัวอย่างและข้อมูลที่เลือกมาจากข้อมูลทั้งหมด เรียกว่า ประชากร
3. การนำเสนอข้อสรุป

ข้อมูล คือ ข้อความจริงหรือสิ่งที่บ่งบอกถึงสภาพ สถานการณ์หรือปรากฏการณ์ โดยที่ข้อมูลอาจเป็นตัวเลขหรือข้อความก็ได้

สารสนเทศหรือข่าวสาร คือ ข้อมูลที่ผ่านการวิเคราะห์เบื้องต้นหรือขั้นสูงแล้ว

ประเภทของข้อมูล

1. แบ่งตามวิธีเก็บ
 - 1.1 ข้อมูลปฐมภูมิ คือ ข้อมูลที่ผู้ใช้เก็บรวบรวมเอง เช่น การสำมะโน การสำรวจกลุ่มตัวอย่าง
 - 1.2 ข้อมูลทุติยภูมิ คือ ข้อมูลที่ได้จากผู้อื่นเก็บรวบรวมไว้แล้ว เช่น รายงาน บทความ เป็นต้น
2. แบ่งตามลักษณะของข้อมูล
 - 2.1 ข้อมูลเชิงปริมาณ คือ ข้อมูลที่ใช้แทนขนาดหรือปริมาณ ซึ่งวัดออกมาเป็นจำนวนที่สามารถนำมาใช้เปรียบเทียบกันได้โดยตรง
 - 2.2 ข้อมูลเชิงคุณภาพ คือ ข้อมูลที่ไม่สามารถวัดออกมาได้โดยตรง แต่อธิบายลักษณะหรือคุณสมบัติในเชิงคุณภาพได้

ตัวอย่างที่ 1 ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

- 1) สถิติเชิงพรรณนา คือ สถิติของการวิเคราะห์ข้อมูลขั้นต้นที่มุ่งอธิบายลักษณะกว้างๆ ของข้อมูล
- 2) ข้อมูลที่เป็นหมายเลขที่ใช้เรียกสายรถโดยสารประจำทางเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ
- 3) ข้อมูลปฐมภูมิ คือ ข้อมูลที่ผู้ใช้เก็บรวบรวมจากแหล่งข้อมูลโดยตรง
- 4) ข้อมูลที่นักเรียนรวบรวมจากรายงานต่างๆ ที่ได้จากหน่วยงานราชการเป็นข้อมูลปฐมภูมิ

ตัวอย่างที่ 2 ครูสอนวิทยาศาสตร์มอบหมายให้นักเรียน 40 คน ทำโครงการตามความสนใจหลังจากตรวจรายงานโครงการของทุกคนแล้ว ผลสรุปดังนี้

ผลการประเมิน	จำนวนโครงการ
ดีเยี่ยม	3
ดี	20
พอใช้	12
ต้องแก้ไข	5

ข้อมูลที่เก็บรวบรวม เพื่อให้ได้ผลสรุปข้างต้นเป็นข้อมูลชนิดใด

- 1) ข้อมูลปฐมภูมิ เชิงปริมาณ
- 2) ข้อมูลทุติยภูมิ เชิงปริมาณ
- 3) ข้อมูลปฐมภูมิ เชิงคุณภาพ
- 4) ข้อมูลทุติยภูมิ เชิงคุณภาพ

การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น

ข้อมูลเชิงปริมาณที่ใช้ในการวิเคราะห์ทางสถิติมีสองประเภท คือ ข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ ซึ่งจะเห็นค่าของข้อมูลทุกตัวและข้อมูลที่แจกแจงความถี่ จะเห็นเป็นอันตรภาคชั้น

$$\text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น} = \text{ขอบบน} - \text{ขอบล่าง}$$

$$\text{จุดกึ่งกลางอันตรภาคชั้น} = (\text{ขอบบน} + \text{ขอบล่าง}) \div 2$$

ฮิสโทแกรม คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากวางเรียงต่อกันบนแกนนอน โดยมีแกนนอนแทนค่าของตัวแปร ความกว้างของสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนความกว้างของอันตรภาคชั้น และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนความถี่ของแต่ละอันตรภาคชั้น ซึ่งถ้าความกว้างของทุกชั้นเท่ากัน ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมจะแสดงความถี่

แผนภาพต้น-ใบ (Stem-and-Leaf Plot) เป็นวิธีการสร้างแผนภาพเพื่อแจกแจงความถี่และวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น โดยเริ่มจากการนำข้อมูลมาแบ่งกลุ่ม โดยใช้เลขหลักสิบ แล้วนำมาสร้างเป็นลำต้น (Stem) แล้วใช้เลขโดดในหลักหน่วยมาสร้างเป็นใบ (Leaf)

การวัดตำแหน่งของข้อมูล : มีสองขั้นตอน คือ การหาตำแหน่งและการหาค่า

1. ควอร์ไทล์ (Quartiles) คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน โดย Q_1 , Q_2 , และ Q_3 คือ คะแนนของตัวแบ่งทั้ง 3 ตัว

2. เดไซล์ (Deciles) คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วนเท่าๆ กัน โดย D_1 , D_2 , ..., D_9 คือ คะแนนของตัวแบ่งทั้ง 9 ตัว

3. เปอร์เซ็นไทล์ (Percentiles) คือ การแบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่าๆ กัน มี P_1 , ..., P_{99} คือ คะแนนของตัวแบ่งทั้ง 99 ตัว

$$\text{การหาตำแหน่ง : ตำแหน่งของ } Q_r \text{ คือ } \frac{r(N+1)}{4}$$

$$\text{ตำแหน่งของ } D_r \text{ คือ } \frac{r(N+1)}{10}$$

$$\text{ตำแหน่งของ } P_r \text{ คือ } \frac{r(N+1)}{100}$$

การหาค่า : ใช้การเทียบบัญญัติไตรยางศ์

หมายเหตุ เมื่อหาค่าข้อมูลที่มีค่าสูงสุด ต่ำสุด Q_1 , Q_2 และ Q_3 สามารถนำมาสร้างแผนภาพกล่อง (Box-and-Whisker Plot หรือ Box-Plot) โดยแผนภาพจะทำให้เราทราบถึงลักษณะการกระจายของข้อมูล

การวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต, Mean, $\bar{x}$

$$\bar{x} \text{ ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่ } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\bar{x} \text{ ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่ } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{N}$$

ข้อสังเกต 1. $\sum_{i=1}^N x_i = N \bar{x}$

2. $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$

3. $\sum_{i=1}^N (x_i - a)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = \bar{x}$

4. ถ้า $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x}$

$x_1 + k, x_2 + k, x_3 + k, \dots, x_n + k$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x} + k$

$x_1 k, x_2 k, x_3 k, \dots, x_n k$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\bar{x} k$

5. $\bar{x}$ รวม = $\frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$

2. มัธยฐาน, Median, Me

Me สำหรับข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

$$Me = \text{ค่าของข้อมูลตำแหน่งตรงกลาง (ตัวที่ } \frac{N+1}{2} \text{) เมื่อเรียงลำดับข้อมูลแล้ว}$$

ข้อสังเกต 1. การหามัธยฐานมีสองขั้นตอน คือ หาดำแหน่ง และหาค่าโดยใช้สูตรหรือการเทียบบัญญัติไตรยางศ์

2. $\sum_{i=1}^N |x_i - a|$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = Me$

3. ฐานนิยม, Mode, Mo

Mo สำหรับข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

Mo = ค่าของข้อมูลที่มีความถี่มากที่สุด

ข้อสังเกต ใช้ได้กับข้อมูลเชิงคุณภาพ

ตัวอย่างที่ 3 ส่วนสูงของพี่น้อง 2 คน มีพิสัยเท่ากับ 12 เซนติเมตร มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 171 เซนติเมตร ข้อใดต่อไปนี้เป็นส่วนสูงของพี่หรือน้องคนใดคนหนึ่ง

- | | |
|------------------|------------------|
| 1) 167 เซนติเมตร | 2) 172 เซนติเมตร |
| 3) 175 เซนติเมตร | 4) 177 เซนติเมตร |

ตัวอย่างที่ 4 ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย 4, 9, 2, 7, 6, 5, 4, 6, 3, 4 ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อเท็จจริง

- 1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < ฐานนิยม < มัธยฐาน
- 2) ฐานนิยม < มัธยฐาน < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
- 3) ฐานนิยม < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < มัธยฐาน
- 4) มัธยฐาน < ฐานนิยม < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 5 ความสูงในหน่วยเซนติเมตรของนักเรียนกลุ่มหนึ่งซึ่งมี 10 คน เป็นดังนี้

155, 157, 158, 158, 160, 161, 161, 163, 165, 166

ถ้ามีนักเรียนเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งคน ซึ่งมีความสูง 158 เซนติเมตร แล้วค่าสถิติใดต่อไปนี้เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลง

- | | |
|---------------------|------------|
| 1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต | 2) มัธยฐาน |
| 3) ฐานนิยม | 4) พิสัย |

ตัวอย่างที่ 6 การเลือกใช้ค่ากลางของข้อมูลควรพิจารณาสิ่งต่อไปนี้ ยกเว้นข้อใด

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| 1) ลักษณะของข้อมูล | 2) วิธีจัดเรียงลำดับข้อมูล |
| 3) จุดประสงค์ของการนำไปใช้ | 4) ข้อดีและข้อเสียของค่ากลางแต่ละชนิด |

ตัวอย่างที่ 7 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักของพนักงานของบริษัทแห่งหนึ่ง เท่ากับ 48.01 กิโลกรัม บริษัทนี้มีพนักงานชาย 43 คน และพนักงานหญิง 57 คน ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักพนักงานหญิง เท่ากับ 45 กิโลกรัม แล้วน้ำหนักของพนักงานชายทั้งหมดรวมกันเท่ากับข้อใด

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) 2,236 กิโลกรัม | 2) 2,279 กิโลกรัม |
| 3) 2,322 กิโลกรัม | 4) 2,365 กิโลกรัม |

ตัวอย่างที่ 8 แผนภาพต้น-ใบของน้ำหนักในหน่วยกรัมของไข่ไก่ 10 ฟอง เป็นดังนี้

5	7	8		
6	7	8	9	
7	0	4	4	7
8	1			

ข้อสรุปใดเป็นเท็จ

- 1) ฐานนิยมของน้ำหนักไข่ไก่มีเพียงค่าเดียว
- 2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและมัธยฐานของน้ำหนักไข่ไก่มีค่าเท่ากัน
- 3) มีไข่ไก่ 5 ฟองที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 70 กรัม
- 4) ไข่ไก่ที่มีน้ำหนักสูงกว่าฐานนิยมมีจำนวนมากกว่าไข่ไก่ที่มีน้ำหนักเท่ากับฐานนิยม

ตัวอย่างที่ 9 สำหรับข้อมูลเชิงปริมาณใดๆ ที่มีค่าสถิติต่อไปนี้ ค่าสถิติใดจะตรงกับค่าของข้อมูลค่าหนึ่งเสมอ

- 1) พิสัย
- 2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
- 3) มัธยฐาน
- 4) ฐานนิยม

ตัวอย่างที่ 10 ข้อมูลต่อไปนี้แสดงน้ำหนักในหน่วยกิโลกรัม ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง

41, 88, 46, 42, 43, 49, 44, 45, 43, 95, 47, 48

ค่ากลางในข้อใดเป็นค่าที่เหมาะสมที่จะเป็นตัวแทนของข้อมูลชุดนี้

- 1) มัธยฐาน
- 2) ฐานนิยม
- 3) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
- 4) ค่าเฉลี่ยของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

การวัดการกระจายของข้อมูล

1. พิสัย (Range) $\text{Range} = x_{\max} - x_{\min}$

2. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation)

$$\text{S.D.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

ข้อสังเกต

1. ความแปรปรวน (Variance) $= \text{S.D.}^2 = s^2$
2. $\text{S.D.} \geq 0$
3. $\text{S.D.} = 0 \leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x}$
4. ถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น S.D. ความแปรปรวนเป็น S.D.^2
 $x_1 + k, x_2 + k, \dots, x_n + k$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น S.D. ความแปรปรวนเป็น S.D.^2
 $x_1k, x_2k, \dots, x_nk$ มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $\text{S.D.}|k|$ ความแปรปรวนเป็น S.D.^2k^2
5. The 95% Rule กล่าวว่า มีจำนวนข้อมูลที่อยู่ในช่วง $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ ประมาณ

95% ของจำนวนข้อมูลทั้งหมด

6. โดย The 95% Rule ได้ว่า $s \approx \frac{\text{Range}}{4}$

ความสัมพันธ์ของ $\bar{x}$, Me และ Mo

$\bar{x} = \text{Me} = \text{Mo}$	$\bar{x} > \text{Me} > \text{Mo}$	$\bar{x} < \text{Me} < \text{Mo}$
โค้งปกติ	โค้งเบ้ขวา	โค้งเบ้ซ้าย

การสำรวจความคิดเห็น

1. ขอบเขตของการสำรวจ กำหนดด้วยพื้นที่ ลักษณะผู้ให้ข้อมูล การมีส่วนร่วมได้ส่วนเสียกับข้อมูล
2. วิธีเลือกตัวอย่าง การสุ่มตัวอย่าง (Sampling) การเลือกตัวอย่างแบบชั้นภูมิ การเลือกตัวอย่างแบบหลายขั้นและการเลือกตัวอย่างแบบกำหนดโควตา
3. การสร้างแบบสำรวจความคิดเห็น แบบสำรวจที่ดีประกอบด้วย ลักษณะของผู้ตอบที่คาดว่าจะมีผลต่อการแสดงความคิดเห็น ความคิดเห็นของผู้ตอบในด้านต่างๆ และข้อเสนอแนะ โดยต้องไม่เป็นคำถามที่ซ้ำนำ และมีจำนวนไม่มากเกินไป ตลอดจนตรวจสอบความสอดคล้องของความรู้ของผู้ให้ข้อมูลกับเรื่องที่สอบถาม
4. การประมวลผลและวิเคราะห์ความคิดเห็น
 1. ร้อยละของผู้ตอบแบบสำรวจความคิดเห็นในแต่ละด้านที่เกี่ยวข้อง
 2. ระดับความคิดเห็นเฉลี่ย

ตัวอย่างที่ 11 ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 20 มัธยฐานเท่ากับ 25 และฐานนิยมเท่ากับ 30 ข้อสรุปใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

- 1) ลักษณะการกระจายของข้อมูลเป็นการกระจายที่เบ้ทางซ้าย
- 2) ลักษณะการกระจายของข้อมูลเป็นการกระจายที่เบ้ทางขวา
- 3) ลักษณะการกระจายของข้อมูลเป็นการกระจายแบบสมมาตร
- 4) ไม่สามารถสรุปลักษณะการกระจายของข้อมูลได้

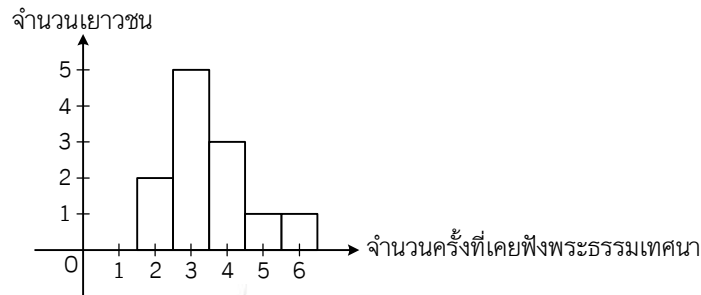
ตัวอย่างที่ 12 พิจารณาข้อมูลต่อไปนี้ 10, 5, 6, 9, 12, 15, 8, 18 ค่าของ P_{80} ใกล้เคียงกับข้อใดต่อไปนี้มากที่สุด

- 1) 15.1
- 2) 15.4
- 3) 15.7
- 4) 16.0

ตัวอย่างที่ 13 ในกรณีที่มีข้อมูลจำนวนมาก การนำเสนอข้อมูลในรูปแบบใดต่อไปนี้ทำให้เห็นการกระจายของข้อมูลได้ชัดเจนน้อยที่สุด

- 1) ตารางแจกแจงความถี่
- 2) แผนภาพต้น-ใบ
- 3) ฮิสโทแกรม
- 4) การแสดงค่าสังเกตทุกค่า

ตัวอย่างที่ 14 จากการสอบถามเยาวชนจำนวน 12 คน ว่าเคยฟังพระธรรมเทศนามาแล้วจำนวนกี่ครั้ง ปรากฏผลดังแสดงในแผนภาพต่อไปนี้



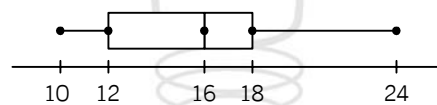
มัธยฐานของข้อมูลนี้คือข้อใด

- 1) 3 ครั้ง
- 2) 3.25 ครั้ง
- 3) 3.5 ครั้ง
- 4) 4 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 15 ข้อใดต่อไปนี้มีผลกระทบต่อความถูกต้องของการตัดสินใจโดยใช้สถิติ ยกเว้นข้อใด

- 1) ข้อมูล
- 2) สารสนเทศ
- 3) ข่าวสาร
- 4) ความเชื่อ

ตัวอย่างที่ 16 คะแนนสอบความรู้ทั่วไปของนักเรียน 200 คน นำเสนอโดยใช้แผนภาพกล่อง ดังนี้



ข้อใดเป็นเท็จ

- 1) จำนวนนักเรียนที่ทำได้ 12 ถึง 16 คะแนน มีเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ทำได้ 16 ถึง 18 คะแนน
- 2) จำนวนนักเรียนที่ทำได้ 12 ถึง 18 คะแนน มีเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ทำได้ 18 ถึง 24 คะแนน
- 3) จำนวนนักเรียนที่ทำได้ 10 ถึง 12 คะแนน มีเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ทำได้ 18 ถึง 24 คะแนน
- 4) จำนวนนักเรียนที่ทำได้ 10 ถึง 16 คะแนน มีเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ทำได้ 16 ถึง 24 คะแนน

ตัวอย่างที่ 17 จากการตรวจสอบลำดับที่ของคะแนนสอบของนาย ก และนาย ข ในวิชาคณิตศาสตร์ที่มีผู้เข้าสอบ 400 คน ปรากฏว่านาย ก สอบได้คะแนนอยู่ในตำแหน่งควอร์ไทล์ที่ 3 และนาย ข สอบได้คะแนนอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 60 จำนวนนักเรียนที่สอบได้คะแนนระหว่างคะแนนของนาย ก และนาย ข มีประมาณกี่คน

- 1) 15 คน
- 2) 30 คน
- 3) 45 คน
- 4) 60 คน

ตัวอย่างที่ 18 ข้อมูลชุดหนึ่ง มีบางส่วนถูกนำเสนอในตารางต่อไปนี้

อันตรภาคชั้น	ความถี่	ความถี่สะสม	ความถี่สัมพัทธ์
2-6			
7-11		11	0.2
12-16		14	
17-21	6		0.3

ช่วงคะแนนใดเป็นช่วงคะแนนที่มีความถี่สูงสุด

- 1) 2-6 2) 7-11 3) 12-16 4) 17-21

ตัวอย่างที่ 19 จำนวนผู้ว่างงานทั่วประเทศในเดือนกันยายน ปี พ.ศ. 2551 มีจำนวนทั้งสิ้น 4.29 แสนคน ตารางเปรียบเทียบอัตราการว่างงานในเดือนกันยายน ปี พ.ศ. 2550 กับปี พ.ศ. 2551 เป็นดังนี้

พื้นที่สำรวจ	อัตราการว่างงานในเดือนกันยายน (จำนวนผู้ว่างงานต่อจำนวนผู้อยู่ในกำลังแรงงานคูณ 100)	
	ปี พ.ศ. 2550	ปี พ.ศ. 2551
ภาคใต้	1.0	1.0
ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ	0.9	1.3
ภาคเหนือ	1.5	1.2
ภาคกลาง (ยกเว้นกรุงเทพมหานคร)	1.3	0.9
กรุงเทพมหานคร	1.2	1.2
ทั่วประเทศ	1.2	1.1

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. จำนวนผู้ว่างงานในภาคใต้ในเดือนกันยายนของปี พ.ศ. 2550 และของปี พ.ศ. 2551 เท่ากัน

ข. จำนวนผู้อยู่ในกำลังแรงงานทั่วประเทศในเดือนกันยายนปี พ.ศ. 2551 มีประมาณ 39 ล้านคน

ข้อใดถูกต้อง

- 1) ก. และ ข. 2) ก. เท่านั้น 3) ข. เท่านั้น 4) ก. และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 20 ในการใช้สถิติเพื่อการตัดสินใจและวางแผน สำหรับเรื่องที่จะต้องมีการใช้ข้อมูลและสารสนเทศ ถ้าขาดข้อมูลและสารสนเทศดังกล่าว ผู้ตัดสินใจควรทำขั้นตอนใดก่อน

- 1) เก็บรวบรวมข้อมูล 2) เลือกวิธีวิเคราะห์ข้อมูล
3) เลือกวิธีเก็บรวบรวมข้อมูล 4) กำหนดข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้

เฉลยตัวอย่างข้อสอบ

เซต

- | | | | | |
|--------|---------|-------|-------|--------|
| 1. 3) | 2. - | 3. - | 4. - | 5. 3) |
| 6. 3) | 7. 1) | 8. 4) | 9. 1) | 10. 4) |
| 11. 50 | 12. 101 | | | |

การให้เหตุผล

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. - | 2. - | 3. 1) | 4. 3) | 5. 4) |
| 6. 4) | 7. 2) | 8. 3) | | |

ระบบจำนวนจริง

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 4) | 2. 1) | 3. 1) | 4. 2) | 5. 2) |
| 6. 1) | 7. 3) | 8. 2) | 9. 4) | 10. 2) |
| 11. 3) | 12. 3) | 13. 2) | 14. 3) | 15. 4) |

ความสัมพันธ์ฟังก์ชัน

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 1) | 2. 2) | 3. 2) | 4. 4) | 5. 3) |
| 6. 3) | 7. 4) | 8. 4) | 9. 3) | 10. 1) |
| 11. 1) | 12. 3) | 13. 2) | 14. 4) | 15. 1) |
| 16. 1) | | | | |

เลขยกกำลัง

- | | | | | |
|--------|----------|--------|--------|--------|
| 1. 3) | 2. 1) | 3. 1) | 4. 1) | 5. 4) |
| 6. 2) | 7. 1) | 8. 1) | 9. 2) | 10. 2) |
| 11. 1) | 12. 0.75 | 13. 3) | 14. 3) | 15. 4) |
| 16. 2) | 17. 3) | | | |

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

- | | | | | |
|--------|--------|-------|-------|--------|
| 1. 1) | 2. 4) | 3. 1) | 4. 1) | 5. 3) |
| 6. 2) | 7. 2) | 8. 4) | 9. 3) | 10. 2) |
| 11. 3) | 12. 2) | | | |

ลำดับและอนุกรม

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 2) | 2. 3) | 3. 3) | 4. 2) | 5. 3) |
| 6. 390 | 7. 1) | 8. 1) | 9. 3) | 10. 1) |
| 11. 4) | 12. 2) | 13. 1) | 14. 4) | 15. 4) |
| 16. 4) | 17. 3) | | | |

ความน่าจะเป็น

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 3) | 2. 1) | 3. 4) | 4. 280 | 5. 240 |
| 6. 2) | 7. 2) | 8. 2) | 9. 1) | 10. 2) |
| 11. 3) | 12. 2) | 13. 1) | 14. 2) | 15. 2) |
| 16. 2) | 17. 4) | | | |

สถิติ

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 3) | 2. 3) | 3. 4) | 4. 2) | 5. 4) |
| 6. 2) | 7. 1) | 8. 4) | 9. 4) | 10. 1) |
| 11. 1) | 12. 3) | 13. 4) | 14. 1) | 15. 4) |
| 16. 2) | 17. 4) | 18. 1) | 19. 3) | 20. 4) |



BRANDS® ซัมเมอร์แคมป์ ปีที่ 26



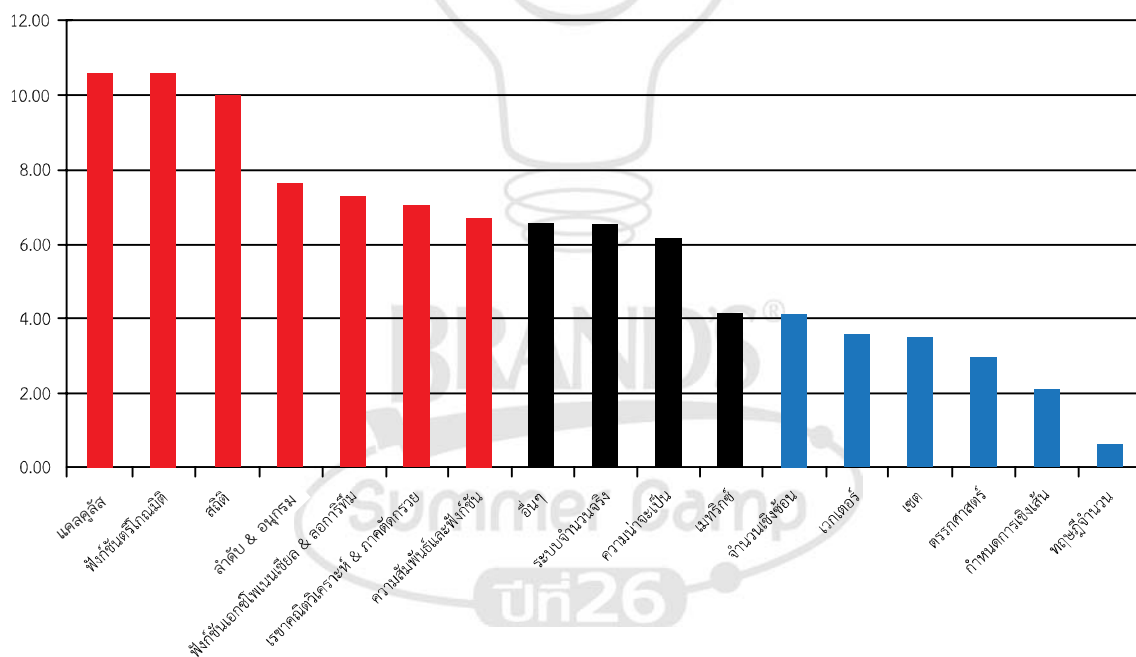
เอกสารประกอบคำบรรยาย
วิชา **PAT 1**

คณิตศาสตร์

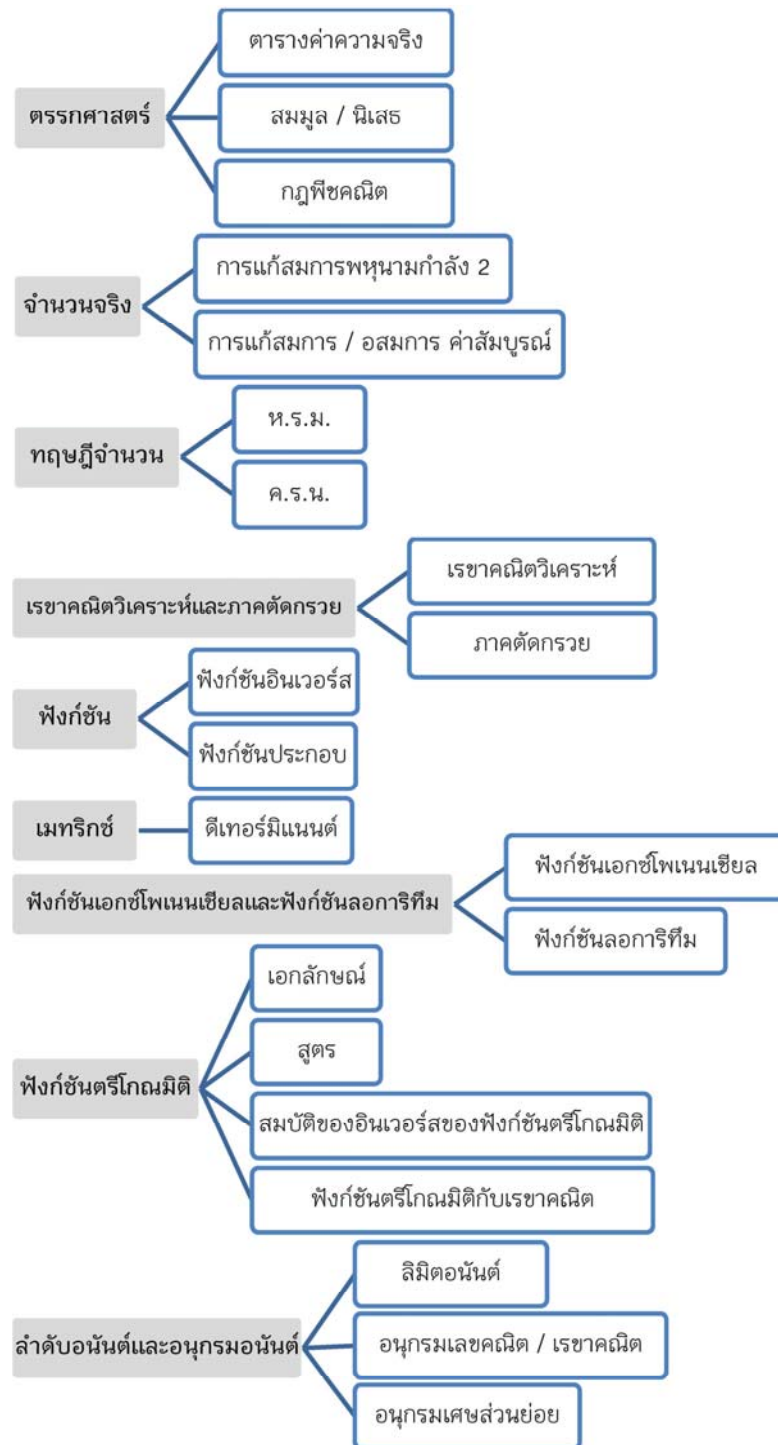
โดย อ.ภาคภูมิ อร่ามวารีกุล (พี่แท๊ป)

สถาบันกวดวิชาคณิตศาสตร์ (A Level)

กราฟวิเคราะห์ข้อสอบ PAT 1



Main Map



ตรรกศาสตร์

■ ตัวเชื่อมประพจน์ และตารางค่าความจริง

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

■ ความหมายของสมมูลและนิเสธ

สมมูล คือ มีค่าความจริง “ตรงกัน” ทุกกรณี

นิเสธ คือ มีค่าความจริง “ตรงข้ามกัน” ทุกกรณี

■ กฎพีชคณิต

$$1. p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$$

$$2. (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$3. \sim(\sim p) \equiv p$$

$$4. p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$5. \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$6. p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

$$7. p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$$

1. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใดๆ

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้าประพจน์ $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ และประพจน์ p มีค่าความจริงเป็นจริง

แล้วสรุปได้ว่าประพจน์ s มีค่าความจริงเป็นจริง

(ข) ประพจน์ $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$ สมมูลกับประพจน์ $[q \rightarrow (p \rightarrow r)] \wedge [p \rightarrow (q \rightarrow s)]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

2. กำหนดให้ p, q, r, s และ t เป็นประพจน์ ซึ่ง

$p \rightarrow (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

$p \leftrightarrow (s \vee t)$ มีค่าความจริงเป็น จริง

ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) $(q \wedge s) \rightarrow (p \wedge q)$

2) $(s \wedge t) \rightarrow \sim q$

3) $(q \vee s) \leftrightarrow p$

4) $(p \rightarrow r) \rightarrow s$

3. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $ab > 0$

ให้ p แทนประพจน์ “ถ้า $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”

และ q แทนประพจน์ “ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$ ”

ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $(p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim p)$

2) $(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$

3) $(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow p)$

4) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$

4. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใดๆ ประพจน์ $[(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \rightarrow [(r \vee s) \wedge (r \vee \sim s)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง (PAT 1 มี.ค. 55)

1) $p \rightarrow r$

2) $q \rightarrow r$

3) $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$

4) $(q \vee r) \wedge (q \vee s)$

5. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ (PAT 1 ต.ค. 55)

1) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

2) $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

3) $[(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p] \rightarrow (p \rightarrow q)$

4) $[(p \wedge q) \rightarrow \sim q] \rightarrow (p \rightarrow q)$

ระบบจำนวนจริง

■ การแก้สมการพหุนามกำลัง 2

ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ แล้ว $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

โดยที่ $b^2 - 4ac$ — $\begin{cases} > 0 ; \text{ มี 2 คำตอบ} \\ &= 0 ; \text{ มี 1 คำตอบ} \\ &< 0 ; \text{ ไม่มีคำตอบใน } \mathbb{R} \end{cases}$

สูตรที่ควรรู้

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

■ การแก้สมการ / อสมการ คำสัมบูรณ์

1. $|P(x)| = Q(x) \longrightarrow P(x) = \pm Q(x)$
 $|P(x)| < Q(x) \longrightarrow -Q(x) < P(x) < Q(x)$
 $|P(x)| > Q(x) \longrightarrow P(x) < -Q(x) \text{ หรือ } P(x) > Q(x)$
2. $|P(x)| = P(x) \longrightarrow P(x) \geq 0$
 $|P(x)| = -P(x) \longrightarrow P(x) \leq 0$
3. $|P(x)| = |Q(x)| \longrightarrow (P(x))^2 = (Q(x))^2$
4. $x^2 = |x|^2$
5. ถ้ามี $||$ หลายพจน์ ให้ปลด $||$, แยกกรณีคิด
6. $|a| + |b| = |a + b| \longrightarrow ab \geq 0$
 $|a| + |b| = |a - b| \longrightarrow ab \leq 0$
 $|a| + |b| > |a + b| \longrightarrow ab < 0$
 $|a| + |b| \geq |a + b| \longrightarrow \mathbb{R}$

6. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริงบวก

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ประพจน์ $\forall x [x^2 - 5x + 4 < x^2 + 6x + 5]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

(ข) ประพจน์ $\forall x [x^2 - 1 \geq 2x - 2]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

7. ถ้า A แทนเซตของเซตคำตอบของสมการ $|2 - 2x| + |x + 2| = 4 - x$ แล้วเซต A เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี (PAT 1 เม.ย. 57)

1) $(-4, 0)$ 2) $(-1, 1)$ 3) $(0, 4)$ 4) $(-3, 2)$

8. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และ $a < b$ เซตคำตอบของสมการ $|x - a| - |x - b| = b - a$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $\{b\}$ 2) $(a, b]$ 3) $[b, \infty)$ 4) $\left(\frac{a+b}{2}, \infty\right)$

9. ให้ A แทนเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$

และให้ B แทนเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $|x^2 - 2x| + x^2 > 4$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $A \subset B$

(ข) จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 2

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

10. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \{x \in R \mid x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 4} > 3x + 2\}$

แล้วเซต A เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$ | 2) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ |
| 3) $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ | 4) $(-1, \infty)$ |

11. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

ให้ $A = \{x \in I \mid |2x + 7| \leq 9\}$

และ $B = \{x \in I \mid |x^2 - x - 1| > 1\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) จำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 7

(ข) $A - B$ เป็นเซตว่าง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 55)

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

12. ถ้า A แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด ที่สอดคล้องกับอสมการ $3|x - 1| - 2x > 2|3x + 1|$

และ B แทนเซตคำตอบของอสมการ $x(x + 2)(x + 1)^2 < 0$

แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 55)

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1) เซต $A - B$ มีสมาชิก 5 ตัว | 2) $A \cup B = A$ |
| 3) เซต $A \cap B$ มีสมาชิก 1 ตัว | 4) $(A - B) \cup (B - A) = B$ |

ทฤษฎีจำนวน

■ ห.ร.ม.

- นิยาม $(a, b) = d$ ก็ต่อเมื่อ
1. $d|a$ และ $d|b$
 2. ถ้า $c|a$ และ $c|b$ แล้ว $c|d$

- สมบัติ
1. $d = ax + by$ โดยที่ $x, y \in \mathbb{Z}$
 2. $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$

■ ค.ร.น.

- นิยาม $[a, b] = c$ ก็ต่อเมื่อ
1. $a|c$ และ $b|c$
 2. ถ้า $a|d$ และ $b|d$ แล้ว $c|d$

สมบัติ $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$

13. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า ห.ร.ม. ของ a และ 2520 เท่ากับ 60

และ ค.ร.น. ของ a และ 420 เท่ากับ 4620 แล้ว

a อยู่ในช่วงในข้อใดต่อไปนี้ (สามัญ 56)

- 1) $[200, 350)$ 2) $[350, 500)$ 3) $[500, 650)$ 4) $[650, 800)$ 5) $[800, 950)$

14. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 166 และ 1101 แล้วได้เศษเหลือ 1 แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด (สามัญ 57)

15. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $m = n + 2$ และ ค.ร.น ของ m และ n เท่ากับ 180 แล้ว ผลคูณ mn มีค่าเท่ากับเท่าใด (สามัญ 57)

16. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนนับ n ซึ่ง ค.ร.น. ของ 720 และ n มีค่าเท่ากับ 10800 แล้วสมาชิกของ S ที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าเท่ากับเท่าใด (สามัญ 55)

17. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $ab - 25a - 25b = 1575$ ถ้า ห.ร.ม. $(a, b) = 5$ แล้ว $|a - b|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (สามัญ 55)

1) 15

2) 45

3) 90

4) 210

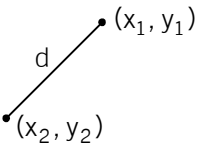
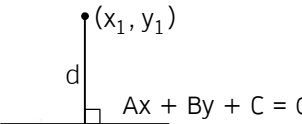
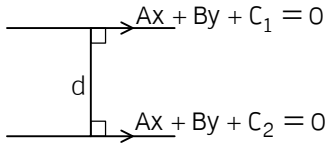
5) 435

18. เศษเหลือจากการหาร $4^{999} + 9^{555}$ ด้วย 5 มีค่าเท่ากับเท่าใด (สามัญ 57)

19. ถ้า d เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และจำนวน 3456, 2561 และ 1308 หารด้วย d มีเศษเหลือเท่ากันคือ r แล้ว $d + r$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

■ เรขาคณิตวิเคราะห์

 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	 $d = \frac{ Ax_1 + By_1 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$	 $d = \frac{ C_1 - C_2 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
--	--	---

■ ภาคตัดกรวย

วงกลม	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$; จุดศูนย์กลาง คือ (h, k) รัศมี = r
พาราโบลา	$(x - h)^2 = 4c(y - k)$; $c > 0$ หาย, $c < 0$ คว่ำ $(y - k)^2 = 4c(x - h)$; $c > 0$ ขวา, $c < 0$ ซ้าย
วงรี	นอน : $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ ตั้ง : $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$ $a^2 = b^2 + c^2$; ค่าความเยื้องศูนย์กลาง $(e) = \frac{c}{a}$; $0 < e < 1$
ไฮเพอร์โบลา	นอน : $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ ตั้ง : $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$ $c^2 = a^2 + b^2$

20. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$; $A, B, C \in \mathbb{I}$ โดยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 1)$ และแกนเอกยาวเป็น 2 เท่าของแกนโท ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)
- $A + B + C = 0$
 - ความเยื้องศูนย์กลางของวงรีเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{5}$
 - วงรีมีจุดศูนย์กลางร่วมกับจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ และแกนเอกยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม
 - ผลบวกของระยะทางจากจุด $(2, 6)$ ไปยังโฟกัสทั้งสองของวงรีเท่ากับ 20 หน่วย

21. ให้ F เป็นโฟกัสของพาราโบลา $4y = x^2 - 6x + 13$ ถ้าไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมบัตินี้

- (ก) แกนตามขวางขนานแกน y
- (ข) จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลายู่ที่ F
- (ค) โฟกัสหนึ่งของไฮเพอร์โบลาคือ $(3, 2 + 2\sqrt{13})$
- (ง) แกนลึงยุคยาว 12 หน่วย

แล้วไฮเพอร์โบลารูปนี้มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 เม.ย. 57)

- 1) $4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y + 144 = 0$
- 2) $4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y - 36 = 0$
- 3) $9y^2 - 4x^2 + 24x + 36y - 144 = 0$
- 4) $9y^2 - 4x^2 + 24x + 36y + 36 = 0$

22. ถ้าวงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลาง คือ $C(h, k)$ อยู่บนเส้นตรง $x + y + 4 = 0$ และวงกลมนี้ผ่านจุด $A(-5, -2)$ และจุด $B(-2, 5)$ แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

23. ให้ A เป็นจุดตัดของเส้นตรง $x - 3y + 1 = 0$ และ $2x + 5y - 9 = 0$ ถ้าเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ m เมื่อ $m < 0$ มีระยะห่างจากจุดกำเนิด $(0, 0)$ เท่ากับ k หน่วย โดยที่ $k^2 + 2m = 1$ และผ่านจุด A แล้วสมการของเส้นตรง L ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 เม.ย. 57)

- 1) $2x + y - 5 = 0$
- 2) $3x + y - 7 = 0$
- 3) $x + 2y - 4 = 0$
- 4) $x + 3y - 5 = 0$

24. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ ในระนาบ ถ้าผลบวกของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ไปยังจุด $(0, -2)$ และระยะทาง จากจุด $P(x, y)$ ไปยังจุด $(2, -2)$ เท่ากับ $2\sqrt{5}$ แล้วเซตของจุด $P(x, y)$ คือ $\{(x, y) | 4x^2 + 5y^2 - 8x + 20y - 12 = 0\}$

(ข) จุด $(1, 1)$ เป็นจุดบนพาราโบลา $y = x^2$ อยู่ใกล้กับเส้นตรง $y = 2x - 4$ มากที่สุด
ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

25. แกนเอกของวงรีเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ กับวงกลม $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$ และโฟกัสจุดหนึ่งของวงรีอยู่บนเส้นตรง $x + 2\sqrt{3} = 0$ สมการของวงรีตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 55)

1) $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$

2) $x^2 + 4y^2 + 24y + 20 = 0$

3) $4x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

4) $4x^2 + y^2 - 32x + 48 = 0$

26. กำหนดให้ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 - y^2 - 2x = 0$ ถ้าพาราโบลาที่มีโฟกัสเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดตัดของเส้นตรง $y = 2x$ กับเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา และมีเส้นไคเรกตริกซ์เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา แล้วสมการของพาราโบลาข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $9x^2 + 12x + 12y - 3 = 0$

2) $9x^2 + 12x + 12y + 8 = 0$

3) $9x^2 + 6x - 12y - 3 = 0$

4) $9x^2 + 6x + 12y + 5 = 0$

27. พาราโบลาที่มีจุดโฟกัส F อยู่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ และมีจุดยอด V อยู่ที่จุดตัดของวงกลมกับแกน y ถ้า A และ B เป็นจุดบนพาราโบลาซึ่งส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ผ่านจุดโฟกัส F และตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม VAB เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 55)
- 1) 9 ตารางหน่วย 2) 12 ตารางหน่วย 3) 18 ตารางหน่วย 4) 36 ตารางหน่วย

28. กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงมีสมการเป็น $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ เมื่อ $a, b > 0$ และให้ C_1 และ C_2 เป็นวงกลมสองวง ที่ต่างกัน โดยที่มีรัศมีเท่ากันและวงกลมทั้งสองวงต่างสัมผัสกับเส้นตรง L ที่จุดเดียวกัน ถ้าวงกลม C_1 มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ แล้วสมการของวงกลม C_2 คือข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)
- 1) $(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2) - 4ab(a^2 + b^2)(bx + ay) + 3a^2b^2 = 0$
2) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - 4ab(bx + ay) + 3a^2b^2 = 0$
3) $(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2) - 4ab(a^2 + b^2)(bx + ay) + 5a^2b^2 = 0$
4) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - 4ab(bx + ay) + 5a^2b^2 = 0$

ฟังก์ชัน

■ ฟังก์ชันอินเวอร์ส

1. $D_{f^{-1}} = R_f$ และ $R_{f^{-1}} = D_f$
2. $(f^{-1})^{-1} = f$
3. $f(\Delta) = \square \rightarrow \Delta = f^{-1}(\square)$

■ ฟังก์ชันประกอบ

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
2. $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

29. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$

ให้ $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = ax + 2$ และ $g(x) = x^3 - 3x(x - 1)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ถ้า $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 1$ แล้ว $(g \circ f)(a)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

30. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ $f(x + g(y)) = 2x + y + 15$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(g \circ f)(x) = 2x + 15$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

(ข) $g(25 + f(57)) = 75$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

31. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดยที่ $(f \circ g)(x) = 4x - 5$ และ $g^{-1}(x) = 2x + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $4(f^{-1} \circ g)(2x + 1) = g(x) + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

(ข) $(g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g))(x) = f^{-1}(x) + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก และ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด และ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

32. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

กำหนด $g(x) = x^2 + x + 3$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน และสอดคล้องกับ

$$(f \circ g)(x) + 2(f \circ g)(1 - x) = 6x^2 - 10x + 17$$

$$2(f \circ g)(x) + (f \circ g)(1 - x) = 6x^2 - 2x + 13$$

ค่าของ $f(383)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 55)

33. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R โดยที่ $f(x + 5) = x^3 - x^2 + 2x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ $g^{-1}(2x - 1) = x + 4$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(f - g)(0) < -169$

(ข) $\{x \in I \mid (g \circ f)(x) + 5 = 0\}$ เป็นเซตว่าง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 55)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

34. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง โดยที่ $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x + 1}$ เมื่อ

$x \neq -1$ แล้วเรนจ์ของฟังก์ชัน f เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $\{x \in R \mid x^2 + 6x - 7 \geq 0\}$

2) $\{x \in R \mid x^2 + 3x - 10 \geq 0\}$

3) $\{x \in R \mid x^2 + x - 12 \geq 0\}$

4) $\{x \in R \mid x^2 - 6x - 16 \geq 0\}$

35. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติสอดคล้องกับ $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq -1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 54)

1) $f(f(x)) = -x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

2) $f(-x) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 1$

3) $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 0$

4) $f(-2 - x) = -2 - f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

เมทริกซ์

■ ดีเทอร์มิแนนต์

กรณี $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

กรณี $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

สมบัติของ $\det$

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^n) = (\det A)^n$
- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- $\det(I) = 1$ และ $\det(O) = 0$
- ถ้าเมทริกซ์มีสมาชิกแถวใดหรือหลักใดเป็นศูนย์ทุกตัว จะได้ว่า $\det$ เท่ากับ 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

- ถ้าเมทริกซ์มีสองแถวใดหรือสองหลักใดเหมือนกัน จะได้ว่า $\det$ เท่ากับ 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

- ค่า $\det$ ของเมทริกซ์สามเหลี่ยมจะเท่ากับ ผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

- ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการสลับสองแถวใดหรือสองหลักใดแล้ว $\det(B) = -\det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วย $k \in \mathbb{R}$ แล้ว $\det(B) = k \cdot \det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

11. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจาก A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่งด้วย $k \in \mathbb{R}$ แล้วนำไปบวกกับอีกแถวหนึ่ง หรือคูณหลักใดหลักหนึ่งด้วย $k \in \mathbb{R}$ แล้วนำไปบวกกับอีกหลักหนึ่ง แล้ว $\det(B) = \det(A)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21} + ka_{11}) & (a_{22} + ka_{12}) & (a_{23} + ka_{13}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

36. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกที่ $abc = 1$ และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

การคูณมิติ 3×3 แล้ว $\det(A^2 + A + I) = 0$

(ข) ให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} a_1 + 2b_1 - 3c_1 & a_2 + 2b_2 - 3c_2 & a_3 + 2b_3 - 3c_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{bmatrix}$

เมื่อ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\det(A) = 3$ แล้ว $\det(B) = -18$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

37. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $ab \neq 0$ และเมทริกซ์ A

สอดคล้องกับสมการ $2(A - I)^{-1} = 4I - A$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $ab = 2$

(ข) $\det(3A^2 A^t A^{-1}) = 324$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

38. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ใดๆ มีมิติ 2×2 ให้ x เป็นจำนวนจริงที่

สอดคล้องกับ $\det(A^2 + xI) = 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\det(A + xI) = 0$

(ข) $\det(A^2 + xI - B) = \det(B^t)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

39. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ ที่มีมิติ 3×3 และ $\det(A) \neq 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(\det(A))^3 = \det(\text{adj}(A))$

(ข) ถ้า $A^2 = 2A$ แล้ว $\det(A) = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 55)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

40. กำหนดให้ A , B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 โดยที่ $\det B \neq 0$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\det(B^t C B^{-1}) = -4$ แล้ว $\det(C^t A C)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

41. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเท่ากัน โดยที่ $\det(A) \neq 0$ และ $\det(B) \neq 0$ ถ้า $\det(A^{-1} + B^{-1}) \neq 0$ และ $\det(A + B) \neq 0$ แล้ว $(A + B)^{-1}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})A^{-1}$

2) $B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}$

3) $B(A^{-1} + B^{-1})A$

4) $B(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

■ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

สมบัติของเลขยกกำลัง

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. (ab)^m = a^m b^m$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$6. a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

การแก้สมการ Expo

$$1. a^x = a^y \rightarrow x = y$$

$$2. a^x = b^x \rightarrow x = 0$$

การแก้สมการ Expo

$$1. a^x > a^y$$

$$2. a^x > b^x$$

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $x < y$

$$\text{จัดรูปเป็น } \left(\frac{a}{b}\right)^x > 1 \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x > \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

ถ้า $a > 1$ แล้ว $x > y$

แล้วพิจารณาตามข้อ 1.

■ ฟังก์ชันลอการิทึม

สมบัติ log

$$1. \log_a 1 = 0$$

$$2. \log_a a = 1$$

$$3. \log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$

$$4. \log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$5. \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} = \frac{1}{\log_x a}$$

$$6. \log_a x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$7. y^{\log_a x} = x^{\log_a y}$$

$$8. a^{\log_a x} = x$$

ข้อควรรู้ $\log_{10} x = \log x$, $\log_e x = \ln x$

$$\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 = 1 - \log 2$$

การแก้สมการ log

$$1. \log_a x = \log_a y \rightarrow x = y$$

$$2. \log_a x = \log_b x \rightarrow x = 1$$

การแก้สมการ log

$$1. \log_a x > \log_a y$$

$$2. \log_a x > \log_b x$$

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $x < y$

$$\text{จัดรูปเป็น } \frac{\log_c x}{\log_c a} > \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

ถ้า $a > 1$ แล้ว $x > y$

!!! การแก้สมการ / อสมการ log ต้องตรวจคำตอบ

$$\log_\Delta \square \rightarrow \square > 0 \text{ และ } \Delta > 0 \text{ แต่ } \Delta \neq 1$$

42. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $3^{(1+2x)} + 9^{(2-x)} = 244$ แล้วเซต A เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี (PAT 1 ต.ค. 55)

1) $(-1, 4)$

2) $(-2, 0.5)$

3) $(0, 5)$

4) $(-3, 0)$

43. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $\log_2(x + 7)^2 + 4\log_4(x - 3) = 3\log_8(64x^2 - 256x + 256)$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

44. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริงและ ถ้า

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^{2x} - 34(15^{x-1}) + 5^{2x} = 0\} \text{ และ}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \log_5(5^{1/x} + 125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}\right\}$$

แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 54)

45. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x - 2\log_{64} x = 7$

แล้ว x สอดคล้องกับสมการ $x - 3\sqrt{x} = 4$

(ข) ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ

$$(1 - a)\log_3 2 = 2 - \log_3 5$$

$$(3 + b)\log_5 2 = 2 - \log_5 3 \text{ และ}$$

$$(3 + c)\log_7 2 = 4\log_7 3 - \log_7 5$$

$$\text{แล้ว } 2a + b - c = 2 + 5\log_2 5 - 9\log_2 3$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

46. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุดที่เป็นคำตอบของสมการ $\sqrt{14 + 3x - x^2} - \sqrt{9 + 5x - x^2} = 1$ แล้วค่าของ

$$\left| \frac{4 - 12x^{-1} + 9x^{-2}}{3x^{-2} - 2x^{-1}} \right| \text{ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)}$$

47. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $\log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + \log_6 5$

และให้ B แทนเซตคำตอบของสมการ $x + \sqrt{1 - x^2} = 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}$

จำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

48. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{3x+2} + 2\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x+10} + 6\sqrt{3x+1} = 14$

และให้ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^2 - 6x + 11 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 25$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

49. กำหนดให้ $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2^{2x} - 2^{x+2} > 2^{x+1/2} - \sqrt{32} \right\}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง จงหาจำนวนสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มของ $R - A$ (PAT 1 ธ.ค. 54)

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

50. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $(x-2)^{x^2+2} < (x-2)^{2x+10}$ เมื่อ $x > 2$ แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 55)

1) (2, 3)

2) (3.5, 5)

3) (2.5, 4)

4) (4, 7)

51. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $x^2 \log_4(x^2 + 2x - 1) + x \log_{1/2}(x^2 + 2x - 1) = 2x - x^2$ และให้ $B = \{x^2 \mid x \in A\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

■เอกลักษณ์ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

■ สูตร ผลบวก/ผลต่าง

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

มุม 3 เท่า

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

มุม 2 เท่า

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

มุม $\frac{1}{2}$ เท่า

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

■ สมบัติของอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สมบัติ arc มุมลบ

$$\arcsin (-x) = -\arcsin x$$

$$\arctan (-x) = -\arctan x$$

$$\operatorname{arccsc} (-x) = -\operatorname{arccsc} x$$

$$\arccos (-x) = \pi - \arccos x$$

$$\operatorname{arccot} (-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

$$\operatorname{arcsec} (-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$$

สมบัติส่วนกลับ

$$\arcsin x = \operatorname{arccsc} \frac{1}{x}$$

$$\arccos x = \operatorname{arcsec} \frac{1}{x}$$

$$\arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}; x > 0$$

สมบัติยูบ arctan

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}; xy < 1$$

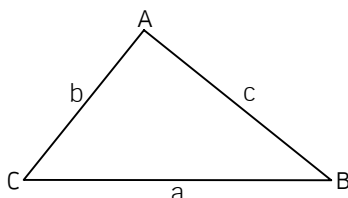
สมบัติคู่ co-function

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}$$

■ ฟังก์ชันตรีโกณมิติกับเรขาคณิต



Law of Sine

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Law of Cosine

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

52. $\cot \left(\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 มี.ค. 57)

1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

2) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

3) $\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

4) $\sqrt{3}$

53. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B และมุม C เป็นมุมแหลม โดยที่ $25 \cos B - 13 \cos C = 15$, $65(\cos B + \cos C) = 77$ และด้านตรงข้ามมุม C ยาว 20 หน่วย ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

54. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ และมุม A มีขนาดเป็นสองเท่าของมุม B ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) $c^2 = a^2 + ab$

2) $c^2 = b^2 + ab$

3) $a^2 = b^2 + bc$

4) $a^2 = c^2 + bc$

55. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้ามุม A มีขนาดมากกว่า 90° มุม B มีขนาด 45° และ $\sqrt{2}c = (\sqrt{3} - 1)a$ แล้ว $\cos^2(A - B - C) + \cos^2 B + \cos^2 C$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)

56. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ โดยที่ $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ แล้ว $\sin C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 ต.ค. 55)

- 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) 1

57. ค่าของ $\sec^2 \left(2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} \right)$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)

58. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $3 \sin (x - y) = 2 \sin (x + y)$ แล้ว $(\tan^3 x)(\cot^3 y)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 มี.ค. 57)

- 1) 8 2) 27 3) 64 4) 125

59. กำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $16 \sin^3 \theta \cos^2 \theta = 2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta$

(ข) $\sin 3\theta = (\sin 2\theta + \sin \theta)(2 \cos \theta - 1)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 มี.ค. 57)

- 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

60. ถ้า $\cos 5\theta = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 เม.ย. 57)

61. กำหนดให้ $\sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ โดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ถ้า $a = \frac{\tan \theta - \tan 2\theta}{\cos \theta - \cos 2\theta}$ และ $b = \frac{\sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta}$ แล้วค่าของ $a^4 + b^4$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)

62. กำหนดให้ $0^\circ < \theta < 15^\circ$ ค่าของ $\arctan\left(\frac{3 \cos \theta}{1 - 3 \sin \theta}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{\cos \theta}{3 - \sin \theta}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 เม.ย. 57)

- 1) $\arctan (\cot \theta)$ 2) $\arctan (\tan \theta)$ 3) $\arctan (\sin \theta)$ 4) $\arctan (\cos \theta)$

63. ให้ A แทนเซตคำตอบของจำนวนจริง $x \in [0, 2\pi)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $2^{(1+3\sin x)} - 5 \cdot 2^{2\sin x} + 2^{(2+\sin x)} = 1$ จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)

64. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $\sin^2 B = \sin A \cos A$

แล้ว $\cos 2B = 2 \cos^2 (45^\circ + A)$

(ข) ถ้า $0 \leq A, B \leq \frac{\pi}{2}$ สอดคล้องกับ $\sin A = \sqrt{2} \sin B$ และ $\sqrt{3} \sec B = \sqrt{2} \sec A$ แล้ว

$$\sin 10A + \cos 10B = 0.5$$

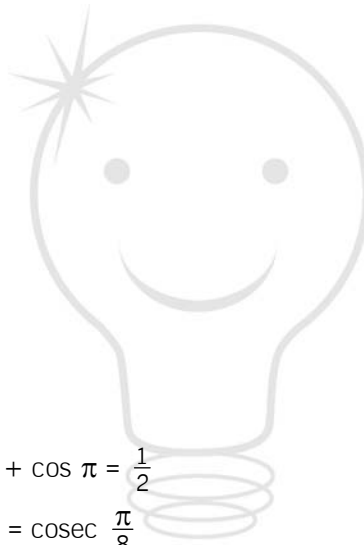
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 เม.ย. 57)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด



65. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \pi = \frac{1}{2}$

(ข) $\tan \frac{7\pi}{16} - \tan \frac{3\pi}{8} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$

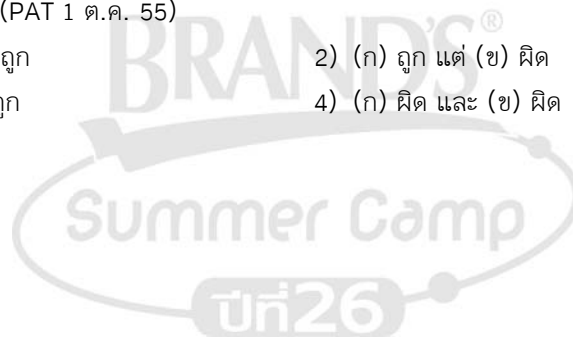
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (PAT 1 ต.ค. 55)

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด



ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

■ ลิมิตอนันต์

เศษส่วนพหุนาม

1. ดีกรีสูงสุดของ “เศษ < ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 2n + 3}{n^4 + 4} = 0$$

2. ดีกรีสูงสุดของ “เศษ = ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n^2 - 4n + 1}{4n^3 + 2n^2 - 3} = \frac{3}{4}$$

3. ดีกรีสูงสุดของ “เศษ > ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2}{n^2 + 2n + 1} \rightarrow \text{หาค่าไม่ได้}$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1. ฐานสูงสุดของ “เศษ < ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{5^n + 1} = 0$$

2. ฐานสูงสุดของ “เศษ = ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{4 \cdot 3^n + 2^n} = \frac{3}{4}$$

3. ฐานสูงสุดของ “เศษ > ส่วน”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 1}{3^{n+1} + 2^n} \rightarrow \text{หาค่าไม่ได้}$$

■ อนุกรม เลขคณิต / เรขาคณิต

	จำกัด	อนันต์
อนุกรมเลขคณิต	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	$0 + 0 + 0 + \dots = 0$
อนุกรมเรขาคณิต	$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$	$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} ; r < 1$

■ อนุกรมเศษส่วนย่อย

$$\sum \frac{1}{n(n+d)} = \frac{1}{d} \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+d} \right)$$

$$\sum \frac{1}{n(n+d)(n+2d)} = \frac{1}{2d} \sum \left(\frac{1}{n(n+d)} - \frac{1}{(n+d)(n+2d)} \right)$$

66. กำหนดให้ $a_n = \frac{n^2}{16n^2 - 4}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี (PAT 1 เม.ย. 57)
- 1) 17 2) 25 3) 145 4) 257

67. กำหนดให้ $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(6 - 3a_n)}{\sqrt{n^2 + 5n + 1}}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)

68. กำหนดให้ $a_n = \sqrt{n^2 + 16n + 3} - \sqrt{n^2 + 2}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a_n}$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 มี.ค. 57)
- 1) 0 2) 1 3) 2 4) 8

69. กำหนดให้ $a_n = \sin \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) - \cos n\pi$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ และ $b_n = 6 \cos \left(2n\pi - \frac{\pi}{3} \right)$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ผลบวกของอนุกรม $\frac{a_1}{b_1} + \left(\frac{a_2}{b_2} \right)^2 + \left(\frac{a_3}{b_3} \right)^3 + \dots + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^n + \dots$ เท่ากับ

ข้อใดต่อไปนี้ (PAT 1 ต.ค. 55)

1) $\frac{2}{5}$

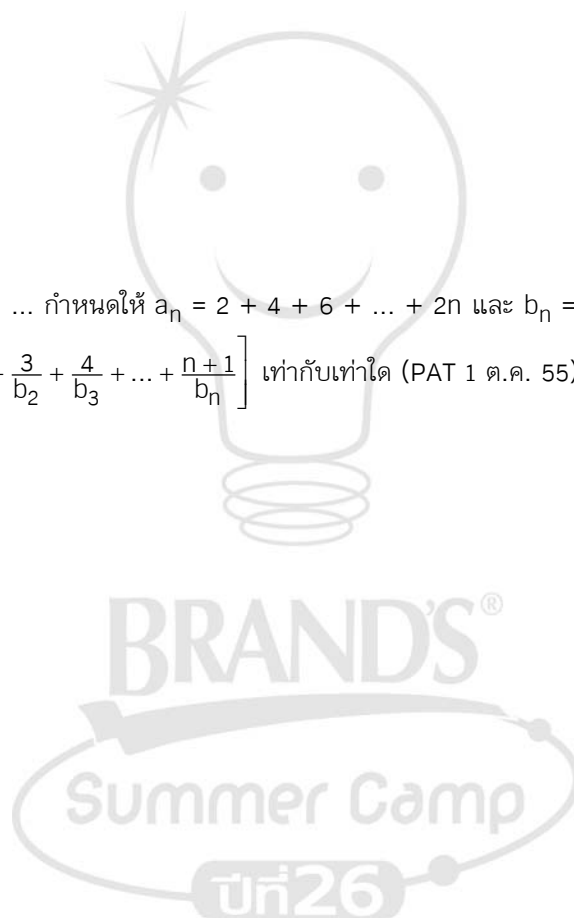
2) $-\frac{2}{5}$

3) 2

4) -2

70. สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ กำหนดให้ $a_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ และ $b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{b_1} + \frac{3}{b_2} + \frac{4}{b_3} + \dots + \frac{n+1}{b_n} \right]$ เท่ากับเท่าใด (PAT 1 ต.ค. 55)



เฉลยตัวอย่างข้อสอบ

1. 1)	2. 1)	3. 3)	4. 3)	5. 3)
6. 4)	7. 4)	8. 3)	9. 3)	10. 2)
11. 2)	12. 1)	13. 4)	14. 55	15. 360
16. 675	17. 1)	18. 3	19. 234	20. 4)
21. 3)	22. 14.5	23. 1)	24. 3)	25. 2)
26. 4)	27. 3)	28. 2)	29. 9	30. 4)
31. 1)	32. 763	33. 4)	34. 3)	35. 4)
36. 2)	37. 3)	38. 1)	39. 4)	40. 320
41. 2)	42. 1)	43. 5	44. 4	45. 1)
46. 4	47. 3	48. 11	49. 2)	50. 3)
51. 4	52. 4)	53. 54	54. 3)	55. 2
56. 3)	57. 2	58. 4)	59. 1)	60. 681
61. 153	62. 2)	63. 3	64. 2)	65. 3)
66. 4)	67. 3	68. 3)	69. 3)	70. 2.25



BRANDS ซัมเมอร์แคมป์ ปีที่ 26



เอกสารประกอบคำบรรยาย

วิชา **PAT 1**

คณิตศาสตร์

โดย อ.ศุภฤกษ์ สกุลชัยพรเลิศ (ครู Sup'k)

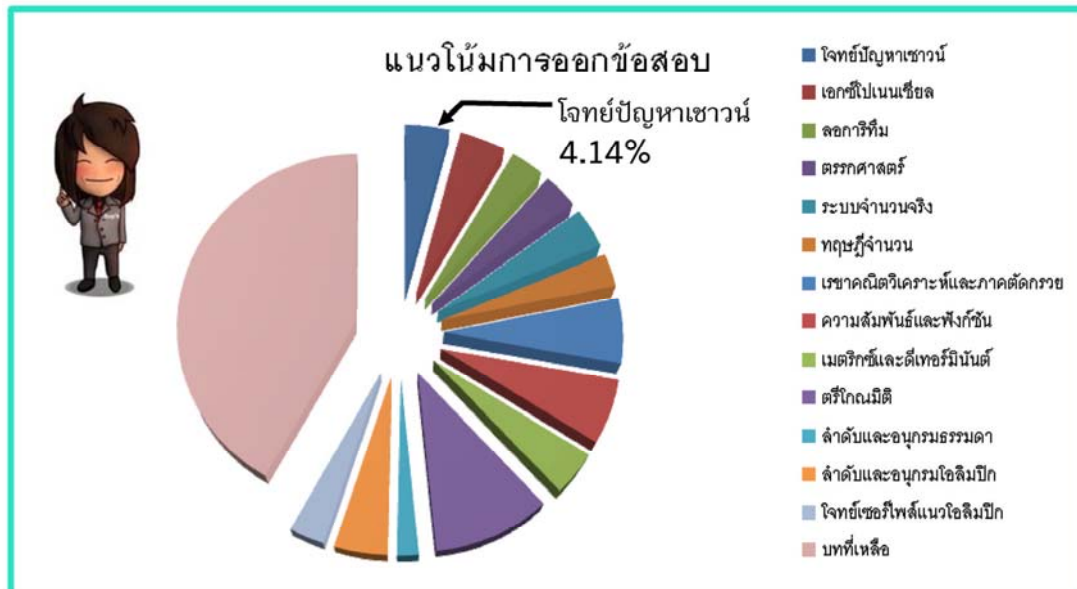
โรงเรียนกวดวิชาสูงส่งเสริมปัญญา (Sup'k Center)

เนื้อหาในส่วน ที่ครู Sup'k รับผิดชอบ	PAT1 ธ.ค.54	PAT1 มี.ค.55	PAT1 ต.ค.55	PAT1 มี.ค.56	PAT1 มี.ค.57	PAT1 เม.ย.57
ระดับข้อสอบ	ยากเกือบ มาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก
โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวจำนวนกับตัวเลข	-	-	1	1	4	1
โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวโอเปอร์เรชั่นใหม่ๆ	2	1	-	2	-	-
เอกซ์โปเนนเชียล	2	2	3	3	2	0.5
ลอการิทึม	0.5	2	1	2	1	2.5
ตรรกศาสตร์	2	1	2	1	2	1.5
ระบบจำนวนจริง	1	2	1	2.5	2	2.5
ทฤษฎีจำนวน	1	2	2	1	2	1
เรขาคณิตวิเคราะห์	0.5	-	-	0.5	-	1
ภาคตัดกรวย	2.5	2	3	3	3	2
ความสัมพันธ์	1	1	1	2	1	-
ฟังก์ชัน	2.5	3	1	2	-	3
เมทริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์	2	2	2	2	2	2
ตรีโกณพื้นฐานในวงกลม	0.5	1	0.5	-	-	-
ตรีโกณประยุกต์	3	1	2	2	3	2
อินเวอร์สตรีโกณ	1	1	2	2	1	1

เนื้อหาในส่วน ที่ครู Sup'k รับผิดชอบ	PAT1 ธ.ค.54	PAT1 มี.ค.55	PAT1 ต.ค.55	PAT1 มี.ค.56	PAT1 มี.ค.57	PAT1 เม.ย.57
ระดับข้อสอบ	ยากเกือบ มาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก
กฎของ sin, กฎของ cos	1	1	1	1	1	2
ลำดับอนุกรมพื้นฐาน	1	1	1.5	2	—	—
ลำดับเวียนบังเกิดแปลกๆ	1	—	1	—	1	1
อนุกรมประยุกต์แปลกๆ	1.5	2	2	2	1	2
โจทย์เซอร์ไพรส์ แนวโอลิมปิก	1	2	2	1	1	2
รวม	27 ข้อ	27 ข้อ	29 ข้อ	32 ข้อ	27 ข้อ	27 ข้อ
ข้อสอบทั้งหมด	50 ข้อ				45 ข้อ	
หมายเหตุ	ช้อย 25 ข้อ ข้อละ 5 คะแนน เต็มคำ 25 ข้อ ข้อละ 7 คะแนน				ช้อย 30 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน เต็มคำ 15 ข้อ ข้อละ 8 คะแนน	



สรุปภาพรวม “โจทย์ปัญหาเชาว์” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ปัญหาเชาว์ แนวลำดับ – ฟังก์ชัน สองตัวแปร
2. โจทย์ปัญหาเชาว์ แนวเติมตัวเลขในตารางเก้าช่อง
3. โจทย์ปัญหาเชาว์ แนวผลรวมตัวเลขในตาราง
4. โจทย์ปัญหาเชาว์ แนว Sudoku
5. โจทย์ปัญหาเชาว์ แนว Alphabetic Problem
6. โจทย์ปัญหาเชาว์ แนวทฤษฎีจำนวน
7. โจทย์ปัญหาเชาว์ แนวตรรกศาสตร์ ผมไม่ได้พูดโกหก VS นั่งติดกับคนโน้น ตรงข้ามคนนี้
8. โจทย์ปัญหาเชาว์ แนวโอเพอร์เรชันของระบบจำนวนจริง

โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนว ลำดับ-ฟังก์ชัน สองตัวแปร

NichTor-Pb1.1 (แนว PAT1'ธ.ค.54)

กำหนด $a(n, m)$ เป็นจำนวนเต็มบวก ทุกๆ $n = 1, 2, 3, 4$, $m = 1, 2, 3, \dots, n$
และ $a(n, m) = a(n, m - 1) + a(n - 1, m - 1)$

เมื่อ $n = 2, 3, 4$ และ $m = 2, 3, \dots, n$

ถ้า $a(1, 1) = 10$, $a(2, 1) = 5$ และ $a(2, 3) = 18$

จงหาค่าของ $a(1, 2)$ ตอบ

แนวคิด & เทคนิค

Tips จากครู Sup'k

***NichTor-Pb1.2** (ดักแนวข้อสอบ PAT1)

กำหนด $a(n, m)$ เป็นจำนวนเต็มบวก ทุกๆ $n = 1, 2, 3, 4$, $m = 1, 2, 3, \dots, n$
และ $a(n, m) = a(n, m - 1) + a(n - 1, m - 1)$

เมื่อ $n = 2, 3, 4$ และ $m = 2, 3, \dots, n$

ถ้า $a(1, 1) = 10$, $a(2, 1) = 5$ และ $a(4, 1) = 4$, $a(4, 4) = 35$

จงหาค่าของ $a(3, 1)$ ตอบ

NichTor-Pb1.3 (ดักแนวข้อสอบ PAT1) สำหรับจำนวนเต็ม n, m ที่ไม่ติดลบ

นิยาม กำหนด $a(n, m)$ ดังนี้

(i) $a(0, m) = m + 1$

(ii) $a(n + 1, 0) = a(n, 1)$

(iii) $a(n + 1, m + 1) = a(n, a(n + 1, m))$

จงหาค่าของ $a(3, 0)$ ตอบ

NaDate-Pb2.48 (PAT1'มี.ค.56) สำหรับ $x, y \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

กำหนดให้ $F(x, y)$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$F(x, y) = \begin{cases} F(1, y-1) & , x=0, y \neq 0 \\ x+1 & , y=0 \\ F(F(x-1, y), y-1) & , x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

ค่าของ $F(1, 2) + F(3, 1)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวเติมตัวเลขในตารางเก้าช่อง

BRAN-Pb2.50 (PAT1'ต.ค.53) จากตารางที่กำหนดให้ มีช่องว่างทั้งหมด 9 ช่อง ดังรูป

		7
X		
	10	3

Tips จากครู Sup'k

ให้เติมจำนวนเต็มบวก ลงในช่องสี่เหลี่ยมช่องละ 1 จำนวน

โดยให้ผลบวกของจำนวนในแต่ละแถว ในแต่ละหลัก และในแต่ละแนวทแยงมุม มีค่าเท่ากัน

ถ้าเติมจำนวนเต็มบวก 3, 7, 10 ดังปรากฏในตาราง แล้วจำนวน x ในตาราง เท่ากับเท่าใด

แนวคิดเร็วๆ

ขั้นที่ 1

		7
X		
	10	3

ขั้นที่ 2

		7
X		
	10	3

ขั้นที่ 3 (แถว)

		7
	10	3

ขั้นที่ 4 (แถว)

		7
	10	3

ขั้นที่ 5 (แถว)

		7
	10	3

โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวผลรวมตัวเลขในตาราง

SheLL2.46 (PAT1'ก.ค.53) ให้เติมจำนวนเต็มบวกลงในช่องสี่เหลี่ยม

โดยให้ผลรวมของจำนวนในช่องสี่เหลี่ยมสามช่องที่ติดกัน เท่ากับ 18

			7				x				8		
--	--	--	---	--	--	--	---	--	--	--	---	--	--

ค่าของ x เท่ากับเท่าใด **ตอบ**

SheLL2.47 (PAT1'ก.ค.53) จากตารางที่กำหนดให้ มีช่องว่าง 16 ช่อง ดังรูป

	หลัก (ค)	หลัก (ง)
แถว (ก)	1	5
แถว (ข)	x	13

ให้เติมจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, ..., 16 ลงในช่องสี่เหลี่ยมช่องละ 1 จำนวน โดยให้ผลบวกของจำนวนในแต่ละแถว (แถว (ก) และ แถว (ข)) และแต่ละหลัก (หลัก (ค) และ หลัก (ง)) มีค่าเท่าๆ กัน ถ้าเติมจำนวนเต็มบวก 1, 5, 13 ดังปรากฏในตารางแล้วจำนวน x ในตาราง เท่ากับเท่าใด **ตอบ**

โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนว Sudoku

SheLL2.4 (PAT1'ก.ค.53) ให้เติมจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4, 5 ลงในช่องว่างของตาราง 5×5 ต่อไปนี้

	5	4		
1	3			
		5	3	
2		3	1	
				x

โดยที่แต่ละแถวต้องมีจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4 และ 5

และแต่ละหลักต้องมีจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4 และ 5

จงหาว่าจำนวน x ในตาราง เท่ากับเท่าใด **ตอบ**

โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนว Alphabetic Problem

BRAN-Pb1.24 (PAT1'ต.ค.53) พิจารณาการบวกของจำนวนต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} A \ B \\ C \ D \\ \hline E \ F \ G \end{array} +$$

เมื่อ A, B, C, D, E, F, G แทนเลขโดดที่แตกต่างกัน โดยที่ $F = 0$

และ $\{A, B, C, D, E, G\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ถ้าจำนวนสองหลัก AB เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $A + B$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

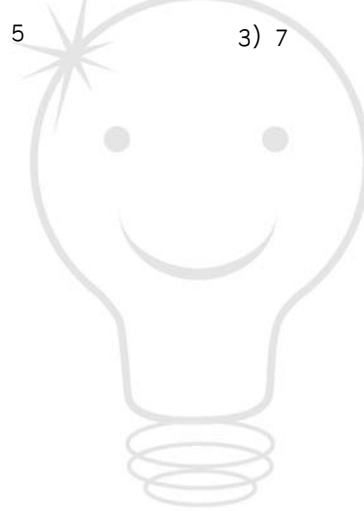
1) 4

2) 5

3) 7

4) 9

แนวคิด



BRAND'S®

SupK-Pb2.28.2 (ดักแนว PAT 1)

ให้ ตัวอักษรภาษาอังกฤษแต่ละตัวที่แตกต่างกัน
แทน เลขโดดที่แตกต่างกัน

จงหาตัวเลขมาเติมตัวอักษรอังกฤษต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} S \ E \ N \ D \\ M \ O \ R \ E \\ \hline M \ O \ N \ E \ Y \end{array} +$$

เมื่อตัวอักษร O ในข้อนี้ คือ เลขศูนย์

SupK-Pb2.28.3 (ดักแนว PAT 1)

ให้ ตัวอักษรภาษาอังกฤษแต่ละตัวที่แตกต่างกัน
แทน เลขโดดที่แตกต่างกัน

จงหาตัวเลขมาเติมตัวอักษรอังกฤษต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} F \ A \ T \ H \ E \ R \\ M \ O \ T \ H \ E \ R \\ \hline P \ A \ R \ E \ N \ T \end{array} +$$

เมื่อตัวอักษร O ในข้อนี้ คือ เลขโดดใด ๆ

โจทย์ปัญหาเขาวนั แนวทฤษฎีจำนวน

BRAN-Pb2.43 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดให้ a, b, c, d, e, f เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้าผลบวกของสองจำนวนที่แตกต่างกัน

ในเซต $\{a, b, c, d, e, f\}$ มีทั้งหมด 15 จำนวน

โดยที่ $a < b < c < d < e < f$

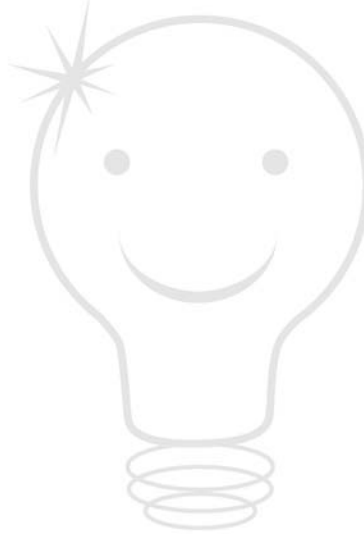
คือ 37, 50, 67, 72, 80, 89, 95, 97,

102, 110, 112, 125, 132, 147 และ 155

แล้วค่าของ $c + d$ เท่ากับเท่าใด ตอบ

แนวคิด

Tips จากครู Sup'k



BRAND'S®

Summer Camp

Un26

Happy-Pb 1.1 (PAT1'มี.ค.57) ถ้า a, b, c, d, e เป็นจำนวนเต็มบวก

โดยที่ $5a = 4b = 3c = 2d = e$

และ $a + 2b + 3c + 4d + 5e$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด

แล้วค่าของ $a + 4b + 3c + 4d + e$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 52

2) 120

3) 262

4) 312

Happy-Pb 1.2 (PAT1'มี.ค.57) ตู้นิรภัยมีรหัสเปิดตู้เป็นจำนวน 10 หลัก คือ ABCDEFGHIJ โดยที่

(ก) $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

และ $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ เป็นจำนวนที่แตกต่างกันทั้งหมด

(ข) A, B, C, D เป็นจำนวนคี่ที่เรียงติดกันและ $A > B > C > D$

(ค) E, F, G เป็นจำนวนคู่ที่เรียงติดกันและ $E > F > G$

(ง) $H > I > J$ และ $H + I + J = 15$

ค่าของ $C + F + I$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 10

2) 13

3) 15

4) 17

Happy-Pb 1.3 (PAT1'เม.ย.57) สร้าง ABCDEF เป็นจำนวนเต็มบวก 6 หลัก

โดยที่ $A, B, C, d, E, F \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

และสอดคล้องกับ $A + B = 14$ และ $C - D > D - E > E - F > 0$ ได้ทั้งหมดกี่จำนวน

ตอบ

Happy-Pb 1.4 (PAT1'เม.ย.57) ให้ A เป็นเซตของ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ โดยที่ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวก
ที่สอดคล้องกับ

(ก) $a = b + d$

(ข) $(a + b + c + d) = (a - c)d$

(ค) $2 + cd = a(c - 1)$

ถ้า M เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดใน A และ m เป็นสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดใน A แล้ว $M - m$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ

โจทย์ปัญหาเชาว์ แนวทฤษฎีการหารลงตัว

BRAN-Pb1.25 (PAT1'ต.ค.53) สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

นิยาม $a * b$ หมายถึง $a = kb$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k

ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1) ถ้า $x * y$ และ $y * z$ แล้ว $(x + y) * z$

2) ถ้า $x * y$ และ $x * z$ แล้ว $x * (yz)$

3) ถ้า $x * y$ และ $x * z$ แล้ว $x * (y + z)$

4) ถ้า $x * y$ แล้ว $y * x$

โจทย์ปัญหาเขาวนั แนวตรรกศาสตร์ ผมไม่ได้พูดโกหก VS นั่งติดกับคนโน้น ตรงข้ามคนนี้

TF-PAT119 (B-PAT1'ต.ค.51) ในการจัดคน 5 คน ยืนเข้าแถวหน้ากระดาน พบว่า

- นาย ก ไม่ยืนข้างนาย ข
 - นาย ค ยืนอยู่ริม
 - นาย ง ยืนอยู่ข้างนาย จ และไม่ยืนอยู่กลางแถว
- ข้อใดต่อไปนี้เป็นไปได้

- 1) นาย ก ยืนข้างนาย ข
- 2) นาย จ ยืนอยู่ริมด้านหนึ่ง
- 3) นาย ก ยืนอยู่ตรงกลาง
- 4) นาย จ ยืนอยู่ตรงกลาง

Tips จากครู Sup'k

TF-PAT120 (B-PAT1'ต.ค.51) จากโจทย์ ข้อเมื่อกี้ ถ้านาย ข ยืนอยู่ริมด้านหนึ่งแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นไปได้

- 1) นาย ค ยืนติดนาย ก
- 2) นาย ก ยืนอยู่ตรงกลาง
- 3) นาย จ ยืนอยู่ตรงกลาง
- 4) นาย ง ยืนติดกับนาย ข

TF-PAT123 (PAT1'ส.ค.52) ชาย 6 คน นาย ก, ข, ค, ง, จ และ ฉ ยืนเข้าแถวตอน ตามลำดับ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- นาย ฉ ไม่ยืนติดกับนาย ข
 - นาย ฉ ยืนอยู่ในลำดับก่อนนาย ก
 - นาย ก ยืนติดนาย ง
 - นาย จ ยืนอยู่ลำดับที่ 4
- ถ้านาย ฉ ยืนติดและอยู่หลังนาย ค แล้ว คนที่มีโอกาสอยู่ในลำดับที่ 5 ได้แก่ ชายในข้อใดต่อไปนี้เป็นไปได้
- 1) นาย ข
 - 2) นาย ค
 - 3) นาย ง
 - 4) นาย ฉ

TF-PAT124 (PAT1'ส.ค.52) จากเงื่อนไขในโจทย์ข้อที่แล้ว ข้อความใดต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) นาย ง ยืนอยู่ในลำดับที่ 2
- 2) นาย ค ยืนอยู่ในลำดับที่ 3
- 3) นาย ง ยืนอยู่หลังนาย ข
- 4) นาย ข ยืนอยู่หลังนาย จ

โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวการโอเพอร์เรชั่นระบบจำนวนจริง

BRAN-Pb1.5 (PAT1'ต.ค.53) ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ

กำหนดให้ $a * b = \sqrt{a+b}$ สำหรับ $a, b \in N$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(a * b) * c = a * (b * c)$ สำหรับ $a, b, c \in N$

ข. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ สำหรับ $a, b, c \in N$

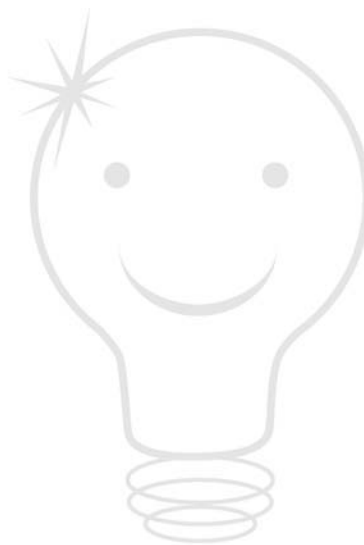
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

แนวคิดเร็วๆ

Tips จากครู Sup'k

สูตรลัด จากครู Sup'k



BRAND'S®

Summer Camp

วิธีจริง

สำหรับ $a, b \in N$ เรามีว่า $a * b = \sqrt{a+b}$

(ก) ผิด , $(a * b) * c = (\sqrt{a+b}) * c = \sqrt{\sqrt{a+b} + c}$

$$a * (b * c) = a * \sqrt{b+c} = \sqrt{a + \sqrt{b+c}}$$

$\therefore (a * b) * c \neq a * (b * c)$

(ข) ผิด , $a * (b + c) = \sqrt{a+b+c}$, $a * b = \sqrt{a+b}$, $a * c = \sqrt{a+c}$

เพราะว่า $\sqrt{a+b+c} \neq \sqrt{a+b} + \sqrt{a+c}$

$\therefore a * (b + c) \neq (a * b) + (a * c)$

ดังนั้น ทั้ง (ก) และ (ข) ผิดทั้งคู่

BRAN-Pb1.20 (PAT1'ต.ค.53) ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ, สำหรับ $a, b \in N$

$$a \ominus b = \begin{cases} a, & a > b \\ a, & a = b \\ b, & a < b \end{cases} \quad \text{และ} \quad a \Delta b = \begin{cases} b, & a > b \\ a, & a = b \\ a, & a < b \end{cases}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ สำหรับ $a, b, c \in N$

ก. $a \ominus b = b \ominus a$

ข. $a \ominus (b \ominus c) = (a \ominus b) \ominus c$

ค. $a \Delta (b \ominus c) = (a \Delta b) \ominus (a \Delta c)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ถูก 1 ข้อ คือ ข้อ ก.
- 2) ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ ก. และ ข.
- 3) ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ ก. และ ค.
- 4) ถูกทั้ง 3 ข้อ คือ ข้อ ก., ข. และ ค.

KaiOU-Pb1.24 (PAT1'มี.ค.53) ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ

กำหนดให้ $a * b = a^b$ สำหรับ $a, b \in N$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ สำหรับ $a, b, c \in N$

ก. $a * b = b * a$

ข. $(a * b) * c = a * (b * c)$

ค. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

ง. $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ถูก 2 ข้อ คือ ข. และ ค.
- 2) ถูก 2 ข้อ คือ ค. และ ง.
- 3) ถูก 1 ข้อ คือ ค.
- 4) ก., ข., ค. และ ง. ผิดทุกข้อ

SheLL2.49 (PAT1'ก.ค.53) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

กำหนดให้ $a \otimes b$ เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติต่อไปนี้

ก. $a \otimes a = a + 4$

ข. $a \otimes b = b \otimes a$

ค. $\frac{a \otimes (a + b)}{a \otimes b} = \frac{a + b}{b}$

ค่าของ $(8 \otimes 5) \otimes 100$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ

NaDate-Pb2.49 (PAT1'มี.ค.56) สำหรับ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

กำหนดให้ $x * y$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติต่อไปนี้

(1) $x * (xy) = (x * x)y$

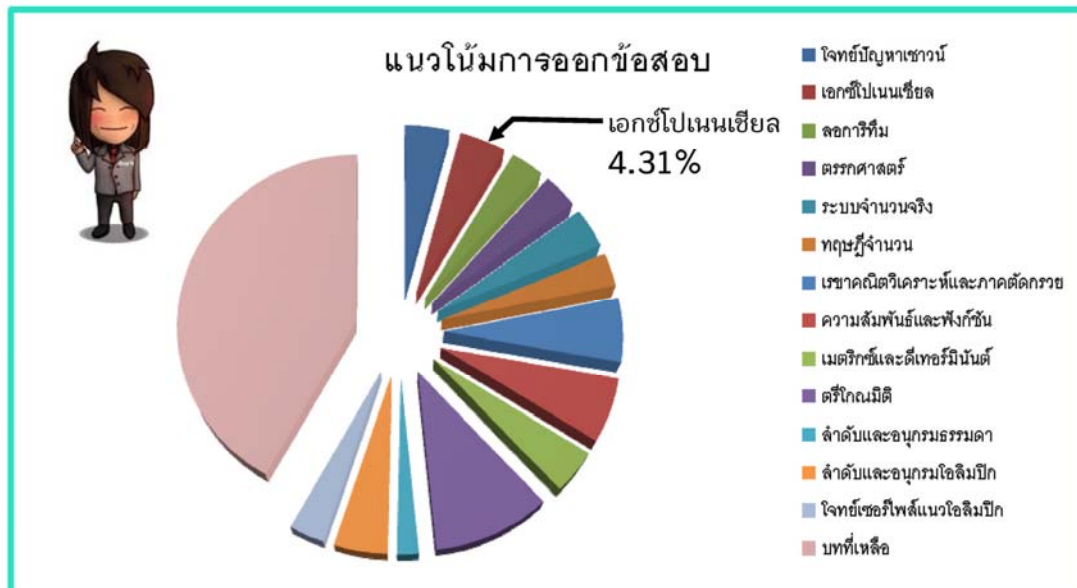
(2) $x * (1 * x) = 1 * x$

(3) $1 * 1 = 1$

ค่าของ $2 * (5 * (5 * 6))$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ

สรุปภาพรวม “เอกซ์โปเนนเชียล” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเลขยกกำลัง ม.2
2. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเปรียบเทียบความมากน้อยเลขยกกำลัง ม.2
3. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเลขยกกำลังกับรูต์
4. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลัง แบบฐานติดตัวแปร
5. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลัง
6. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลังโอลิมปิก
7. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการติดรูต์

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเลขยกกำลัง ม.2

สูตร 2.1 $a^m \times a^n = a^{m+n}$
 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ เมื่อ $a \neq 0$
 $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$

สูตร 2.2 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
 $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

สูตร 2.3

FPAT-Pb2 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้า $ab = 2$ แล้ว $\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) 4 2) 8 3) 64 4) 256

แนวคิดเร็วๆ

ถ้า $ab = 2 \rightarrow$ วิธีลัด ยกตัวอย่างไปเลย เช่น $a = 2, b = 1$

จะหา แล้ว $\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}} = \frac{2^{(2+1)^2}}{2^{(2-1)^2}} = \frac{2^{(3)^2}}{2^{(1)^2}} = \frac{2^9}{2^1} = 2^{9-1} = 2^8 = 256$

วิธีจริงจะหา $\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}} = 2^{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2^{(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}$
 $= 2^{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2} = 2^{4 \cdot ab} = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$ ตอบ

QET-G-Pb26.1 ถ้า $a = 1 - 2^n$ และ $x = 1 - 2^{-n}$ โดยที่ a และ n เป็นค่าคงตัว จงหา x

- 1) $\frac{2-a}{1-a}$ 2) $\frac{a-2}{1-a}$ 3) $\frac{a}{1-a}$ 4) $\frac{a}{a-1}$

QET-G-Pb23.2 จงหารูปอย่างง่ายของ $\left(\frac{a^{-2}b}{a^3 \cdot b^{-4}}\right)^{-3} \div \left(\frac{a \cdot b^{-1}}{a^{-3} \cdot b^2}\right)^5$

- 1) $\frac{1}{a^5}$ 2) $\frac{1}{a^{-9}}$ 3) $\frac{1}{b^7}$ 4) $\frac{1}{b^{12}}$

QET-G-Pb23.3 จงหา $\frac{2^{n+3}}{3^{-n-1}} \times \frac{3^{-n+2}}{5^{-n-1}} \times \frac{2^n - 2^{n-1}}{3 \times 2^n - 4 \times 2^{n-2}} \times \frac{2^{-n+2}}{5^{n+1}}$

- 1) 4
 2) 864
 3) 870
 4) ไม่มีข้อถูก

Tips จากครู Sup'k

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเปรียบเทียบความมากน้อยเลขยกกำลัง ม.2

สูตร I เมื่อ $1 < \text{ฐาน}$

เจอ $3.5^x < 3.5^y$

$\therefore x < y$

สูตร II เมื่อ $0 < \text{ฐาน} < 1$

เจอ $0.21^x < 0.21^y$

$\therefore x > y$

สูตร III เมื่อ $1 < \text{ฐาน}$

เจอ $\log_{7.8} x < \log_{7.8} y$

$\therefore x < y$

สูตร IV เมื่อ $0 < \text{ฐาน} < 1$

เจอ $\log_{0.42} x < \log_{0.42} y$

$\therefore x > y$

NaDate-Pb1.25 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ $A = \sqrt{7\sqrt[3]{5}}$, $B = \sqrt{5\sqrt[3]{7}}$, $C = \sqrt[3]{5\sqrt{7}}$

และ $D = \sqrt[3]{7\sqrt{5}}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $D > C > A > B$
- 2) $A > C > B > D$
- 3) $A > B > D > C$
- 4) $C > A > D > B$

VetaNaDate-Pb1.25 (โจทย์ต่างประเทศ) ให้ $A = \sqrt[3]{\sqrt{10}}$, $B = \sqrt{5}$, $C = \sqrt[3]{\sqrt{28}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $A < B < C$
- 2) $A < C < B$
- 3) $B < A < C$
- 4) $B < C < A$
- 5) $C < A < B$

KAiOU-Pb 1.22 (PAT1'ม.ค.53) ให้ $A = 7^{(7^7)}$, $B = 7^{7^7}$, $C = 7^{7^7}$ และ $D = (7^{7^7})^7$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $B < A < C < D$
- 2) $B < C < A < D$
- 3) $C < B < D < A$
- 4) $C < A < D < B$

SheLL1.24 (PAT1'ก.ค.53) กำหนด $a = 2^{48}$, $b = 3^{36}$, $c = 5^{24}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $\frac{1}{b} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a}$
- 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$
- 3) $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{1}{c}$
- 4) $\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b}$

**** DiAMK-Pb1.25 (ดักแนว PAT 1)** ให้ $a = (10^{100})^{10}$, $b = 10^{(10^{10})}$, $c = 1000000!$, $d = (100!)^{10}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $a < c < d < b$
- 2) $a < d < c < b$
- 3) $a < d < b < c$
- 4) $a < b < c < d$

SheLL1.10 (PAT1'ก.ค.53) พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $2^{\frac{3}{2}} < 3^{\frac{4}{3}}$

ข. $\log_2 \left(\frac{3}{8} \right) < \log_3 \left(\frac{1}{2} \right)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

DiAMK-Pb1.2 (ดักแนว PAT 1) จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$

ข. $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{\pi} 2} > 2$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. และ ข. ผิด

KAiOU-Pb1.11 (PAT1'ม.ค.53) เซตคำตอบของอสมการ $72^x + 72 < 2^{3x+3} + 3^{2x+2}$ เป็นสับเซตของช่วงใด

- 1) $(\log_8 7, \log_9 8)$
- 2) $(\log_9 8, \log_8 9)$
- 3) $(\log_8 9, \log_7 8)$
- 4) $(\log_9 10, \log_8 9)$

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล : แนวเลขยกกำลังกับรูต

สูตร 5.1

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad a^{\frac{m}{n}} &= (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \\ \text{ii)} \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[n]{a} \\ \text{iii)} \quad \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} \end{aligned}$$

พิสูจน์ ii) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot n}} = \sqrt[n]{a}$

iii) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$

สูตร 5.2

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\ \text{ii)} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

พิสูจน์ i) $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

ii) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

ตัวอย่างที่ 5.2.1 จงหารูปอย่างง่ายของ

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \sqrt{a\sqrt{a}} &= \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2}} = a^{\frac{3}{4}} \\ \text{ii)} \quad \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} &= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^1 \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{1+\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{4}}} = (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7 \cdot 1}{4 \cdot 2}} = a^{\frac{7}{8}} \\ \text{iii)} \quad \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} &= \sqrt{a \cdot a^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^1 \cdot a^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^{1+\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^{\frac{15}{8}}} = (a^{\frac{15}{8}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{15 \cdot 1}{8 \cdot 2}} = a^{\frac{15}{16}} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.2.2 จงหารูปอย่างง่ายของ $\sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt[5]{6a}}$ ตอบ.....

แนวคิด

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt[5]{6a}} &= \sqrt[3]{a^4 \cdot (6a)^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{a^4 \cdot 6^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{6^{\frac{1}{5}} \cdot a^4 \cdot a^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{6^{\frac{1}{5}} \cdot a^{4+\frac{1}{5}}} \\ &= \sqrt[3]{6^{\frac{1}{5}} \cdot 6^{\frac{21}{5}}} = (6^{\frac{1}{5}} \cdot 6^{\frac{21}{5}})^{\frac{1}{3}} = (6^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}} \cdot (6^{\frac{21}{5}})^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{21}{5} \cdot \frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{15}} \cdot 6^{\frac{21}{15}} = 6^{\frac{1}{15}} \cdot 6^{\frac{7}{5}} \end{aligned}$$

BRAN-Pb2.29 (PAT1'ต.ค.53) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง
และให้ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2 + 4x + 1)} = 1\}$
จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด ตอบ

วิธีลัด

Tips จากครู Sup'k

วิธีจริง

พิจารณาสมการ $(3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2 + 4x + 1)} = 1$ ออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 เมื่อ $3x^2 - 11x + 7 > 0$

จะได้ $\log(3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2 + 4x + 1)} = 0$

$(3x^2 + 4x + 1)\log(3x^2 - 11x + 7) = 0$

ฉะนั้น $3x^2 + 4x + 1 = 0$

หรือ $\log(3x^2 - 11x + 7) = 0$

$(3x + 1)(x + 1) = 0$

หรือ $3x^2 - 11x + 7 = 1$

$x = -\frac{1}{3}, -1$

หรือ $(3x - 2)(x - 3) = 0$

$x = -\frac{1}{3}, -1$

หรือ $x = \frac{2}{3}, 3$

กรณีที่ 2 เมื่อ $3x^2 - 11x + 7 < 0$

เป็นไปได้ทางเดียว คือ $3x^2 - 11x + 7 = -1$ และ $3x^2 + 4x + 1$ เป็นเลขคู่

$3x^2 - 11x + 8 = 0$

$(3x - 8)(x - 1) = 0$

$x = \frac{8}{3}, 1$

ถ้า $x = \frac{8}{3}$ จะได้ $3x^2 + 4x + 1 = 3 \cdot \frac{64}{9} + 4 \cdot \frac{8}{3} + 1 = 33$

ถ้า $x = 1$ จะได้ $3x^2 + 4x + 1 = 3 + 4 + 1 = 8$

ในกรณีนี้ จึงได้ $x = 1$ เท่านั้น

รวมทั้ง 2 กรณี จะได้ $C = \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 3\}$

$\therefore$ จำนวนสมาชิกของเซต C มีค่าเท่ากับ 5

Sup'k-Pb2.29.1 (ดักแนว PAT1) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

และให้ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)^{x^2-8x+15} = 1\}$ จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด

ตอบ

Sup'k-Pb2.29.2 (ดักแนว PAT1) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

และให้ $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^{\frac{\log x + 5}{3}} = 10^{5 + \log x} \right\}$ จงหา $n(C)$ ตอบ

FPAT-Pb14 (PAT1'ก.ค.52) ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่ $x, y > 0$ ซึ่งสอดคล้องกับ $x^y = y^x$ และ $y = 5x$
จงหาค่าของ x อยู่ในช่วงใด

- 1) $[0, 1)$
- 2) $[1, 2)$
- 3) $[3, 4)$
- 4) $[5, 6)$



โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลัง

สูตร 5.1 $a^x = a^y \rightarrow x = y$ เมื่อ $a \neq -1, 0, 1$

สูตร 5.2 $a^x = b^x \rightarrow x = 0$ เมื่อ $a, b \neq -1, 0, 1$

พิสูจน์ สูตร 5.2 จาก $a^x = b^x \rightarrow \frac{a^x}{b^x} = 1 \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \rightarrow \therefore x = 0_{\text{จบ}}$

Happy-Pb 2.1 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง $x \in [0, 2\pi)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$2^{1+3\sin x} - 5 \cdot 2^{2\sin x} + 2^{2+\sin x} = 1$$

จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

ตอบ

แนวคิด $2^{1+3\sin x} - 5 \cdot 2^{2\sin x} + 2^{2+\sin x} = 1$

$$2(2^{\sin x})^3 - 5(2^{\sin x})^2 + 4(2^{\sin x}) = 1$$

$$2(2^{\sin x})^3 - 5(2^{\sin x})^2 + 4(2^{\sin x}) - 1 = 0$$

$$(2^{\sin x} - 1)(2(2^{\sin x})^2 - 3(2^{\sin x}) + 1) = 0$$

$$(2^{\sin x} - 1)(2^{\sin x} - 1)(2(2^{\sin x}) - 1) = 0$$

$$2^{\sin x} = 1, \frac{1}{2}$$

ถ้า $2^{\sin x} = 1$ จะได้ $\sin x = 0$ แต่ $x \in [0, 2\pi)$ ดังนั้น $x = 0, \pi$

ถ้า $2^{\sin x} = \frac{1}{2}$ จะได้ $\sin x = -1$ แต่ $x \in [0, 2\pi)$ ดังนั้น $x = \frac{3\pi}{2}$

เซตคำตอบของสมการ $A = \{0, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$

ดังนั้น จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับ 3 ตัว ตอบ

*NichTor-Pb2.1 (ดักแนว PAT1) ถ้า θ เป็นมุมซึ่ง $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ที่สอดคล้องกับ

$$3(2^{\sin \theta}) \left(\frac{8}{27}\right)^{\cos^2 \theta} = 2(3^{\sin \theta})$$

แล้ว $\sin 3\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ ตอบ

วิธีทำ

Tips จากครู Sup'k

NichTor-Pb2.2 (แนวข้อสอบ PAT1'ธ.ค.54) ถ้า θ เป็นมุมซึ่ง $180^\circ < \theta < 270^\circ$

$$\text{ที่สอดคล้องกับ } 3(2\sin\theta)\left(\frac{4}{9}\right)^{\cos^2\theta} = 2(3\sin\theta)$$

แล้ว $3 \tan^2 \theta - 2 \sin 3\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) 1 2) 3 3) 7 4) 11

NichTor-Pb2.2 ตอบ 2) 3

$$3(2\sin\theta)\left(\frac{4}{9}\right)^{\cos^2\theta} = 2(3\sin\theta)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin\theta} \left(\frac{2}{3}\right)^{2\cos^2\theta} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin\theta + 2\cos^2\theta} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin\theta + 2\cos^2\theta} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

จะได้ $\sin \theta + 2 \cos^2 \theta = 1$

$$\sin \theta + 2(1 - \sin^2 \theta) = 1$$

$$-2 \sin^2 \theta + \sin \theta + 1 = 0$$

$$2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$$

$$(\sin \theta - 1)(2 \sin \theta + 1) = 0$$

$$\sin \theta = 1, -\frac{1}{2}$$

เพราะว่า $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ฉะนั้น $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ ทำให้ $\theta = 210^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore 3 \tan^2 \theta - 2 \sin 3\theta &= 3 \tan^2 210^\circ - 2 \sin 630^\circ \\ &= 3 \tan^2 \frac{7\pi}{6} - 2 \cdot \sin \frac{7\pi}{2} \\ &= 3 \tan^2 \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) - 2 \cdot \sin \frac{7\pi}{2} \\ &\text{ยุบมุมด้วยตรีโกณในวงกลม} \\ &= 3 \tan^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) - 2 \cdot \sin \frac{7\pi}{2} \\ &= 3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 - 2(-1) \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \text{ ตอบ} \end{aligned}$$

FPAT-Pb1 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้า $6^{a+b} = 36$ และ $5^{a+2b} = 125$ แล้วค่าของ a มีค่าเท่าใด

- 1) 1 2) 1.5 3) 2 4) 2.5

FPAT-Pb3 (PAT1'มี.ค.52) ถ้า $4^{x-y} = 128$ และ $3^{2x+y} = 81$ แล้วค่าของ y เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -2 2) -1 3) 1 4) 2

SheLL1.11 (PAT1'ก.ค.53) ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $3^{2x+2} - 28(3^x) + 3 = 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log x + \log (x - 1) = \log (x + 3)$ แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Happy-Pb 2.1.2 (สามัญ'57) จงหาคำตอบของสมการ $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$

ตอบ

AVATAR-Pb5.1 (แนวสอบตรงแพทย์ กสพท) กำหนด $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} - 2^{4x+5} = 0$

จงหาว่า $x^2 - 2x$ เท่ากับเท่าใด ตอบ

KMK-Pb1.8 (PAT1'ต.ค.52) ถ้า $x > 0$ และ $8^x + 8 = 4^x + 2^{x+3}$ แล้วค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

- 1) $[0, 1)$ 2) $[1, 2)$ 3) $[2, 3)$ 4) $[3, 4)$

*KAI0U-Pb1.12 (PAT1'มี.ค.53) ถ้าสมการ $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + a = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริงบวก แล้วค่าของ a ที่เป็นไปได้อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

- 1) $(-\infty, -3)$ 2) $(-3, 0)$ 3) $(0, 1)$ 4) $(1, 3)$

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลังโอลิมปิก

*FPAT-Pb4 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดสมการ $\left(\frac{4}{25}\right)^x + \left(\frac{9}{25}\right)^x = 1$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า a เป็นคำตอบของสมการ แล้ว $a > 1$ ข. ถ้าสมการมีคำตอบ แล้วคำตอบจะมีเพียงคำตอบเดียว
ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

*NaDate-Pb2.27 (PAT1'มี.ค.56) ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ

$5^{(x-2^A)} 2^{y^A} = (16)^{64}$ เมื่อ $A = \frac{\log y}{\log x}$ แล้วค่าของ $x + y$ เท่ากับเท่าใด ตอบ

Tips จากครู Sup'k

Sup'k ระวัง

* NaDate-Pb 2.30 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ

$$5^{(1+\sqrt{x^2-4x-1})} + 5^{\left(\frac{5+4x-x^2}{2+\sqrt{x^2-4x-1}}\right)} = 126$$

ผลบวกของสมาชิกในเซต A ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

ตอบ

Tips จากครู Sup'k

วิธีลัด (ฟังครู Sup'k สอนสดในหอประชุม Brand's นะครับ)

วิธีจริง

ขั้นที่ 1

ก่อนอื่นสังเกตว่า

$$\begin{aligned} \frac{5+4x-x^2}{2+\sqrt{x^2-4x-1}} &= \frac{(5+4x-x^2)(2-\sqrt{x^2-4x-1})}{(2+\sqrt{x^2-4x-1})(2-\sqrt{x^2-4x-1})} \\ &= \frac{(5+4x-x^2)(2-\sqrt{x^2-4x-1})}{4-(x^2-4x-1)} \\ &= 2-\sqrt{x^2-4x-1} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 จากนั้นเพื่อความสะดวกให้ $y = \sqrt{x^2 - 4x - 1}$ (ฉะนั้น $y \geq 0$)

ขั้นที่ 3 แก่สมการ $5^{\left(1 + \sqrt{x^2 - 4x - 1}\right)} + 5^{\left(\frac{5 + 4x - x^2}{2 + \sqrt{x^2 - 4x - 1}}\right)} = 126$

$$5^{\left(1 + \sqrt{x^2 - 4x - 1}\right)} + 5^{\left(2 - \sqrt{x^2 - 4x - 1}\right)} = 126$$

$$5^{1+y} + 5^{2-y} = 126$$

$$5^y \cdot (5^{1+y} + 5^{2-y}) = 126 \cdot 5^y$$

$$5(5^{2y}) + 25 = 126 \cdot 5^y$$

$$5(5^{2y}) - 126 \cdot 5^y + 25 = 0$$

$$(5 \cdot 5^y - 1)(5^y - 25) = 0$$

$$5^y = \frac{1}{5}, 25$$

$$5^y = 5^{-1}, 5^2$$

$$y = -1, 2$$

แต่ $y \geq 0$ จึงได้ $y = 2$ เท่านั้น

ขั้นที่ 4 ทำให้

$$y = \sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$x^2 - 4x - 1 = 4$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x = 5, -1$$

จะได้ เซตคำตอบ $A = \{-1, 5\}$

$\therefore$ ผลบวกของสมาชิกใน A ทั้งหมด $= -1 + 5 = 4$ ตอบ

BRAN-Pb2.27 (PAT1'ต.ค.53) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 2x + 9 - 2\sqrt{x^2 - x + 3} = 15\}$$

แล้วผลบวกของกำลังสองของสมาชิกในเซต A เท่ากับเท่าใด *ตอบ*

KaiOU-Pb2.2 (PAT1'มี.ค.53) ถ้า $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{7x+1}\}$

เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง แล้วผลบวกของสมาชิกใน S เท่ากับเท่าใด *ตอบ*

SheLL2.27 (PAT1'ก.ค.53) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } S = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{7x-1}\}$$

และ $T = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 3x + 1, x \in S\}$ แล้วผลบวกของสมาชิกใน T เท่ากับเท่าใด

ตอบ

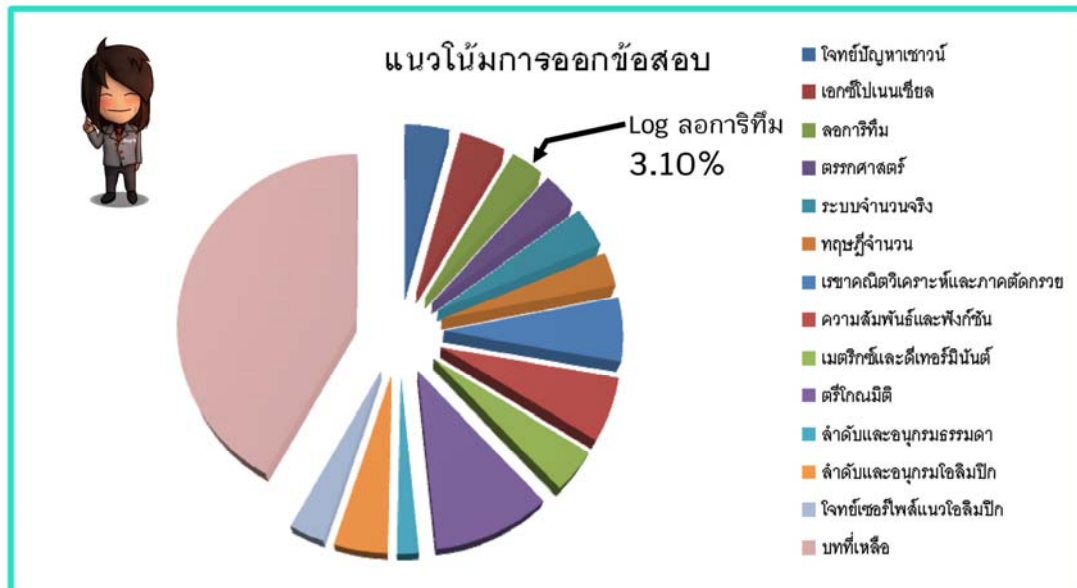
Happy-Pb2.2 (PAT1'มี.ค.57) ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุดที่เป็นคำตอบของสมการ

$$\sqrt{14 + 3x - x^2} - \sqrt{9 + 5x - x^2} = 1$$

แล้วค่าของ $\left| \frac{4 - 12x^{-1} + 9x^{-2}}{3x^{-2} - 2x^{-1}} \right|$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ

สรุปภาพรวม “log ลอการิทึม” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ลอการิทึม แนวสูตรพื้นฐาน $\log$
2. โจทย์ลอการิทึม แนวแก้สมการ $\log$
3. โจทย์ลอการิทึม แนวแก้สมการ $\log$

สูตรของ log

$\log_a x$
เงื่อนไข : หลัง $\log > 0$
ฐาน $\log > 0$ และ $\neq 1$

สูตร 10.1! $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$
สูตร 10.2! $\log_z x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

สูตร 10.3! $\log_a a = 1$
สูตร 10.4! $\log_a 1 = 0$

สูตร 10.5! $\log_a x^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a x$

สูตร 10.8! $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

สูตร 10.10! $x^{\log_b a} = a^{\log_b x}$

เอ็กซ์กำลังล็อก a นั้นยากอยู่

🎵 ผากหัวใจให้กันเอาไว้ก่อน

เปลี่ยนสูตรโดยสลับ x และ a

🎵 ที่เราจะต้องหำเห็นไป

สูตร 10.6! $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

สูตร 10.9! $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

สูตร 10.7! $\log_a x^n = \log_a \frac{1}{n} x$

ระวัง 10.1! $\log(x + y) \neq \log x + \log y$

ระวัง 10.2! $\log(x - y) \neq \log x - \log y$

ระวัง 10.3! $(x \pm y)^n \neq x^n \pm y^n$

$e \approx 2.7182$

$\log_{10} x = \log x$
 $\log_e x = \ln x$

สูตร 10.11! $b^{\log_b a} = a$

ต่อด้วยสูตร ฐาน log และ expo

🎵 เพราะว่าเราลำบากอยู่ไหนใด

เหมือนกันให้เอาหลัง log มาตอบ

🎵 หัวใจก็ยังมีคนดูแล

ตัวอย่าง 10.1

- จำ $\log 2 \approx 0.30103$
- $\log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot (\log 2) \approx 2 \cdot (0.30103) = 0.60206$
- $\log 5 = 1 - \log 2 \approx 1 - 0.30103 = 0.69897$
- $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot (\log 2) \approx 3 \cdot (0.30103) = 0.90309$

สูตร 10.12! $\log 2 = 1 - \log 5$

🎵 อาจจะมีบางคราว เราพบใครใหม่

สูตร 10.13! และ $\log 5$ ก็ $= 1 - \log 2$

🎵 เกิดวันไหน ไปตามประสาคนไกล

ตัวอย่าง 10.3

- จำ $\log 3 \approx 0.4771$
- $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 \approx 0.30103 + 0.4771 = 0.77813$
- $\log 9 = \log 3^2 = 2 \cdot (\log 3) \approx 2 \cdot (0.4771) = 0.9542$

ตัวอย่าง 10.5 จงหาค่าของ $\log_3 15 + \log_3 12 + \log_3 5 - \log_3 9$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} &= \log_3 \left(\frac{15 \times 2 \times 5}{9} \right) = \log_3 100 = \log_3 10^2 = 2 \cdot (\log_3 10) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\log_{10} 3} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{\log 3} \right) \approx 2 \cdot \left(\frac{1}{0.4771} \right) \end{aligned}$$

➢ จำ $\log 1 = 0$

➢ จำ $\log 7 \approx 0.84509$

➢ $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$

BRAN-Pb2.35 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1

ถ้า $(\log_b a)(\log_d c) = 1$

แล้วจงหาค่าของ $a^{(\log_b c-1)} b^{(\log_c d-1)} c^{(\log_d a-1)} d^{(\log_a b-1)}$ **ตอบ**

สูตร 10.3! $\log_m m = 1$

วิธีเร็วๆ

ถ้า $(\log_b a)(\log_d c) = 1$

จะหาค่าของ $a^{(\log_b c-1)} b^{(\log_c d-1)} c^{(\log_d a-1)} d^{(\log_a b-1)}$

วิธีจริง

BRAN-Pb2.35 **ตอบ 1**

เพราะว่า

$$(\log_b a)(\log_d c) = 1$$

$$\frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log c}{\log d} = 1$$

จะได้

$$(\log_d a)(\log_b c) = 1$$

สูตร 10.8! $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$

สูตร 10.9! $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

สูตร 10.11! $b^{\log_b a} = a$

ต่อด้วยสูตร ฐาน $\log$ และ $\exp$

🎵 **เชื่อว่าเราลำบากอยู่หนใด**

เหมือนกันให้เอา.....

🎵 **หัวใจก็ยังมีความดูแล**

จะนั้น $\log_b c = \frac{1}{\log_d a} = \log_a d$, $\log_c d = \frac{1}{\log_d c} = \log_b a$

$\log_d a = \frac{1}{\log_b c} = \log_c b$, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \log_d c$

$$\begin{aligned} \therefore a^{(\log_b c-1)} b^{(\log_c d-1)} c^{(\log_d a-1)} d^{(\log_a b-1)} &= \frac{a^{\log_b c} \cdot b^{\log_c d} \cdot c^{\log_d a} \cdot d^{\log_a b}}{abcd} \\ &= \frac{a^{\log_a d} \cdot b^{\log_b a} \cdot c^{\log_c b} \cdot d^{\log_d c}}{abcd} \\ &= \frac{d \cdot a \cdot b \cdot c}{abcd} = 1 \end{aligned}$$

โจทย์เพิ่มเติมลอการิทึม แนวสูตรพื้นฐาน

SheLL1.14 (PAT1'ก.ค.53) ให้ x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $3^{5x} \cdot 9^{x^2} = 27$

และ $y = \frac{(\log_2 3)(\log_4 5)(\log_6 7)}{(\log_4 3)(\log_6 5)(\log_8 7)}$ จงหาค่าของ x^y เท่ากับข้อใด

- 1) $-\frac{1}{8}$
- 2) $\frac{1}{8}$
- 3) -27
- 4) 27

FPAT-Pb9 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 โดยที่ $\log_a d = 30$, $\log_b d = 50$ และ $\log_{abc} d = 15$ จงหาค่าของ $\log_c d$ เท่ากับเท่าใด

- 1) 75
- 2) 120
- 3) 150
- 4) 180

FPAT-Pb8 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $m \cdot \log_{50} 5 + n \cdot \log_{50} 2 = 1$ แล้ว $m + n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 2
- 2) 3
- 3) 4
- 4) 6

KAiOU-Pb1.10 (PAT1'มี.ค.53) กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก และ $y \neq 1$ ถ้า $\log_y 2x = a$ และ $2^y = b$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{1}{2} (\log_2 b)^a$
- 2) $2(\log_2 b)^a$
- 3) $\frac{a}{2} (\log_2 b)$
- 4) $2a(\log_2 b)$

FPAT-Pb7 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้า $4(\log a)^2 + 9(\log b)^2 = 12(\log a)(\log b)$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1) $b^2 = a$
- 2) $a^2 = b$
- 3) $a^3 = b^2$
- 4) $a^2 = b^3$

โจทย์ลอการิทึม แนวสูตรพื้นฐาน VS ผลบวกราก, ผลคูณราก

BRAN-Pb1.10 (PAT1'ต.ค.53) ถ้า a, b และ c เป็นรากของสมการ $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$

แล้วจงหา $\log_{27} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

- 1) $\frac{1}{9}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) 1

แนวคิดเร็ว

เทคนิคสั้นๆ กับครู Sup'k

ผลคูณราก คือ..... ผลบวกราก คือ.....

♪ จับมือไว้แล้วไปด้วยกัน เหมือนว่าไม่มีวันจะพรากไป

แล้วไล่เครื่องหมาย $+, -, -, \dots$

♪ ทำอะไรได้ตั้งฝันใฝ่ ถ้าเราตั้งใจ

แต่ขอให้..... co-ef หน้าสุด ต้องเป็น

♪ จุดหมายที่ฝันกันไว้ ก็คงไม่เกินมือเรา

$$1 \cdot x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$$

$$\text{ผลบวกราก} = a + b + c = \dots\dots\dots$$

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = \dots\dots\dots$$

$$\text{ผลคูณราก} = a \cdot b \cdot c = \dots\dots\dots$$

แนวคิดที่ 2

ขั้นที่ 1 เนื่องจาก $x = a, b, c$ เป็นราก(เป็นคำตอบ)ของสมการ $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$

$$\text{จึงได้ว่า } x^3 + kx^2 - 18x + 2 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

$$x^3 + kx^2 - 18x + 2 = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$\text{ฉะนั้น } ab + bc + ca = -18 \text{ และ } abc = -2$$

$$\text{ขั้นที่ 2 จงหา } \log_{27} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \text{หา ค.ร.น. เพื่อรวมเศษส่วน} = \log_{27} \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{bc}{bc} + \frac{1}{b} \cdot \frac{ac}{ac} + \frac{1}{c} \cdot \frac{ab}{ab} \right)$$

$$= \log_{27} \left(\frac{bc + ac + ab}{abc} \right) = \log_{27} \left(\frac{-18}{-2} \right) = \log_{27} 9$$

$$= \log_{3^3} 3^2 = \frac{2}{3} \cdot (\log_3 3) = \frac{2}{3} \cdot (1) = \frac{2}{3} \text{ ตอบ}$$

โจทย์ลอการิทึม แนวแก้สมการ log

สูตร I

เจอ $\log_m \heartsuit = \log_m \square \rightarrow \dots\dots\dots$

สูตร II

เจอ $\log_5 \heartsuit = 7 \rightarrow \dots\dots\dots$

Happy-Pb 3.1 (PAT1'เม.ย.57) ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\log_2(x+7)^2 + 4\log_4(x-3) = 3\log_8(64x^2 - 256x + 256)$$

จงหาผลบวกของสมาชิกทุกตัวในเซต A

ตอบ 0005.00

ข้อควรระวัง จากครู Sup'k

แนวคิด

$$\log_2(x+7)^2 + 4\log_4(x-3) = 3\log_8(64x^2 - 256x + 256)$$

$$\log_2(x+7)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\log_2(x-3)\right) = 3\left(\frac{1}{3}\log_2(8x-16)^2\right)$$

$$\log_2(x+7)^2 + 2\log_2(x-3) = \log_2(8x+16)^2$$

$$\log_2(x+7)^2 + \log_2(x-3)^2 = \log_2(8x+16)^2$$

$$\log_2[(x+7)(x-3)]^2 = \log_2(8x-16)^2$$

ฉะนั้น $[(x+7)(x-3)]^2 = (8x-16)^2$

$$(x^2 + 4x - 21)^2 - (8x - 16)^2 = 0$$

จะได้ $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 12x - 37) = 0$ [$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$]

$$(x+1)(x-5)(x^2 + 12x - 37) = 0$$

$$\therefore (x+1) = 0, (x-5) = 0, (x^2 + 12x - 37) = 0$$

$$\therefore x = -1, x = 5, x = \frac{-12 \pm \sqrt{292}}{2}$$

ตรวจคำตอบเงื่อนไขของ log จะได้ $\therefore x = 5$

จะได้เซตคำตอบของสมการ $A = \{5\}$

ดังนั้น ผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน A เท่ากับ 5

BRAN-Pb1.11 (PAT1'ต.ค.53) เซตคำตอบของสมการ $\log_3^2 x - \log_{27} x^3 = 6$ ตรงกับเซตคำตอบของสมการในข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = 0$
- 2) $2 \log_2 (x + 1) - \log_2 (x^2 - 14x + 41) = 1$
- 3) $3^{(1+\sqrt{x^2 - 8x + 5})} + 3^{(2-\sqrt{x^2 - 8x + 5})} = 28$
- 4) $\log_{3x} 3 + \log_{27} 3x + \frac{4}{3} = 0$

ตอบ ข้อ 1.

แนวคิด

$$\text{เนื่องจาก } \log_{27} x^3 = \frac{\log_3 x^3}{\log_3 27} = \frac{3 \log_3 x}{3} = \log_3 x$$

สมการ $\log_3^2 x - \log_{27} x^3 = 6$ ที่ต้องการแก้

จึงเปลี่ยนรูปเป็น $(\log_3 x)^2 - \log_3 x = 6$

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6 = 0$$

$$(\log_3 x - 3)(\log_3 x + 2) = 0$$

$$\log_3 x = 3, -2$$

$$x = 3^3, 3^{-2} \rightarrow x = 27, \frac{1}{9}$$

$\therefore$ เซตคำตอบ คือ $\left\{\frac{1}{9}, 27\right\}$, ต่อไปดูว่าเซตคำตอบนี้ตรงกับเซตคำตอบในตัวเลือกใด

$$\begin{aligned} (1) \quad & \log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = 0 \\ & \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = 1 \\ & \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = \frac{1}{3} \\ & \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ & \frac{1}{9x^2 - 244x + 29} = \frac{1}{2} \\ & 9x^2 - 244x + 27 = 0 \\ & (9x - 1)(x - 27) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{9}, 27 \end{aligned}$$

เซตคำตอบของตัวเลือก 1. คือ $\left\{\frac{1}{9}, 27\right\}$ ตัวเลือก 1. จึงเป็นคำตอบ

เพื่อประโยชน์ของน้องๆ จะหาเซตคำตอบของตัวเลือกอื่นๆ ที่เหลือด้วย

$$(2) \quad 2 \log_2 (x+1) - \log_2 (x^2 - 14x + 41) = 1 \quad (\text{เงื่อนไข : หลัง } \log > 0 \rightarrow \therefore x > -1)$$

$$\log_2 (x+1)^2 = \log_2 2 + \log_2 (x^2 - 14x + 41)$$

$$\log_2 (x^2 + 2x + 1) = \log_2 2(x^2 - 14x + 41)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 - 14x + 41)$$

$$x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$(x - 27)(x - 3) = 0 \rightarrow x = 3, 27$$

เซตคำตอบของตัวเลือก 2. คือ $\{3, 27\}$

$$(3) \quad 3^{\left(1+\sqrt{x^2-8x-5}\right)} + 3^{\left(2-\sqrt{x^2-8x-5}\right)} = 28$$

เพื่อความสะดวก ให้ $y = \sqrt{x^2 - 8x - 5}$ ฉะนั้น $y \geq 0$

และได้ว่า

$$3^{1+y} + 3^{2-y} = 28$$

$$3 \cdot 3^{2y} + 9 = 28 \cdot 3^y$$

$$3 \cdot 3^{2y} - 28 \cdot 3^y + 9 = 0$$

$$(3 \cdot 3^{2y} - 1)(3^y - 9) = 0$$

$$3^y = \frac{1}{3}, 9 \rightarrow y = -1, 2$$

$$\text{จะได้ } y = 2 \text{ เท่านั้น} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 8x - 5} = 2$$

$$x^2 - 8x - 5 = 4$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$(x - 9)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 9, -1$$

เซตคำตอบของตัวเลือก 3. คือ $\{-1, 9\}$

$$(4) \quad \log_{3x} 3 + \log_{27} 3x + \frac{4}{3} = 0$$

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 3x} + \frac{\log_3 3x}{\log_3 27} + \frac{4}{3} = 0$$

$$\frac{1}{\log_3 3x} + \frac{\log_3 3x}{3} + \frac{4}{3} = 0$$

$$(\log_3 3x)^2 + 4(\log_3 3x) + 3 = 0$$

$$(\log_3 3x + 3)(\log_3 3x + 1) = 0$$

$$\log_3 3x = -3, -1$$

$$3x = \frac{1}{27}, \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{81}, \frac{1}{9}$$

เซตคำตอบของตัวเลือก 4. คือ $\left\{\frac{1}{81}, \frac{1}{9}\right\}$

FPAT-Pb11 (PAT1'ก.ค.52) เซตคำตอบของสมการ $\log \sqrt{2} (4 - x) = \log_2 (9 - 4x) + 1$ เป็นสับเซตของช่วงใด

- 1) $[-9, -7)$ 2) $[-7, -2)$ 3) $[-2, 2)$ 4) $[2, 7)$

NaDate-Pb2.29 (PAT1'มี.ค.56) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } A = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_{\sqrt{3}} (x - 1) - \log_{\sqrt[3]{3}} (x - 1) = 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\}$$

แล้วสามเท่าของผลคูณของสมาชิกในเซต $A \cup B$ ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด ตอบ.....

KMK-Pb2.10 (PAT1'ต.ค.52) รากที่มีค่าน้อยที่สุดของสมการ $2^{\log(x-2)} \cdot 2^{\log(x-3)} = 2^{\log 2}$ มีค่าเท่าใด ตอบ.....

FPAT-Pb12 (PAT1'มี.ค.52) ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ อยู่ในช่วงใด

- 1) $[0, 4)$ 2) $[4, 8)$ 3) $[8, 12)$ 4) $[12, 16)$

KMK-Pb2.9 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้ $\log_y x + 4 \log_x y = 4$ แล้ว $\log_y x^3$ เท่ากับเท่าใด
ตอบ.....

Happy-Pb 3.2 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\log_3 (3^{2x^2+2x} + 9) = x^2 + x + \frac{1}{\log 3}$$

$$\text{และให้ } B = \{x^2 \mid x \in A\}$$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

Happy-Pb 3.3 (PAT1'เม.ย.57)

$$\text{ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ } \log_6 (3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + \log_6 5$$

$$\text{และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ } x + \sqrt{1-x^2} = 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

จงหาจำนวนสมาชิกของ $A \cup B$

ตอบ.....

โจทย์เพิ่มเติมลอการิทึม แนวแก้อสมการ log

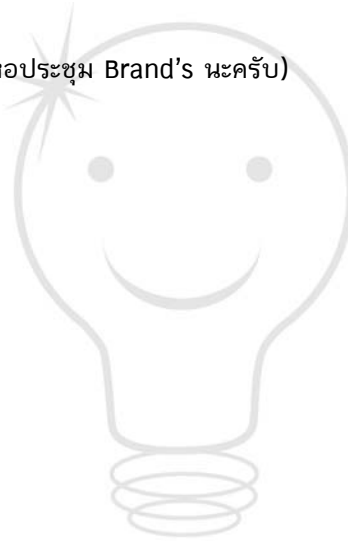
NaDate-Pb1.12 (PAT1'มี.ค.56) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_x \left(\frac{2}{x-1} \right) \geq 1$

แล้ว A เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\{x \in R \mid |x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2\}$
- 2) $\{x \in R \mid |2x + 5| > 9\}$
- 3) $\{x \in R \mid 0 \leq |x + 3| \leq 5\}$
- 4) $\{x \in R \mid x^3 > 3x^2\}$

วิธีลัด (ฟังครู Sup'k สอนสดในหอประชุม Brand's นะครับ)



วิธีจริง

เงื่อนไข : หลัง log > 0

$$\therefore \text{จะได้ } \frac{2}{x-1} > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \rightarrow \therefore x \in (1, \infty) \quad \dots(1)$$

ต่อไปแก้อสมการ, $\log_x \left(\frac{2}{x-1} \right) \geq 1$

$$\frac{2}{x-1} \geq 1 \quad (\text{เพราะ } x > 1, \text{ ไม่ต้องกลับทิศอสมการ})$$

$$2 \geq x(x-1)$$

$$0 \geq x^2 - x - 2$$

$$0 \geq (x-2)(x+1)$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2$$

$$\therefore x \in [-1, 2] \quad \dots(2)$$

นำ $(1) \cap (2)$; จะได้เซตคำตอบของอสมการ คือ $(1, \infty) \cap [-1, 2]$

คือ $(1, 2]$

$$\therefore A = (1, 2]$$

ต่อไปตรวจสอบตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $|x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2$

จะได้ $x^2 + 2x - 3 \leq 0 \rightarrow (x + 3)(x - 1) \leq 0 \rightarrow \therefore x \in [-3, 1]$
 $\therefore A \not\subset [-3, 1]$

ตัวเลือก 2. $|2x + 5| > 9$

จะได้ $2x + 5 > 9$ หรือ $2x + 5 < -9$
 $x > 2$ หรือ $x < -7$
 $\therefore x \in (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$
 $\therefore A \not\subset (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$

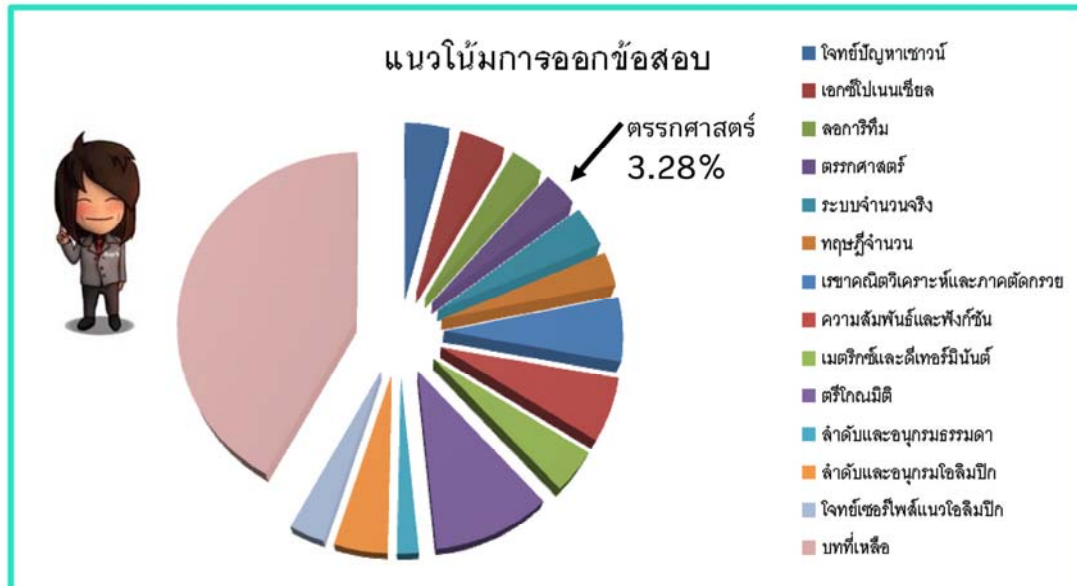
ตัวเลือก 3. $0 \leq |x + 3| \leq 5$

จะได้ $-5 \leq x + 3 \leq 5$
 $-8 \leq x \leq 2$
 $\therefore x \in [-8, 2]$
 $\therefore A \subset [-8, 2]$ $\therefore$ ตอบตัวเลือก 3.

ตัวเลือก 4. $x^3 > 3x^2$

จะได้ $x^2(x - 3) > 0$
 $x - 3 > 0$
 $x > 3$
 $\therefore x \in (3, \infty)$
 $\therefore A \not\subset (3, \infty)$

สรุปภาพรวม “ตรรกศาสตร์” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวลำดับการทำแบบตรง VS ลำดับการทำแบบย้อนกลับ
2. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวสมมูล VS สัจนิรันดร์
3. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวลึบปริมาณตัวแปรเดียว
4. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวลึบปริมาณสองตัวแปร
5. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวสมเหตุสมผล
6. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวอื่นๆ

ทบทวนสูตรตรรกศาสตร์

นิเสธ

P	$\sim P$
T	$\sim T \equiv F$
F	$\sim F \equiv T$

และ

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	$T \wedge T \equiv T$
T	F	$T \wedge F \equiv F$
F	T	$F \wedge T \equiv F$
F	F	$F \wedge F \equiv F$

หรือ

P	Q	$P \vee Q$
T	T	$T \vee T \equiv T$
T	F	$T \vee F \equiv T$
F	T	$F \vee T \equiv T$
F	F	$F \vee F \equiv F$

ถ้า...แล้ว...

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	$T \rightarrow T \equiv T$
T	F	$T \rightarrow F \equiv F$
F	T	$F \rightarrow T \equiv T$
F	F	$F \rightarrow F \equiv T$

...ก็ต่อเมื่อ...

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	$T \leftrightarrow T \equiv T$
T	F	$T \leftrightarrow F \equiv F$
F	T	$F \leftrightarrow T \equiv F$
F	F	$F \leftrightarrow F \equiv T$



ประพจน์ที่**สมมูลกัน** คือ ประพจน์สองประพจน์ที่มีค่าความจริง**เหมือนกัน**ทุกกรณี กรณีต่อกรณี
สมมูลใช้สัญลักษณ์ คือ $\equiv$
เช่น $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
T	T	T	$(T \wedge T) \equiv T$	$T \rightarrow T \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$
T	T	F	$(T \wedge T) \equiv T$	$T \rightarrow F \equiv F$	F	F	$F \vee F \equiv F$
T	F	T	$(T \wedge F) \equiv F$	$F \rightarrow T \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$
T	F	F	$(T \wedge F) \equiv F$	$F \rightarrow F \equiv T$	F	T	$F \vee T \equiv T$
F	T	T	$(F \wedge T) \equiv F$	$F \rightarrow T \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$
F	T	F	$(F \wedge T) \equiv F$	$F \rightarrow F \equiv T$	T	F	$T \vee F \equiv T$
F	F	T	$(F \wedge F) \equiv F$	$F \rightarrow T \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$
F	F	F	$(F \wedge F) \equiv F$	$F \rightarrow F \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$

สูตร

กฎการสลับที่ $p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

กฎการเปลี่ยนกลุ่ม $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

กฎการคูณกระจาย $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

กฎเดอร์มอนแกน $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

กฎนิเสธ $\sim(\sim p) \equiv p$

โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวพื้นฐาน ลำดับการทำแบบตรง

Happy-Pb 4.1 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $ab > 0$

ให้ p แทนประพจน์ “ถ้า $a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”

q แทนประพจน์ “ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$ ”

หลัก I ลำดับการทำแบบตรง

ขั้นที่ 1 ทำในวงเล็บก่อน

ขั้นที่ 2 ทำ นิเสธ

ขั้นที่ 3 ทำ $\wedge, \vee$

ขั้นที่ 4 ทำ $\rightarrow$

ขั้นที่ 5 ทำ $\leftrightarrow$

ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $(p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim p)$

2. $(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$

3. $(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow p)$

4. $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$

Happy-Pb 4.2 (PAT1'เม.ย.57) กำหนดให้ p, q, r, s เป็นประพจน์

โดยที่ $p \rightarrow (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

และ $p \leftrightarrow (s \vee t)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $(q \wedge s) \rightarrow (p \wedge q)$

หลัก II ลำดับการทำแบบย้อนกลับ

ขั้นที่ 1 ทำ $\leftrightarrow$

ขั้นที่ 2 ทำ $\rightarrow$

ขั้นที่ 3 ทำ $\wedge, \vee$

ขั้นที่ 4 ทำ นิเสธ

ขั้นที่ 5 ทำในวงเล็บ

2. $(s \wedge t) \rightarrow \sim q$

3. $(q \vee s) \leftrightarrow p$

4. $(p \rightarrow r) \rightarrow s$

BRAN-Pb1.1 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดให้ A, B และ C เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

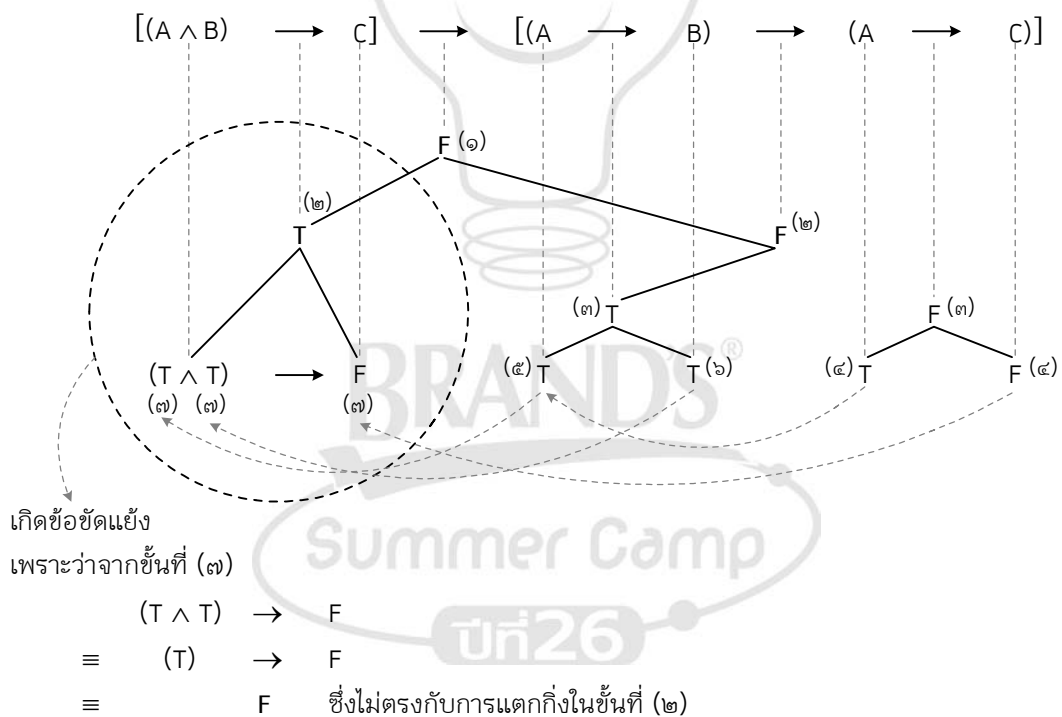
- ถ้า $A \leftrightarrow B$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $(B \wedge C) \rightarrow (\sim A \rightarrow C)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
- ประพจน์ $A \rightarrow [(A \wedge B) \vee (B \vee C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
- ประพจน์ $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
- ประพจน์ $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ สมมูลกับประพจน์ $(A \wedge B) \rightarrow C$

Tips สูตรลัด จากครู Sup'k

ตอบ ข้อ 3)

แนวคิด

ข้อ 3) ประพจน์ $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$ เป็นสัจนิรันดร์



การเกิดข้อขัดแย้ง หมายถึง การจับเท็จ **ไม่สำเร็จ**

แสดงว่า ประพจน์ในข้อนี้ เป็นสัจนิรันดร์

SheLL1.1 (PAT1'ก.ค.53) ให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์

ถ้าประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

และประพจน์ $p \leftrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ มีค่าความจริงเป็นจริง

- | | |
|--|--|
| 1) $(q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r)$ | 2) $q \rightarrow [p \vee (q \wedge \sim r)]$ |
| 3) $(p \rightarrow s) \leftrightarrow (r \leftrightarrow q)$ | 4) $(r \leftrightarrow s) \wedge [q \rightarrow (p \wedge r)]$ |

Peach-Pb2.44 (แนวPAT1'ต.ค.55) จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า p, q, r เป็นประพจน์ ซึ่ง $p \Rightarrow (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

แล้วประพจน์ $r \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{x | x^2 \leq 2x + 3\}$

แล้ว ประพจน์ $\exists x [3^x + 6 = 3^{3-x}]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้สรุปถูกต้อง

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) ก. ถูก และ ข. ถูก | 2) ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3) ก. ผิด และ ข. ถูก | 4) ก. ผิด และ ข. ผิด |

KMK-Pb1.2 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $q \wedge r$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว p และ $p \vee [(q \wedge r) \rightarrow p]$ มีค่าความจริงเหมือนกัน

ข. ถ้า p มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว r และ $(p \rightarrow q) \wedge r$ มีค่าความจริงเหมือนกัน

ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) ก. ถูก และ ข. ถูก | 2) ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3) ก. ผิด และ ข. ถูก | 4) ก. ผิด และ ข. ผิด |

FPAT-Pb17 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ประพจน์ $p \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$ สมมูลกับประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$

ข. ประพจน์ $p \wedge (q \rightarrow r)$ สมมูลกับประพจน์ $(q \rightarrow p) \vee \sim(p \rightarrow \sim r)$

ข้อใดต่อไปนี้ ถูก

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) ก. ถูก และ ข. ถูก | 2) ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3) ก. ผิด และ ข. ถูก | 4) ก. ผิด และ ข. ผิด |

FPAT-Pb18 (B-PAT1'ต.ค.51) กำหนดให้ P, Q, R, S เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(i) ประพจน์ $(\sim P \vee Q) \rightarrow (R \wedge \sim S)$ สมมูลกับ $(S \vee \sim R) \rightarrow (P \wedge \sim Q)$

(ii) ประพจน์ $(P \vee R) \wedge [(P \wedge R) \rightarrow (Q \vee R \vee \sim S)]$ เป็นสัจนิรันดร์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) ข้อ (i) ถูก และ ข้อ (ii) ถูก | 2) ข้อ (i) ถูก และ ข้อ (ii) ผิด |
| 3) ข้อ (i) ผิด และ ข้อ (ii) ถูก | 4) ข้อ (i) ผิด และ ข้อ (ii) ผิด |

Peach-Pb2.43 (แนว PAT1'ต.ค.55) สำหรับประพจน์ p, q, r ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์

- | | |
|---|---|
| 1) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ | 2) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \leftrightarrow p)$ |
| 3) $((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ | 4) $((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ |

KAI0U-Pb1.1 (PAT1'มี.ค.53) ให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

- | | |
|---|--|
| 1) $(p \rightarrow q) \vee p$ | 2) $(\sim p \wedge q) \rightarrow q$ |
| 3) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ | 4) $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ |

Happy-Pb 4.3 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใดๆ

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้าประพจน์ $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ และประพจน์ p มีค่าความจริงเป็นจริง แล้วสรุปได้ว่าประพจน์ s มีค่าความจริงเป็นจริง

(ข) ประพจน์ $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$ สมมูลกับประพจน์ $[q \rightarrow (p \rightarrow r)] \wedge [p \rightarrow (q \rightarrow s)]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

โจทย์ตรรกศาสตร์ แนววลีบ่งปริมาณตัวแปรเดียว

BRAN-Pb1.2 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง

และ $P(x)$ แทน $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$

$Q(x)$ แทน $\sqrt{x+1} > 2$

ข้อใดต่อไปนี้มีความจริงตรงข้ามกับประพจน์ $\exists x[P(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$

1) $\exists x[\sim P(x)] \rightarrow \forall x[\sim Q(x)]$

2) $\exists x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$

3) $\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)]$

4) $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$

NaDate-Pb1.3 (PAT'มี.ค.56) กำหนดให้ $P(x)$ แทน $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| < 2$

และให้ $Q(x)$ แทน $|2x+1| > x-1$

เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใด

ที่ทำให้ข้อความ $\forall x[Q(x)] \rightarrow \exists x[P(x)]$ มีความจริงเป็นเท็จ

1) $(-\infty, -4)$

2) $(-5, -1)$

3) $(-3, 2)$

4) $(-1, \infty)$

Happy-Pb4.4 (PAT'เม.ย.57) กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริงบวก
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\forall x[|x^2 - 5x + 4| < x^2 + 6x + 5]$ มีความจริงเป็นจริง

(ข) $\forall x[|x^2 - 1| \geq 2x - 2]$ มีความจริงเป็นเท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวข้อสอบปริมาณ 2 ตัวแปร

Sup'k Tips ถ้าให้ $U = \{10, 20, 30\}$

$\forall x \forall y$ จะ T ได้

Sup'k Tips ถ้าให้ $U = \{10, 20, 30\}$

$\exists x \exists y$ จะ T ได้

Sup'k Tips ถ้าให้ $U = \{10, 20, 30\}$

$\forall x \exists y$ จะ T ได้

Sup'k Tips ถ้าให้ $U = \{10, 20, 30\}$

$\exists x \forall y$ จะ T ได้

SheLL1.2 (PAT1'ก.ค.53) กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $\forall x \forall y [x + y + 2 > 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
- 2) $\forall x \exists y [x + y \geq 0]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
- 3) $\exists x \forall y [x + y = 1]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
- 4) $\exists x \exists y [x + y > 1]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

SheLL1.2 ตอบ 3.

แนวคิด

เรามีเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$ ซึ่งจะใช้พิจารณาค่าความจริงของแต่ละตัวเลือก

(1) ผิด, เนื่องจาก $\forall x \forall y [x + y + 2 > 0]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะว่ามี $x = y = -1$

ที่ทำให้ $(-1) + (-1) + 2 > 0$

$2 > 0$ เป็นเท็จ

(2) ผิด, เนื่องจาก $\forall x \exists y [x + y \geq 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ให้ x เป็นสมาชิกใดๆ ใน $\{-1, 0, 1\}$

เลือก $y = -x$ จะได้ $x + y = 0 \geq 0$

ดังนั้น $\forall x \exists y [x + y \geq 0] \equiv T$

(3) ถูก, เนื่องจาก $\exists x \forall y [x + y = 1]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

- เมื่อ $x = -1$ จะมี $y = 1$

ที่ทำให้ $(-1) + 1 = 1 \Rightarrow 0 = 1$ (เป็นเท็จ)

- เมื่อ $x = 0$ จะมี $y = 0$

ที่ทำให้ $0 + 0 = 1 \Rightarrow 0 = 1$ (เป็นเท็จ)

- เมื่อ $x = 1$ จะมี $y = -1$

ที่ทำให้ $1 + (-1) = 1 \Rightarrow 0 = 1$ (เป็นเท็จ)

(4) ผิด, เนื่องจาก $\exists x \exists y [x + y > 1]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

เพราะว่ามี $x = y = 1$

KAI0U-Pb1.2 (PAT1'มี.ค.53) ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-1, 0, 1\}$ ค่าความจริงของ $\forall x \exists y [x^2 + x = y^2 + y]$ เป็นเท็จ
- 2) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง ค่าความจริงของ $\exists x [3^x = \log_3 x]$ เป็นจริง
- 3) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง
นิเสธของข้อความ $\forall x \exists y [(x > 0 \wedge y \leq 0) \wedge (xy < 0)]$
คือ $\exists x \forall y [(xy < 0) \rightarrow (x \leq 0 \vee y > 0)]$
- 4) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็ม
นิเสธของข้อความ $\forall x [(x > 0) \rightarrow (x^3 \geq x^2)]$ คือ $\exists x [(x \leq 0) \wedge (x^3 < x^2)]$

FPAT-Pb21 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{n \in \mathbb{I}^+ \mid n \leq 10\}$

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

- 1) $\exists x \forall y [xy \leq x + y]$
- 2) $\forall x \forall y [(x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)]$
- 3) $\forall x \exists y [(x \neq 1) \rightarrow (x > y^2)]$
- 4) $\exists x \exists y [(x - y)^2 \geq y^2 + 9xy]$

KMK-Pb1.1 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-2, -1, 1, 2\}$

ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

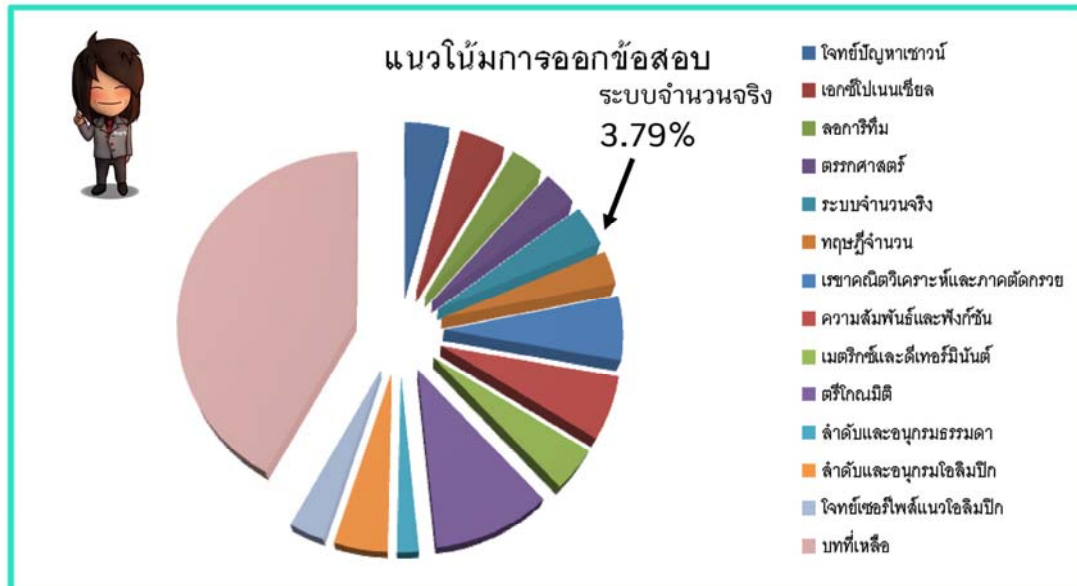
- 1) $\exists x \exists y [x \leq 0 \wedge |x| = y + 1]$
- 2) $\exists x \forall y [x \leq y \wedge -(x + y) \geq 0]$
- 3) $\forall x \exists y [x + y = 0 \vee x - y = 0]$
- 4) $\forall x \forall y [|x| < |y| \vee |x| > |y|]$

FPAT-Pb22 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ $U = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) $\forall x \forall y [x \cap y \neq \emptyset]$
- 2) $\forall x \forall y [x \cup y = U]$
- 3) $\forall x \exists y [y \neq x \wedge y \subset x]$
- 4) $\exists x \forall y [y \neq x \wedge y \subset x]$

สรุปภาพรวม “ระบบจำนวนจริง” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวทฤษฎีบทเศษเหลือ
2. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการพหุนาม
3. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการ
4. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการค่าสมบูรณ์
5. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการค่าสมบูรณ์

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวทฤษฎีบทเศษเหลือ

FPAT-Pb32 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ c เป็นค่าคงตัว และ $P(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{c}{2}x + 5$

ถ้า $P(x)$ หารด้วย $x - 2$ เหลือเศษเท่ากับ 7 แล้ว $P\left(\frac{c}{3} + 2\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 31 2) 33 3) 35 4) 37

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการพหุนาม

FPAT-Pb34 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ $A = \{x \mid x \in I \text{ และ } x^3 - x = 0\}$ เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับ A

- 1) $\{x \mid x \in R \text{ และ } x^2 - x^4 = 0\}$
2) $\{x \mid x \in R \text{ และ } x^3 + x = -2x\}$
3) $\{x \mid x \in I \text{ และ } x^2 - 1 = 0\}$
4) $\{x \mid x \in I \text{ และ } x^2 + 1 = -2x\}$

FPAT-Pb35 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ $S = \{x \mid |x|^3 = 1\}$ เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต S

- 1) $\{x \mid x^3 = 1\}$ 2) $\{x \mid x^2 = 1\}$
3) $\{x \mid x^3 = -1\}$ 4) $\{x \mid x^4 = x\}$

FPAT-Pb36 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^4 - 5\sqrt{2}x^2 + 8 = 0$

ผลบวกของสมาชิกที่เป็นจำนวนจริงบวกของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\sqrt{18}$ 2) $\sqrt{24}$
3) $\sqrt[4]{242}$ 4) $\sqrt[4]{162}$

FPAT-Pb37 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 2.1 2) 2.2
3) 3.3 4) 3.5

KMK-Pb1.4 (PAT1'ต.ค.52) ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 27x - 27 = 0$

และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (36 + \sqrt{3})x - 36 = 0$

$A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

- 1) $[-3\sqrt{5}, -0.9]$ 2) $[-1.1, 0]$
3) $[0, 3\sqrt{5}]$ 4) $[1, 5\sqrt{3}]$

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการ

FPAT-Pb39 (PAT1'ก.ค.52) ถ้า $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3) \leq 15\}$ มี a เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุดใน S และมี b เป็นจำนวนที่มีค่ามากที่สุดใน S แล้ว $(b - a)^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 24

2) 12

3) 6

4) 3

Happy-Pb 5.1 (PAT1'มี.ค.57) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 4} > 3x + 2\right\}$$

แล้วเซต A เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$

2. $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

3. $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

4. $(-1, \infty)$

วิธีลัด

วิธีจริง

ให้ $y = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ จะได้ $y \geq 0$ และ $x^2 - 3x - 2 = y^2 - 6$

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 4} > 3x + 2$$

$$(x^2 - 3x - 2) + \sqrt{x^2 - 3x + 4} > 0$$

$$(y^2 - 6) + y > 0$$

$$(y + 3)(y - 2) > 0$$

เพราะว่า $y \geq 0 \rightarrow y + 3 > 0$ จึงกล้า นำ $(y + 3)$ ไปหาทั้งสองข้าง

$$y - 2 > 0$$

$$y > 2$$

$$y^2 > 4$$

$$x^2 - 3x + 4 > 4$$

$$x^2 - 3x > 0$$

$$x(x - 3) > 0$$

จะได้ $(x < 0 \text{ หรือ } x > 3)$ ทำให้ $A = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

ดังนั้น $A \subset (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการ ติดเศษส่วน ด้านใดด้านหนึ่ง เท่ากับ 0

FPAT-Pb41 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ $X = \left\{ x \mid \frac{(x-2)(x+3)}{(x+4)(2x-1)} \leq 0 \right\}$ และ $Y = \{x \mid x \in X \text{ และ } x < 0\}$

ถ้า p เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของ X และ q เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของ Y แล้ว $|pq|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 6
- 2) 8
- 3) 10
- 4) 12

FPAT-Pb43 (PAT1'ก.ค.52) ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$

ถ้า a เป็นสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดในเซต $A \cap (2, \infty)$ และ b เป็นจำนวนจริงลบที่มีค่ามากที่สุด โดยที่ $b \notin A$ แล้ว $a^2 - b^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) -5
- 2) -9
- 3) 5
- 4) 9

FPAT-Pb42 (PAT1'ก.ค.52) ให้ X คือ เซตคำตอบของอสมการ $\frac{(2x+1)(x-1)}{2-x} \geq 0$

Y คือ เซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 7x + 3 < 0$ ค่าของ $6a - b$ มีค่าเท่าใด เมื่อ $X \cap Y = [a, b)$

- 1) 4
- 2) 6
- 3) 8
- 4) 10

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการ ติดเศษส่วน ด้านใดด้านหนึ่ง ไม่เท่ากับ 0

KMK-Pb1.5 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้ $S = \left\{ x \mid \frac{x}{x^2 - 3x - 2} \geq \frac{x+2}{x^2 - 1} \right\}$

ช่วงในข้อใดต่อไปนี้ เป็นสับเซตของ S

- 1) $(-\infty, -3)$
- 2) $(-1, 0.5)$
- 3) $(-0.5, 2)$
- 4) $(1, \infty)$

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการค่าสัมบูรณ์

Happy-Pb 5.2 (PAT1'เม.ย.57) ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $|2 - 2x| + |x + 2| = 4 - x$ แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. $(-4, 0)$ | 2. $(-1, 1)$ |
| 3. $(0, 4)$ | 4. $(-3, 2)$ |

วิธีลัด 1

วิธีลัด 2

วิธีจริง

แยกกรณีคิด

กรณีที่ 1 $x < -2$

$$|2 - 2x| + |x + 2| = 4 - x$$

$$2|x - 1| + |x + 2| = 4 - x$$

$$2(1 - x) + (-x - 2) = 4 - x$$

$$-3x = 4 - x$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

ใช้เป็นคำตอบไม่ได้

$\therefore$ เซตคำตอบกรณีที่ 1 $= \emptyset$

กรณีที่ 2 $-2 \leq x < 1$

$$2(1 - x) + (x + 2) = 4 - x$$

$$4 - x = 4 - x \text{ เป็นจริงเสมอ}$$

$$\therefore x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{เซตคำตอบกรณีที่ 2} &= x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 1 \\ &= [-2, 1) \end{aligned}$$

กรณีที่ 3 $x \geq 1$

$$2(x - 1) + (x + 2) = 4 - x$$

$$3x = 4 - x$$

$$4x = 4$$

$$\therefore \text{เซตคำตอบกรณีที่ 3} = \{1\}$$

ทำให้ เซตคำตอบของสมการ คือ เซตคำตอบกรณีที่ 1 $\cup$ กรณีที่ 2 $\cup$ กรณีที่ 3

$$\text{คือ } \emptyset \cup [-2, 1) \cup \{1\}$$

$$\text{คือ } [-2, 1]$$

$$\therefore A = [-2, 1) \cup \{1\} = [-2, 1]$$

$$\therefore A \subset (-3, 2) \text{ ตอบ ข้อ 4.}$$

Happy-Pb 5.3 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และ $a < b$

เซตคำตอบของสมการ $|x - a| - |x - b| = b - a$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\{b\}$
2. $(a, b]$
3. $[b, \infty)$
4. $\left(\frac{a+b}{2}, \infty\right)$

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการค่าสัมบูรณ์ แบบมีแอ็บข้างเดียวอีกข้างเป็นค่าคงที่

KAIU-Pb1.4 (PAT1'มี.ค.53) กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 4\}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ คือ เซตของจำนวนจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid |3 - x| > 4\}$
- 2) $A' \subset (-1, \infty)$
- 3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\}$
- 4) $A \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| < 7\}$

BRAN-Pb1.3 (PAT1'ต.ค.53) ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S

ให้ $A = \{x \in I \mid |x^2 - 1| < 8\}$ และ $B = \{x \in I \mid 3x^2 + x - 2 \geq 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) จำนวนสมาชิกของ $P(A - B)$ เท่ากับ 4
- 2) จำนวนสมาชิกของ $P(I - (A \cup B))$ เท่ากับ 2
- 3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 4) $P(A - B) - P(A \cap B) = \{\{0\}\}$

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการค่าสัมบูรณ์ แบบมีแอ็บข้างเดียวอีกข้างเป็นตัวแปร

FPAT-Pb46 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ $A = \{x \mid |x - 1| \leq 3 - x\}$ และ a เป็นสมาชิกค่ามากที่สุดของ A ค่าของ a อยู่ในช่วงใด

- 1) $(0, 0.5]$
- 2) $(0.5, 1]$
- 3) $(1, 1.5]$
- 4) $(1.5, 2]$

Happy-Pb 5.4 (PAT1'เม.ย.57)

กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่เป็นคำตอบของสมการ

$$\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$$

และ B เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่เป็นคำตอบของอสมการ

$$|x^2 - 2x| + x^2 > 4$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (ก) $A \subset B$
- (ข) จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ $A \cap B$ เท่ากับ 2

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการค่าสัมบูรณ์ แบบมีแอมป์สองข้าง

FPAT-Pb45 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้าช่วง (a, b) เป็นเซตคำตอบของอสมการ $2|x + 3| > 3|x - 2|$ แล้ว $b - a$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) 11
- 2) 12
- 3) 13
- 4) 14

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการค่าสัมบูรณ์ แบบปลดแอมป์โดยนิยาม

SheLL1.4 (PAT1'ก.ค.53) ถ้า $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{|1-x|-2|}{x+|x|-3} > 1\right\}$ แล้ว $A \cap [0, 1)$ เท่ากับข้อใด

- 1) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
- 2) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
- 3) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$
- 4) $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

NaDate-Pb1.4 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 5| + |x| \leq 7\}$

และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 12 + |x|\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

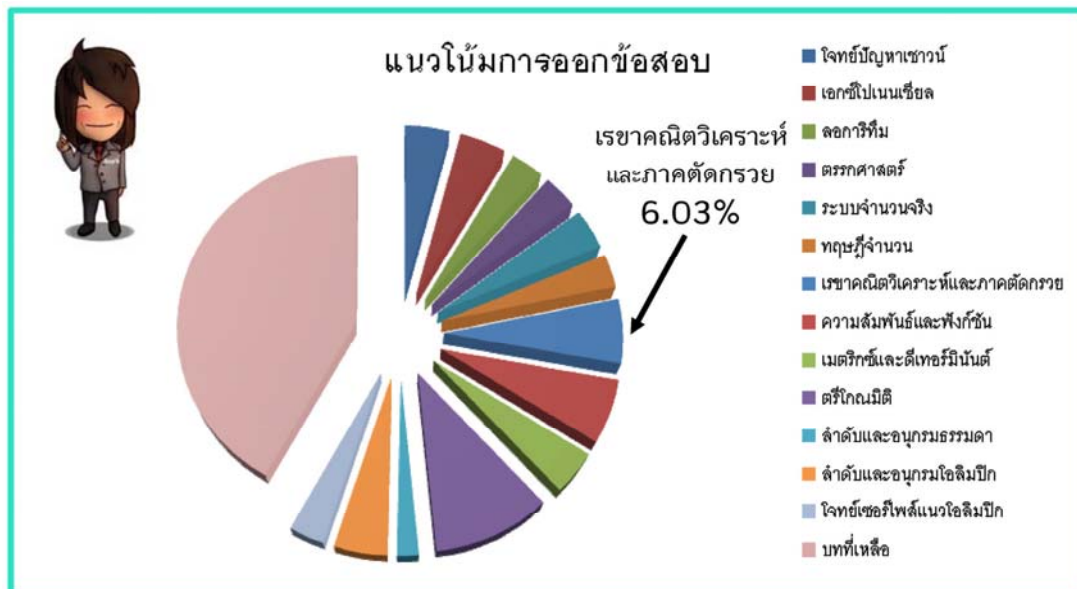
ก. $A \cap B \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$

ข. $A - B$ เป็นเซตจำกัด (finite set)

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

สรุปภาพรวม “เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



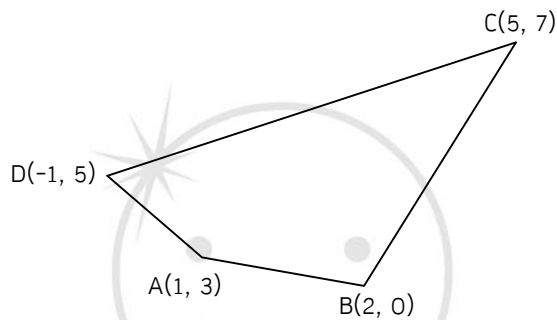
1. โจทย์เรขาคณิตวิเคราะห์
2. โจทย์ภาคตัดกรวย แนววงกลม
3. โจทย์ภาคตัดกรวย แนวพาราโบลา
4. โจทย์ภาคตัดกรวย แนววงรี
5. โจทย์ภาคตัดกรวย แนวไฮเพอร์โบลา

◆ สูตร 1.11! พื้นที่รูป n เหลี่ยม

ในกรณีที่รู้จุดยอด n จุดของรูป n เหลี่ยมใดๆ : $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$

เช่น จงหาพื้นที่ของรูป $\square$ ABCD เมื่อ $A(1, 3), B(2, 0), C(5, 7), D(-1, 5)$

แนวคิด



หลักการใช้สูตร

1. เริ่มต้นจากจุดใด ต้องลงท้ายด้วยจุดนั้น
2. วาดในทิศใดทิศหนึ่ง
3.
4.
5.

ข้อควรระวัง



โจทย์เรขาคณิตวิเคราะห์ แนวหาพื้นที่รูป n เหลี่ยม

BRAN-Pb1.9 (PAT1'ต.ค.53) ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอด

เป็น A(-2, 3), B(2, 8), C(4, 4) และ D(0, -3) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 16 ตารางหน่วย
- 2) 32 ตารางหน่วย
- 3) $10\sqrt{13}$ ตารางหน่วย
- 4) $26\sqrt{10}$ ตารางหน่วย

วิธีคิดเร็วๆ

Tips จากครู Sup'k

วิธีจริง **BRAN-Pb1.9** ตอบ 2)

ขั้นที่ 1 จากรูป

$$\text{พื้นที่ [PQRS]} = PQ \cdot QR = |-2 - 4| \cdot |-3 - 8| = 66$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ [ABP]} &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP = \frac{1}{2} |8 - 3| \cdot |-2 - 2| \\ &= 10 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

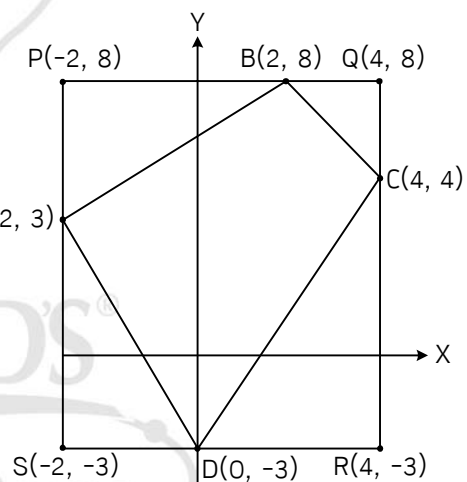
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ [BCQ]} &= \frac{1}{2} \cdot CQ \cdot BQ = \frac{1}{2} |8 - 4| \cdot |4 - 2| \\ &= 4 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ [CDR]} &= \frac{1}{2} \cdot CR \cdot DR = \frac{1}{2} |-3 - 4| \cdot |4 - 0| \\ &= 14 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

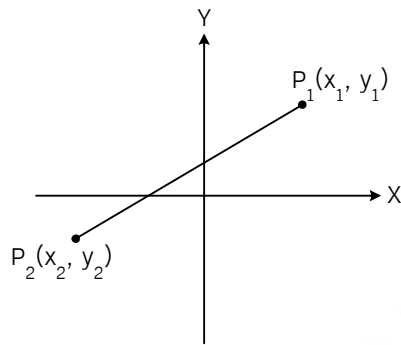
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ [ADS]} &= \frac{1}{2} \cdot AS \cdot DS = \frac{1}{2} |-3 - 3| \cdot |-2 - 0| \\ &= 6 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

$$\text{ขั้นที่ 2 จะหา พื้นที่ [ABCD]} = [\text{PQRS}] - [\text{ABP}] - [\text{BCQ}] - [\text{CDR}] - [\text{ADS}]$$

$$\therefore \text{พื้นที่ [ABCD]} = 66 - 10 - 4 - 14 - 6 = 32 \text{ ตารางหน่วย}$$



◆ สูตร 1.1! สูตรระยะระหว่างจุดสองจุด



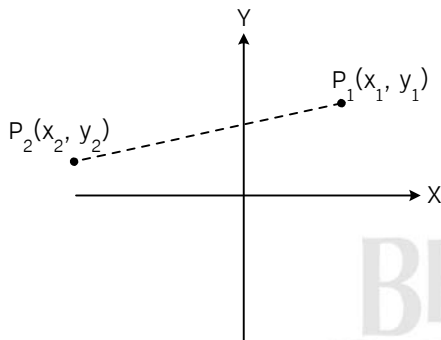
$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

เช่น จงหาระยะห่างระหว่างจุด A(5, -4), B(7, 8)

วิธีทำ

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5 - 7)^2 + ((-4) - 8)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{4 + 144} = \sqrt{148} \end{aligned}$$

◆ สูตร 1.2! สูตรจุดกึ่งกลางห่างระหว่างจุดสองจุด



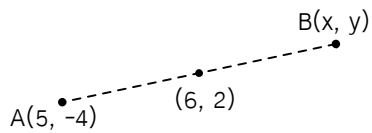
$$\text{จุดกึ่งกลางระหว่าง } \overline{P_1P_2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

เช่น จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A(5, -4), B(7, 8)

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จุดกึ่งกลาง} &= \left(\frac{5 + 7}{2}, \frac{(-4) + 8}{2} \right) \\ &= (6, 2) \end{aligned}$$

◆ สูตร 1.3! สูตรหาจุดปลาย เมื่อให้จุดกึ่งกลาง และจุดปลายอีกด้านหนึ่ง

Tips จากครู Sup'k



เช่น ให้จุด (6, 2) เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A(5, -4), B จงหาจุด B

วิธีทำ สมมติว่า จุด B(x, y)

$$(6, 2) = \text{จุดกึ่งกลาง} = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-4+y}{2} \right)$$

$$6 = \frac{5+x}{2}, \quad 2 = \frac{-4+y}{2}$$

$$7 = x, \quad 8 = y$$

$$\therefore B(x, y) = B(7, 8)$$

NichTor-Pb3.1 (แนว PAT1'5.ค.54) กำหนดให้ A(1, 3) เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{OP}$ เมื่อ O(-1, 2)

จงหาพิกัดจุด P ตอบ

วิธีทำ



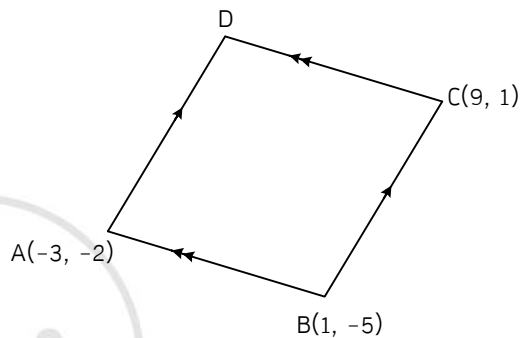
FPAT-Pb48 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่อยู่ในระนาบ XY

ถ้า $A = (-3, -2)$, $B = (1, -5)$, $C = (9, 1)$ แล้ว $|\overline{BD}|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

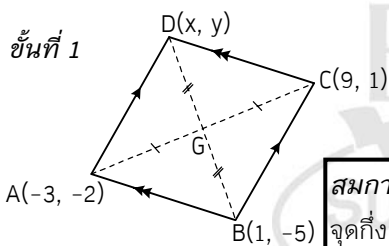
- 1) $\sqrt{91}$ 2) 10 3) $\sqrt{97}$ 4) $10\sqrt{2}$

วิธีคิดเร็วๆ

Tips จากครู Sup'k



วิธีจริง & พิสูจน์สูตรลัด



ทฤษฎีเรขาคณิต

เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน
จะตัดกันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

สมการ

จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุม AC = จุด G = จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุม BD

$$\left(\frac{[-3] + 9}{2}, \frac{[-2] + 1}{2} \right) = \left(\frac{x + 1}{2}, \frac{y + [-5]}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{[-3] + 9}{2} = \frac{x + 1}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{[-2] + 1}{2} = \frac{y + [-5]}{2}$$

$$\therefore 5 = x \quad \text{และ} \quad 4 = y$$

$$\therefore D(x, y) = D(5, 4)$$

ขั้นที่ 2 จะหา $|\overline{BD}|$ = ระยะ BD = $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - [-5])^2} = \sqrt{97}$ ตอบ

โจทย์เพิ่มเติมเรขาคณิตวิเคราะห์

KAI0U-Pb1.15 (PAT1'มี.ค.53) ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี A(0, 0) และ B(2, 2) เป็นจุดยอด และ C(x, y) เป็นจุดยอดในจุดภาค (quadrant) ที่ 2 ที่ทำให้ด้าน AC ยาวเท่ากับด้าน BC ถ้าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ 4 ตารางหน่วย แล้วจุด C อยู่บนเส้นตรงในข้อใด

- 1) $x - y + 4 = 0$
- 2) $4x + 3y - 1 = 0$
- 3) $2x - y - 3 = 0$
- 4) $x + y - 5 = 0$

KAI0U-Pb1.9 (PAT1'มี.ค.53) จุด A(-3, 1), B(1, 5), C(8, 3) และ D(2, -3) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ข้อใดต่อไปนี้ผิด

- 1) ด้าน AB ขนานกับด้าน DC
- 2) ผลบวกความยาวของด้าน AB กับ DC เท่ากับ $10\sqrt{2}$ หน่วย
- 3) ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D มีค่าเท่ากับ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ หน่วย
- 4) ระยะตั้งฉากจากจุด B ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D มีค่าเท่ากับ $\frac{9}{2}$ หน่วย

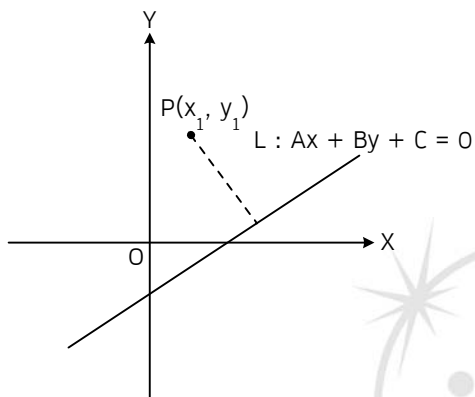
FPAT-Pb49 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ A(-1, -1) และ B(1, c) เป็นจุดในระนาบ XY ถ้า L เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด A, B และมีความชันเท่ากับ 3 แล้วเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -2 และผ่านจุด B จะมีสมการดังข้อใดต่อไปนี้

- 1) $y = -2x + 7$
- 2) $y = -2x + 5$
- 3) $y = -2x + 3$
- 4) $y = -2x + 1$

SheLL1.9 (PAT1'ก.ค.53) รูปสามเหลี่ยม ABC มี $\widehat{ABC}$ เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ถ้าพิกัดของจุด A และจุด B คือ (-4, 3) และ (-1, 2) ตามลำดับ แล้วสมการเส้นตรงในข้อใดผ่านจุด C

- 1) $x + 8y - 27 = 0$
- 2) $8x + y - 27 = 0$
- 3) $4x - 5y + 3 = 0$
- 4) $-5x + 4y + 3 = 0$

◆ สูตร 1.20! โปรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง L



สูตร ระยะห่างระหว่างจุด $P(x_1, y_1)$ กับเส้นตรง L คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ระวัง 1.20!

NichTor-Pb3.2 (แนว PAT1'ธ.ค.54) จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด $P(3, 4)$ ไปยังเส้นตรง $3y - 4x = 15$

ตอบ

วิธีทำ

Happy-Pb 6.1 (PAT1'เม.ย.57) เส้นตรง L มีความชันเท่ากับ m โดยที่ $m < 0$

และผ่านจุด A ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นตรง $x - 3y + 1 = 0$ และ $2x + 5y - 9 = 0$

ถ้าระยะทางจากเส้นตรง L ไปยังจุด $(0, 0)$ เท่ากับ k หน่วย และ $k^2 + 2m = 1$

แล้วสมการของเส้นตรง L ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $2x + y - 5 = 0$

2. $3x + y - 7 = 0$

3. $x + 2y - 4 = 0$

4. $x + 3y - 5 = 0$

Happy-Pb 6.1 ตอบ 1.

แนวคิด

ขั้นที่ 1

แก้ระบบสมการ $x - 3y + 1 = 0$ และ $2x + 5y - 9 = 0$

จะได้จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเส้น คือ จุด $A(2, 1)$

ขั้นที่ 2

เส้นตรง L มีความชันเท่ากับ $m < 0$ จึงสมมติ สมการของ L เป็น $y = mx + c$

ขั้นที่ 3

แต่ L ผ่านจุด $A(2, 1)$ ด้วย จะได้ $2m + c = 1$ หรือ $c = 1 - 2m$

ขั้นที่ 4

เพราะว่า k เป็นระยะทางจากเส้นตรง L ไปยังจุด $(0, 0)$

$$\text{ฉะนั้น } K = \frac{|m(0) - 1(0) + c|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

ขั้นที่ 5

$$\text{จาก } k^2 + 2m = 1 \text{ จะได้ } \frac{c^2}{m^2 + 1} + 2m = 1$$

$$\frac{(1 - 2m)^2}{m^2 + 1} + 2m = 1$$

$$(1 - 2m)^2 + 2m(m^2 + 1) = m^2 + 1$$

$$(1 - 2m)^2 - (1 - 2m)(m^2 + 1) = 0$$

$$(1 - 2m)(1 - 2m - (m^2 + 1)) = 0$$

$$(1 - 2m)(-2 - m)m = 0$$

$$m = \frac{1}{2}, -2, 0$$

ขั้นที่ 6 แต่ $m < 0$ จึงได้ $m = -2$ ทำให้ $c = 1 - 2m = 1 - 2(-2) = 5$

ดังนั้น สมการของเส้นตรง L อยู่ในรูป $y = -2x + 5$ หรือ $2x + y - 5 = 0$ นั่นเอง

ภาคตัดกรวย : วงกลม .

◆ สูตร 2.1! วงกลม

ระวัง! ก่อนใช้สูตร ล้มประสิทธิ์ หน้า x^2 , y^2 ต้องเท่ากับ

	สมการรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	สมการมาตรฐาน $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
จุดศูนย์กลาง		
รัศมี		

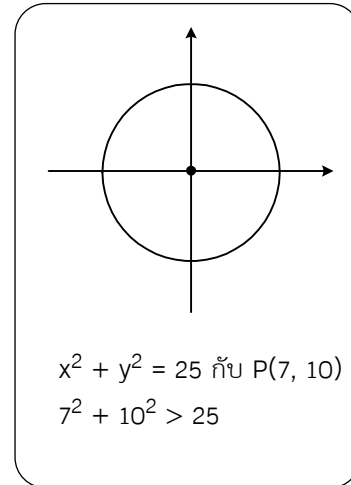
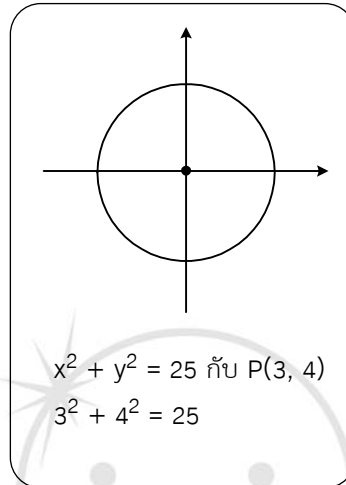
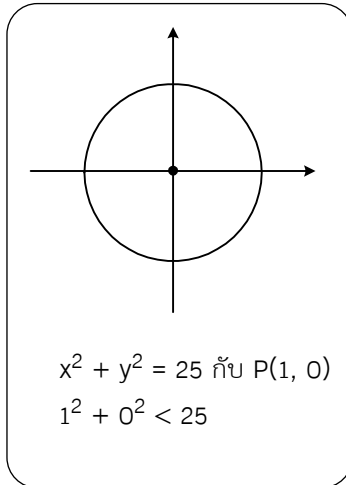
🎵 เทคนิคสั้นล้ากับครู Sup'k ร้องเพลงกับพี่ Sup'k แล้วจำได้เลย
วงกลมนั้นมีสองสิ่งสำคัญ คือจุดศูนย์กลาง กับ รัศมี ไง ศูนย์กลางอยู่ที่ $(h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$
ก่อนเคยเชื่อในลิขิตฟ้าดิน ปลอยชีวิตไปตามโชคชะตา แต่ฝันไม่เคยถึงฝั่ง ผิดหวังในใจเรื่อยมาเพราะไม่มีหัวใจ
รัศมี คือ รัดปลวกของ กำลังสองของ..... แล้ว.....
จะดีหรือเลวมันอยู่ที่คน จะมีหรือจนมันอยู่ที่ใจ ดินฟ้าไม่เคยลิขิต
.....ตัวเลขใดๆ
ชีวิตจะเป็นเช่นไร อย่าเลยอย่าไปถามฟ้า

NichTor-Pb3.3 (แนว PAT1'5.ค.54) จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$

ตอบ.....

วิธีทำ

วิธีการตรวจสอบว่า จุดใดอยู่ใน หรืออยู่บน หรืออยู่นอกวงกลม



ควรจัดสมการให้อยู่รูป $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

หลังแทนค่า จุด $P(x_1, y_1)$ ที่สนใจแล้ว

กรณีที่ 1 $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 < r^2$ แสดงว่า จุด P อยู่ในวงกลม

กรณีที่ 2 $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2$ แสดงว่า จุด P อยู่บนเส้นรอบวงกลม

กรณีที่ 3 $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 > r^2$ แสดงว่า จุด P อยู่นอกวงกลม

หรือหากจัดในรูป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

หลังแทนค่า จุด $P(x_1, y_1)$ ที่สนใจแล้ว

กรณีที่ 1 $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$ แสดงว่า จุด P อยู่ในวงกลม

กรณีที่ 2 $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$ แสดงว่า จุด P อยู่บนเส้นรอบวงกลม

กรณีที่ 3 $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$ แสดงว่า จุด P อยู่นอกวงกลม

NichTor-Pb3.4 (แนว PAT1'5.ค.54) จงตรวจสอบว่า จุด $A(1, 3)$ อยู่ด้านใน หรือด้านนอก

หรืออยู่บนเส้นรอบวงของ $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$

ตอบ

PTOR-Pb3.5 (แนวข้อสอบจริง PAT1'5.ค.54) ถ้า P เป็นจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$ ที่อยู่ใกล้จุด A(1, 3) มากที่สุด แล้วระยะทางจาก P ไปยังเส้นตรง $3y - 4x = 15$ มีค่าเท่าใด

ตอบ

วิธีลัด ให้ฟังครู Sup'k สอนในหอประชุม Brand's Summer Camp

วิธีจริง

ขั้นที่ 1 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$

จัดรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 20$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{20}^2$$

$\therefore$ วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ O(-1, 2) รัศมี $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ หน่วย

Tips จากครู Sup'k

ขั้นที่ 2 จุด P(a, b) บนวงกลมที่อยู่ใกล้ A(1, 3) มากที่สุด คือ จุด P ที่ทำให้ O, A, P อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (ดูรูป)

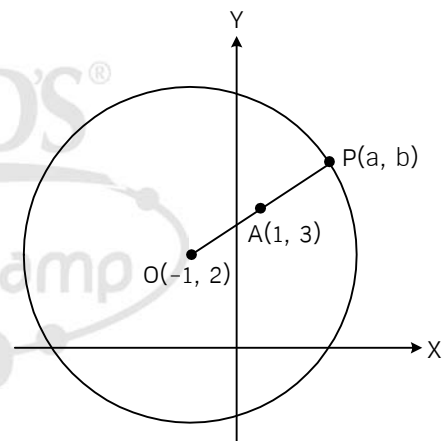
สังเกตว่า $OA = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{5} = \frac{r}{2}$

ฉะนั้น A เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{OP}$

จะได้ $\frac{a-1}{2} = 1$ และ $\frac{b+2}{2} = 3$

$a = 3$ และ $b = 4$

ฉะนั้น พิกัดของจุด P คือ P(3, 4)



ขั้นที่ 3 จะหาระยะห่างจาก P กับเส้นตรง $3y - 4x = 15$

คือ ระยะห่างจาก P กับเส้นตรง $3y - 4x - 15 = 0$

$$d = \frac{|3(4) - 4(3) - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \text{ หน่วย} = 3 \text{ หน่วย}$$

BRAN-Pb1.8 (PAT1'ต.ค.53) พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$ เป็นสมการวงกลมที่สัมผัสกับเส้นตรง

ซึ่งมีสมการเป็น $21x + 20y + 168 = 0$

ข. $y^2 + 16x - 6y = 71$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(-5, 3)$

และจุดโฟกัสที่ $(-1, 3)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

NaDate-Pb1.8 (PAT1'มี.ค.56) ให้พาราโบลา P มีสมการเป็น $y^2 - 2y + 6x + 4 = 0$

ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา P และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 2y - 6 = 0$

ณ จุด $(4, 3)$ แล้วสมการของวงกลมตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1) $7x^2 + 7y^2 - 4x - 82y - 55 = 0$

2) $7x^2 + 7y^2 + 4x + 82y + 55 = 0$

3) $7x^2 + 7y^2 - 4x + 82y - 55 = 0$

4) $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$

KMK-Pb1.9 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้ $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

และ $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0\}$

ถ้า $p \in A$ และ $q \in B$ แล้ว ระยะทางมากที่สุดที่เป็นไปได้ระหว่างจุด p และ q เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $5\sqrt{2}$ หน่วย

2) $2 + 5\sqrt{2}$ หน่วย

3) $2\sqrt{5}$ หน่วย

4) $5 + 2\sqrt{5}$ หน่วย

BRAN-Pb2.34 (PAT1'ต.ค.53) จุด $A(1, 0)$ และจุด $B(b, 0)$ เมื่อ $b > 1$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง

ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด $(-1, 0)$ และสัมผัสกับวงกลมวงนี้ มีความชันเท่ากับ $\frac{4}{3}$ แล้ว b เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

FPAT-Pb50 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ วงกลมรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 1)$

ถ้าเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $x = 1$

เส้นหนึ่งมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงกลมที่กำหนด

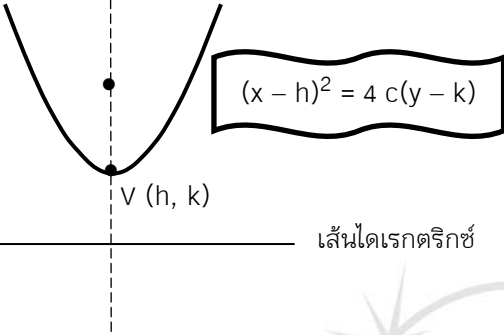
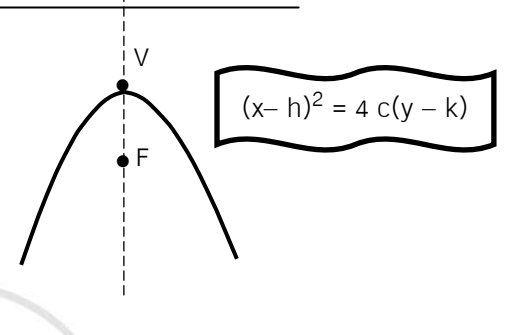
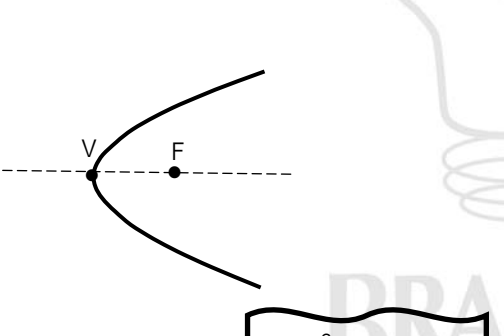
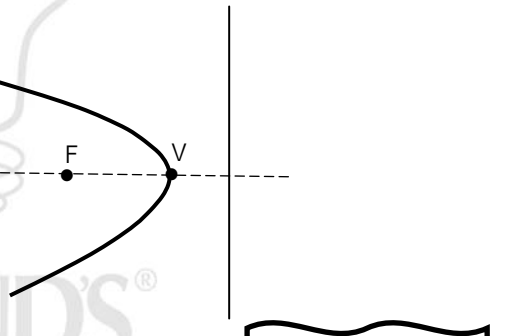
1) $(0, 1)$

2) $(0, 2)$

3) $(1, 0)$

4) $(3, 0)$

โจทย์ภาคตัดกรวย แนวพาราโบลา

เมื่อ $c > 0$  เส้นไดเรกตริกซ์ จุดยอด คือ $V(h, k)$ จุดโฟกัส คือ $F(h, k + c)$ เส้นไดเรกตริกซ์ คือ $y = k - c$	เส้นไดเรกตริกซ์ เมื่อ $c < 0$  จุดยอด คือ $V(h, k)$ จุดโฟกัส คือ $F(h, k + c)$ เส้นไดเรกตริกซ์ คือ $y = k - c$
เส้นไดเรกตริกซ์ เมื่อ $c > 0$  จุดยอด คือ $V(h, k)$ จุดโฟกัส คือ $F(h + c, k)$ เส้นไดเรกตริกซ์ คือ $x = h - c$	เส้นไดเรกตริกซ์ เมื่อ $c < 0$  จุดยอด คือ $V(h, k)$ จุดโฟกัส คือ $F(h + c, k)$ เส้นไดเรกตริกซ์ คือ $x = h - c$

หมายเหตุ : สูตรที่พิมพ์ไว้ในชีทนี้ นั้น พิมพ์ถูกต้องแล้ว

เพราะ พาราโบลา หายกับ คว่า จะใช้สูตรเดียวกัน แต่ว่า ตอนแทนค่า จะแทนค่า c ต่างกัน

ในทำนองเดียวกัน พาราโบลา ตะแคงขวา กับ ซ้าย จะใช้สูตรเดียวกัน แต่ว่า ตอนแทนค่า จะแทนค่า c ต่างกัน

ตัวอย่าง-ST-Pb 1 จงอธิบายลักษณะของกราฟพาราโบลาที่มีสมการ $x^2 - 8x + 12y + 28 = 0$

ตอบ

เส้นไดเรกทริกซ์

แนวคิด

$$x^2 - 8x + 12y + 28 = 0$$

$$x^2 - 8x = -12y - 28$$

$$x^2 - 8x + 4^2 = -12y - 28 + 4^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = -12y - 28 + 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = -12y - 12$$

$$(x - 4)^2 = -12(y + 1)$$

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

เทียบกับสูตร

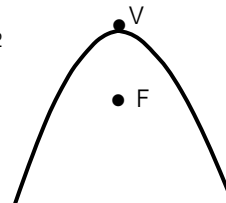
$$\therefore -h = -4, -k = +1, 4c = -12$$

$$\therefore h = 4, k = -1, c = -3$$

จุดยอด คือ $V(h, k)$ คือ $V(4, -1)$ คือ $V(4, -1)$ คือ $V(4, -1)$

จุดโฟกัส คือ $F(h, k + c)$ คือ $F(4, -1 + \{-3\})$ คือ $F(4, -1 - 3)$ คือ $F(4, -4)$

เส้นไดเรกทริกซ์ คือ $y = k - c$ คือ $y = -1 - \{-3\}$ คือ $y = -1 + 3$ คือ $y = 2$



ตัวอย่าง-ST-Pb 2 สมการของพาราโบลา $y^2 - 4y - 4x - 12 = 0$ มีจุดยอดและจุดโฟกัสตามข้อใด

ก. $V(2, 4), F(2, 3)$

ข. $V(4, 2), F(3, 2)$

ค. $V(2, -4), F(2, 3)$

ง. $V(-4, 2), F(-3, 2)$

แนวคิด

$$y^2 - 4y - 4x - 12 = 0$$

$$y^2 - 4y = 4x + 12$$

$$y^2 - 4y + 2^2 = 4x + 12 + 2^2$$

$$y^2 - 4y + 4 = 4x + 16$$

$$(y - 2)^2 = 4 \cdot (x + 4)$$

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

เทียบกับสูตร

$$\therefore -h = +4, -k = -2, 4c = 4$$

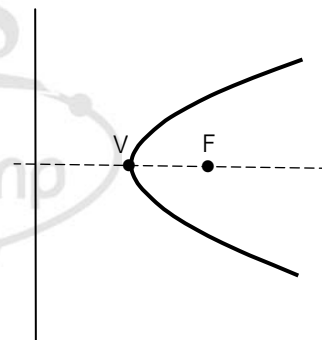
$$\therefore h = -4, k = 2, c = 1$$

จุดยอด คือ $V(h, k)$ คือ $V(-4, 2)$

จุดโฟกัส คือ $F(h + c, k)$ คือ $F(-4 + 1, 2)$ คือ $F(-3, 2)$

เส้นไดเรกทริกซ์ คือ $x = h - c$ คือ $x = -4 - 1$ คือ $x = -5$

เส้นไดเรกทริกซ์



FPAT-Pb56 (PAT1'มี.ค.52) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา
 $y^2 - 4y + 4x = 0$ และเส้นไคเรกตริกซ์ที่จุด (a, b) แล้ว a + b มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4

2. 5

3. 6

4. 7

แนวคิด

ขั้นที่ 1

$$y^2 - 4y + 4x = 0$$

$$y^2 - 4y + 4x = -4x + 4$$

$$(y - 2)^2 = -4(x - 1)$$

เทียบกับสูตร

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$$\therefore -h = -1, -k = -2, 4c = -4$$

$$\therefore h = 1, k = 2, c = -1$$

จุดยอด

คือ V(h, k)

คือ V(1, 2)

จุดโฟกัส

คือ F(h + c, k)

คือ F(1 + {-1}, 2)

คือ F(0, 2)

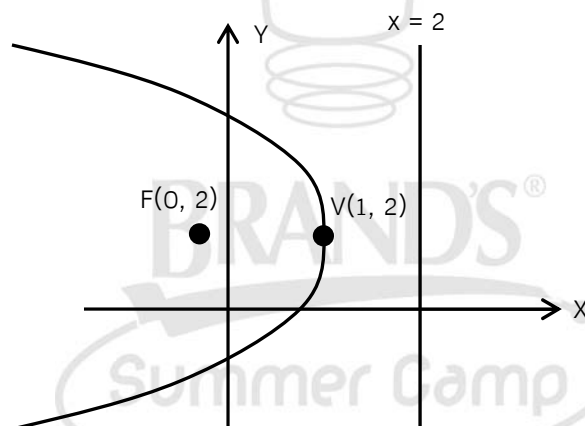
เส้นไคเรกตริกซ์

คือ x = h - c

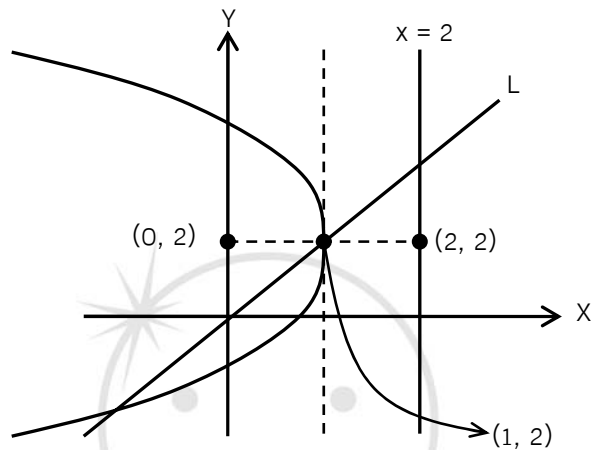
คือ x = 1 - {-1}

คือ x = 2

ขั้นที่ 2 วาดรูปได้ดังนี้



ขั้นที่ 3 จากโจทย์ บอกให้ลากเส้นตรงผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา
จึงได้รูปดังนี้



เส้นตรง L คือ เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด (0, 0) และ จุดยอดของพาราโบลา จุด V(1, 2)

$$\begin{aligned} \therefore \text{สมการเส้นตรง L} \quad & \text{คือ } (y - y_1) = m \cdot (x - x_1) \\ & \text{คือ } (y - 0) = m \cdot (x - 0) \\ & \text{คือ } (y - 0) = \frac{2 - 0}{1 - 0} \cdot (x - 0) \\ & \text{คือ } y = 2x \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4

แก้สมการหาจุดตัด ระหว่างเส้นตรง L กับเส้นไดเรกทริกซ์

$$\begin{cases} L : y = 2x \rightarrow (๑) \\ \text{เส้นไดเรกทริกซ์} : x = 2 \rightarrow (๒) \end{cases}$$

แก้สมการ (๑), (๒) ; $\therefore$ ตัดกันที่จุด (2, 4)

โจทย์ให้ว่า ตัดกันที่จุด (a, b)

$\therefore a = 2, b = 4 \rightarrow$ ดังนั้น $a + b = 6$ ตอบ ข้อ 3.

FPAT-Pb54 (PAT1'ก.ค.52) จงหาระยะทางระหว่างจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = -8x$ กับเส้นตรง $2x + y = 6$

- 1) $2\sqrt{5}$ หน่วย 2) $3\sqrt{5}$ หน่วย 3) $4\sqrt{5}$ หน่วย 4) $5\sqrt{5}$ หน่วย

FPAT-Pb55 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ P เป็นจุดตัดของเส้นตรง $x - 2y = 0$ และเส้นไคเรกตริกซ์ของพาราโบลา $x^2 = 8y$ ระยะระหว่างจุด P และเส้นตรง $2x - y = 1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{6}{\sqrt{5}}$ หน่วย 2) $\frac{7}{5}$ หน่วย 3) 7 หน่วย 4) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ หน่วย

FPAT-Pb56 (PAT1'มี.ค.52) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา $y^2 - 4y + 4x = 0$ และเส้นไคเรกตริกซ์ที่จุด (a, b) แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 4 2) 5 3) 6 4) 7

KMK-Pb2.8 (PAT1'ต.ค.52) พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(-1, 0)$ และมีจุดกำเนิดเป็นจุดโฟกัส ถ้าเส้นตรง $y = x$ ตัดพาราโบลาที่จุด P และจุด Q แล้ว ระยะทางระหว่างจุด P กับจุด Q เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

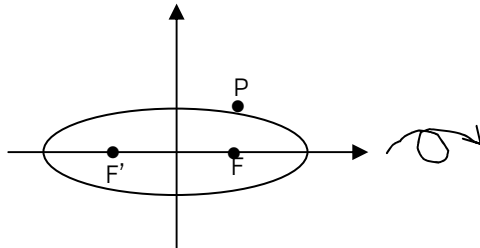
Happy-Pb 6.2 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 - y^2 - 2x = 0$

ถ้าพาราโบลาที่มีโฟกัสเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดตัดของเส้นตรง $y = 2x$ กับเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลามีเส้นไคเรกตริกซ์เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบล่า แล้วสมการของพาราโบลาข้อใด

1. $9x^2 + 12x + 12y - 3 = 0$
2. $9x^2 + 12x + 12y + 8 = 0$
3. $9x^2 + 6x + 12y - 3 = 0$
4. $9x^2 + 6x + 12y + 5 = 0$

โจทย์ภาคตัดกรวย แนววงรี

นิยาม วงรี คือ เซตของจุดใดๆ บนระนาบที่ผลบวกของระยะจากจุดใดๆ ไปยังจุดคงที่ทั้งสองมีค่าคงที่เท่ากับ $2a$



$$\text{สูตร 4.2! } |PF + PF'| = 2a$$

จุดคงที่ทั้งสองเรียกว่า จุด F, จุด F'

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จุดยอด $V = (h + a, k)$ $V' = (h - a, k)$	จุดยอด $V = (h, k + a)$ $V' = (h, k - a)$
จุดปลายแกนโท $B = (h, k + b)$ $B' = (h, k - b)$	จุดปลายแกนโท $B = (h + b, k)$ $B' = (h - b, k)$
จุดโฟกัส $F = (h + c, k)$ $F' = (h - c, k)$	จุดโฟกัส $F = (h, k + c)$ $F' = (h, k - c)$
ความยาวแกนเอก = $2a \rightarrow$ ขนานกับแกน X ความยาวแกนโท = $2b$	ความยาวแกนเอก = $2a \rightarrow$ ขนานกับแกน Y ความยาวแกนโท = $2b$

เมื่อ a คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางวงรี จนถึง จุดปลายแกนเอก

$$\text{สูตร 4.3! } a^2 = b^2 + c^2$$

b คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางวงรี จนถึง จุดปลายแกนโท

c คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางวงรี จนถึง จุดโฟกัส

Happy-Pb 6.3 (PAT1'เม.ย.57) วงรีมีสมการเป็น $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$

เมื่อ A, B, C เป็นจำนวนจริง

โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (2, 1)

และแกนเอกยาวเป็นสองเท่าของแกนโท

ข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ

1. $A + B + C = 0$

2. ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

3. วงรีมีศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

และแกนเอกของวงรียาวเท่ากับรัศมีของวงกลม

4. ผลบวกของระยะทางจากจุด (2, 6) ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองของวงรีเท่ากับ 20 หน่วย

แนวคิด

ขั้นที่ 1 วงรีมีสมการเป็น $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่จุด (2, 1)

$$\therefore \text{สมการวงรี คือ } \frac{(x-2)^2}{(a)^2} + \frac{(y-1)^2}{(b)^2} = 1$$

ขั้นที่ 2 โจทย์ให้ แกนเอกยาวเป็นสองเท่าของแกนโท (นั่นคือ $a = 2b$)

วงรีจึงต้องมีสมการในรูปมาตรฐานเป็น $\frac{(x-2)^2}{(2b)^2} + \frac{(y-1)^2}{(b)^2} = 1$

คูณกระจาย จัดรูป

$$(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = 4b^2$$

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + (8 + 4b^2) = 0 \rightarrow (*)$$

ขั้นที่ 3 โจทย์ให้ $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$

เทียบกับ(*) ; $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + (8 - 4b^2) = 0$

$$\therefore 8 - 4b^2 = -92$$

$$\therefore b^2 = 25$$

ขั้นที่ 4 แทน $b^2 = 25$ ลงใน สมการ (*)

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + (8 - 4b^2) = 0$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + (8 - 4 \cdot 25) = 0$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$$

เทียบกับโจทย์ให้ $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$

$$\therefore A = 4, B = -4, C = -8$$

จัดรูปกำลังสองสมบูรณ์ต่อเนื่อง

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

เทียบกับรูปมาตรฐาน $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$\therefore a^2 = 100, b^2 = 25$$

$$\therefore a = 10, b = 5$$

(1) ผิด : $A + B + C = 4 - 4 - 8 = -8 \neq 0$

(2) ผิด : วงรีมี $b = 5$ และ $a = 2b = 10$

$$\text{ทำให้ } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$\text{ดังนั้น ความเยื้องศูนย์กลาง} = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{5}$$

(3) ผิด : วงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

$$\text{มีรัศมียาว } \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 - 4(-20)}}{2} \text{ หน่วย} = 5 \text{ หน่วย}$$

แต่แกนเอกของวงรียาว $2a = 20$ หน่วย

ดังนั้น แกนเอกของวงรียาวกว่ารัศมีของวงกลม

(4) ถูก : เนื่องจาก $(2, 6)$ แทนค่าลงใน $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ แล้วเป็นจริง

$\therefore$ จุด $P(2, 6)$ จึงเป็นจุดบนวงรี ให้ F_1, F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรี

โดยนิยามของวงรี จะได้ $PF_1 + PF_2 = 2a = 2(10) = 20$ หน่วย ตอบ ข้อ 4.

KMK-Pb1.6 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้ $S = [-2, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in S \times S \mid x^2 + 2y^2 = 2\}$

ช่วงในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $D_r - R_r$

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) $(-1.4, -1.3)$ | 2) $(-1.3, -1.2)$ |
| 3) $(1.2, 1.4)$ | 4) $(1.4, 1.5)$ |

FPAT-Pb57 (B-PAT1'ต.ค.51) วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1, 2)$ แกนเอกขนานกับแกน X และยาว 6 หน่วย แกนโทยาว 4 หน่วย ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้เป็น

- | | |
|-------------|-------------|
| 1) $(0, 1)$ | 2) $(2, 0)$ |
| 3) $(1, 4)$ | 4) $(4, 1)$ |

FPAT-Pb58 (PAT1'ก.ค.52) ให้ E เป็นวงรีที่มีจุดโฟกัสทั้งสองอยู่บนวงกลม C ที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 1$ ถ้าวงรี E สัมผัสกับวงกลม C ที่จุด $(1, 0)$ แล้วจุดใดต่อไปนี้อยู่บนวงรี E

- | | |
|--|--|
| 1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ | 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ |
| 3) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ | 4) $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ |

FPAT-Pb59 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ วงรีรูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 3, 0)$ และผ่านจุด $\left(2, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงรีที่กำหนด

- | | |
|--------------|--|
| 1) $(-4, 0)$ | 2) $\left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ |
| 3) $(6, 0)$ | 4) $(0, -3\sqrt{2})$ |

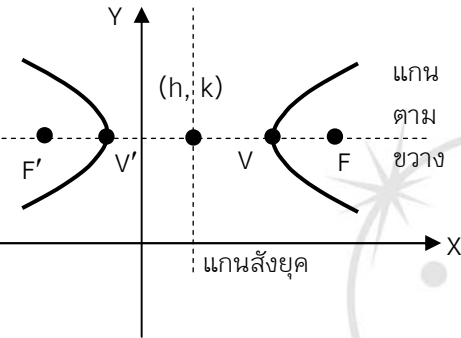
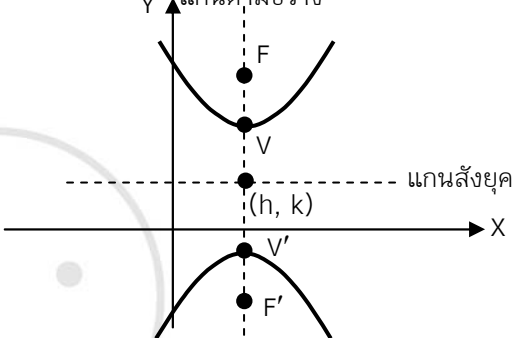
NaDate-Pb2.31 (PAT1'มี.ค.56) ให้วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และมีโฟกัส F_1 และ F_2 อยู่บนแกน X จุด $A(4, 1)$ เป็นจุดบนวงรีโดยที่ผลบวกระยะทางจากจุด $A(4, 1)$ ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองมีค่าเท่ากับ $6\sqrt{2}$ ให้เส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุด $(4.5, 0)$ และสัมผัสกับวงรีที่จุด $A(4, 1)$ ถ้า d เป็นระยะห่างระหว่างจุด $(0, 0)$ กับเส้นตรง L แล้วค่าของ $d^2|AF_1||AF_2|$ เท่ากับเท่าใด
ตอบ.....

โจทย์ภาคตัดกรวย แนวไฮเพอร์โบลา

นิยาม ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดบนระนาบที่ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุดคงที่ทั้งสองมีค่าที่เท่ากับ $2a$

$$\text{สูตร } |PF - PF'| = 2a$$

เมื่อจุด P คือ จุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลา

 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จุดยอด $V = (h + a, k)$ $V' = (h - a, k)$	จุดยอด $V = (h, k + a)$ $V' = (h, k - a)$
จุดปลายลึงยุค $B = (h, k + b)$ $B' = (h, k - b)$	จุดปลายลึงยุค $B = (h + b, k)$ $B' = (h - b, k)$
จุดโฟกัส $F = (h + c, k)$ $F' = (h - c, k)$	จุดโฟกัส $F = (h, k + c)$ $F' = (h, k - c)$
ความยาวแกนตามขวาง = $2a \rightarrow$ อยู่ในแกน X ความยาวแกนลึงยุค = $2b$	ความยาวแกนตามขวาง = $2a \rightarrow$ อยู่ในแกน Y ความยาวแกนลึงยุค = $2b$

$$\text{สูตร! } c^2 = a^2 + b^2$$

เมื่อ a คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลา จนถึง จุดยอด

b คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลา จนถึง จุดปลายแกนลึงยุค

c คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลา จนถึง จุดโฟกัส

Happy-Pb6.4 (PAT1'เม.ย.57) ให้ F เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา $4y = x^2 - 6x + 13$

ไฮเพอร์โบลามีสมบัติต่างๆ ดังนี้

(ก) แกนตามขวางขนานกับแกน Y

(ข) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด F

(ค) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(3, 2 + 2\sqrt{13})$

(ง) แกนสังยุคยาว 12 หน่วย

ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา

1. $4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y + 144 = 0$

2. $4x^2 - 9y^2 - 24x - 36y - 36 = 0$

3. $9y^2 - 4x^2 - 24x + 36y - 144 = 0$

4. $9y^2 - 4x^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

แนวคิด

ขั้นที่ 1 จัดรูปสมการพาราโบลา $4y = x^2 - 6x + 13 \rightarrow (x - 3)^2 = 4(y - 1)$

พาราโบลานี้จึงเป็นพาราโบลาหงาย ที่มีจุดยอด $(3, 1)$ และ $c = 1$

ทำให้จุดโฟกัสของพาราโบลา คือ จุด $F(3, 1 + 1) = F(3, 2)$

ขั้นที่ 2

ไฮเพอร์โบลา มีแกนตามขวางขนานกับแกน Y และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $F(3, 2)$

ทำให้สมการของไฮเพอร์โบลา ต้องอยู่ในรูป $\frac{(y - 2)^2}{a^2} - \frac{(x - 3)^2}{b^2} = 1$

จากที่จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลานี้อยู่ที่ $(3, 2 + 2\sqrt{13})$ ทำให้ได้ $c = (2 + 2\sqrt{13}) - 2 = 2\sqrt{13}$

และจากที่แกนสังยุคยาว 12 หน่วย จะได้ $b = \frac{12}{2} = 6$

เรารู้ว่า $a^2 + b^2 = c^2$ ฉะนั้น $a^2 + 6^2 = (2\sqrt{13})^2$ จะได้ $a^2 = 16$

ทำให้ได้สมการของไฮเพอร์โบลา $\frac{(y - 2)^2}{16} - \frac{(x - 3)^2}{36} = 1$

คูณด้วย -144 ; $-9(y^2 - 4y + 4) + 4(x^2 - 6x + 9) = -144$

$$\therefore 4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y + 144 = 0 \text{ ตอบ ข้อ 1.}$$

KMK-Pb1.10 (PAT1'ต.ค.52) ให้ E เป็นวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุดยอดของไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = 1$

ถ้า E ผ่านจุด $(0, 1)$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บน E

1) $\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2) $(1, \sqrt{2})$

3) $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

4) $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

FPAT-Pb62 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ F_1, F_2 เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $2(x-1)^2 - (y-2)^2 = 8$ โดยที่ F_2 อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 วงกลมที่มี F_2 เป็นจุดศูนย์กลางและผ่านจุด $(2\sqrt{3}, 3)$ คือวงกลมที่มีสมการดังข้อใด

- 1) $(x + (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 + 2$ 2) $(x - (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 + 2$
 3) $(x + (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 - 2$ 4) $(x - (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 - 2$

FPAT-Pb63 (PAT1'ก.ค.52) กำหนด $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 17\}$

$$P = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

$$Q = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 = 1\}$$

ถ้า $a \in S \cap P$ และ $b \in S \cap Q$ แล้วระยะทางที่น้อยที่สุดระหว่าง a และ b เท่ากับเท่าใด

- 1) $3\sqrt{2} - 4$ 2) $2\sqrt{3} - 2$ 3) $3\sqrt{2} - 2$ 4) $2\sqrt{3} - 4$

FPAT-Pb64 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ $A = \{a \mid \text{เส้นตรง } y = ax \text{ ไม่ตัดกราฟ } y^2 = 1 + x^2\}$

และ $B = \{b \mid \text{เส้นตรง } y = x + b \text{ ตัดกราฟ } y^2 = 1 - x^2 \text{ สองจุด}\}$

เซต $\{d \mid d = c^2, c \in B - A\}$ เท่ากับช่วงใดต่อไปนี้

- 1) $(0, 1)$ 2) $(0, 2)$ 3) $(1, 2)$ 4) $(0, 4)$

KAI0U-Pb1.8 (PAT1'มี.ค.53) กำหนดให้วงรี $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$ แล้วไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรีและผ่านจุด $(-3, 1 + \sqrt{8})$ มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $5y^2 - 4x^2 - 10\sqrt{8}y - 32x - 25 = 0$ 2) $3y^2 - 2x^2 - 6\sqrt{8}y - 8x + 15 = 0$
 3) $y^2 - 4x^2 - 2y - 16x - 19 = 0$ 4) $y^2 - 7x^2 - 2y - 28x - 28 = 0$

SheLL1.8 (PAT1'ก.ค.53) กำหนดวงกลมรูปหนึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนจุดศูนย์กลาง และจุดโฟกัสด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 90x + 64y + 17 = 0$ แล้ววงกลมดังกล่าวนี้มีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{25\pi}{4}$ ตารางหน่วย 2) $\frac{25\pi}{2}$ ตารางหน่วย 3) 4π ตารางหน่วย 4) 5π ตารางหน่วย

NaDate-Pb1.17 (PAT1'มี.ค.56) ให้ $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีแกนสมมาตรขนานแกน Y ตัดแกน X ที่จุด $(1, 0)$ และผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้ไม่อยู่บนพาราโบลา

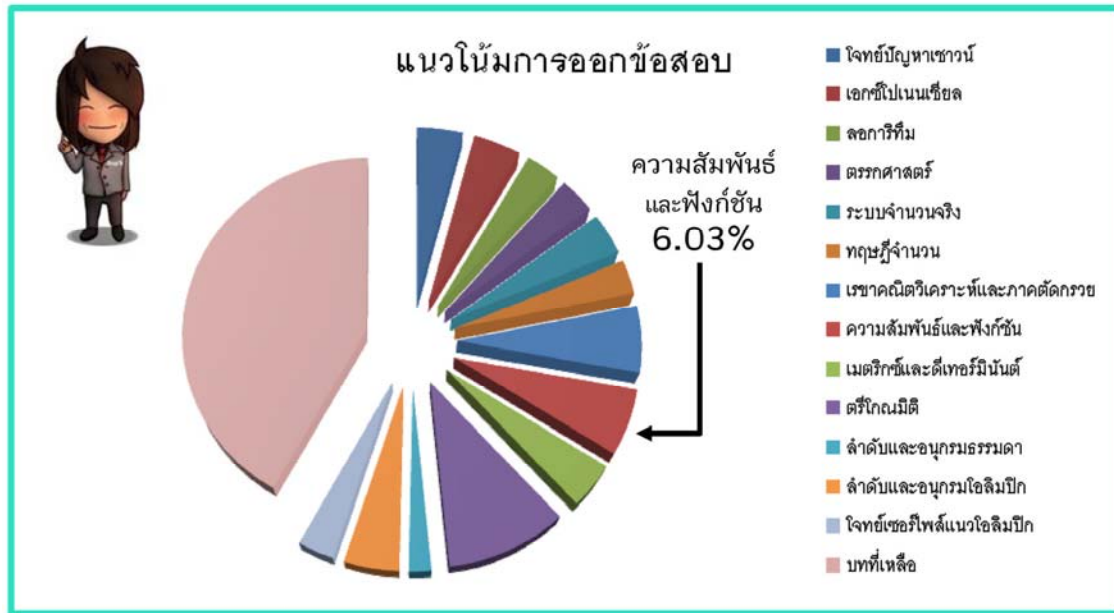
- 1) $(2, \frac{1}{8})$ 2) $(-1, \frac{1}{2})$ 3) $(3, \frac{1}{2})$ 4) $(4, \frac{1}{4})$

Happy-Pb 6.4.2 (สามัญ'57) ให้ F เป็นจุดโฟกัสที่อยู่จุดภาคที่ 1 ของ $\frac{x^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

แล้ววงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่จุด F และสัมผัสกับเส้นกำกับทั้งสองของไฮเพอร์โบลามีรัศมียาวกี่หน่วย

ตอบ

สรุปภาพรวม “ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ความสัมพันธ์ แนวอินเวอร์สของความสัมพันธ์
2. โจทย์ความสัมพันธ์ แนวโดเมนและเรนจ์
3. โจทย์ฟังก์ชัน แนวคำนวณฟังก์ชันธรรมดา VS อินเวอร์ส
4. โจทย์ฟังก์ชัน แนวคอมโพสิต
5. โจทย์ฟังก์ชัน แนวพีชคณิต
6. โจทย์ฟังก์ชัน แนวสมการเชิงฟังก์ชันโอลิมปิก

โจทย์ความสัมพันธ์ แนวอินเวอร์สของความสัมพันธ์

FPAT-Pb77 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ $r = \{(x, y) \mid 2y = 3x - 4\}$

ถ้า a, b เป็นค่าคงตัว และ $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$ แล้ว $3a - \frac{b}{4}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{5}{3}$

2) $\frac{3}{4}$

3) $\frac{4}{5}$

4) $\frac{4}{3}$

แนวคิด

ตอบ 1) $\frac{5}{3}$

แนวคิด

ขั้นที่ 1

จากโจทย์ $r = \{(x, y) \mid 2y = 3x - 4\}$

$\therefore r^{-1} = \{(x, y) \mid 2x = 3y - 4\}$

$\therefore r^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\}$

ขั้นที่ 2

จากขั้นเมื่อ $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\}$

จากที่โจทย์กำหนดให้ $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$

เทียบสัมประสิทธิ์ $\therefore a = \frac{2}{3}$ และ $b = \frac{4}{3}$

ขั้นที่ 3

$\therefore$ จะหา $3a - \frac{b}{4} = 3\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)$
 $= 2 - \frac{1}{3}$
 $= \frac{5}{3}$

หลักการ จากครู Sup'k

หลักการหา “อินเวอร์ส”

ให้เปลี่ยน $x \rightarrow$ ไปเป็น y

ให้เปลี่ยน $y \rightarrow$ ไปเป็น x

FPAT-Pb78 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \mid x \in [-1, 1] \text{ และ } y = x^2\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $r^{-1} = \{(x, y) \mid x \in [0, 1] \text{ และ } y = \pm\sqrt{|x|}\}$

ข. กราฟของ r ตัดกับกราฟของ r^{-1} เพียง 2 จุด เท่านั้น

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

โจทย์ความสัมพันธ์ แนวหาโดเมนและเรนจ์ โดยกราฟ

FPAT-Pb75 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ เมื่อ $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$

และ $g(x) = 2^x$ เมื่อ $x \in (-\infty, 0]$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $R_g \subset D_f$
- 2) $R_f \subset D_g$
- 3) f เป็นฟังก์ชัน 1-1
- 4) g ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

FPAT-Pb70 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y = -1\}$

ถ้า $a, b > 0$ และ $a \in D_r, b \in R_r$ แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 2.5
- 2) 3
- 3) 3.5
- 4) 4

โจทย์ความสัมพันธ์ แนวหาโดเมนและเรนจ์ โดยการจัดรูป หาเงื่อนไข

NaDate-Pb1.5 (PAT1'มี.ค.56) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid \sqrt{12 - |x|} + \sqrt{y + 1} = 3\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_r \cap R_r \subset (-1, 8)$

ข. $D_r - R_r = \{x \in R \mid 8 < x \leq 12\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

FPAT-Pb71 (สอบตรงวิศวะ) กำหนด r และ s เป็นความสัมพันธ์

$$r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + xy = -1\} \quad s = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{2}{1 - |3 - x|} \right\}$$

จงหาว่า $R_s - R_r$ เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

- 1) $(-4, -2)$
- 2) $(-1, 1)$
- 3) $(-2, 0)$
- 4) $(-1, 4)$

FPAT-Pb72 (สอบตรงวิศวะ) กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{5 - \sqrt{9 - x^2}} \right\}$

$$s = \{(x, y) \in R \times R \mid 2xy^2 - 3xy = 4x + 1\}$$

มีจำนวนเต็มกี่จำนวนที่อยู่ในเซต $R_r - D_s$

- 1) 0
- 2) 1
- 3) 2
- 4) 7

KAIU-Pb1.6 (PAT1'มี.ค.53) ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง

โดยที่ $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ และ $g(x) = \sqrt{f(x)} - \sqrt{x-1}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_g = (2, \infty)$

ข. ค่าของ $x > 0$ ที่ทำให้ $g(x) = 0$ มีเพียง 1 ค่าเท่านั้น

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

Happy-Pb7.1 (PAT1'มี.ค.57) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซต

ของเซตจำนวนจริง โดยที่ $f(x) = \frac{2x^2+4x+4}{x+1}$ เมื่อ $x \neq -1$ แล้วเรนจ์ของฟังก์ชัน f เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

1) $\{x \in R \mid x^2 + 6x - 7 \geq 0\}$

2) $\{x \in R \mid x^2 + 3x - 10 \geq 0\}$

3) $\{x \in R \mid x^2 + x - 12 \geq 0\}$

4) $\{x \in R \mid x^2 - 6x - 16 \geq 0\}$

โจทย์ฟังก์ชัน แนวคำนวณฟังก์ชันธรรมดา

FPAT-Pb65 (PAT1'ก.ค.52) ให้ $g(x) = x^2 + x + 1$ และ r, s เป็นค่าคงตัว ซึ่ง $s \neq 0$

ถ้า $g(r+s) = g(r-s)$ แล้ว r^2 เป็นสมาชิกของช่วงใดต่อไปนี้

1) $(0, 0.5)$

2) $(0.5, 1)$

3) $(1, 1.5)$

4) $(1.5, 2)$

โจทย์ฟังก์ชัน แนวจัดรูปฟังก์ชันธรรมดา

KAIU-Pb1.13 (PAT1'มี.ค.53) กำหนดให้ $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $x \neq 1$ ถ้า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $f(\sec^2 \theta)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\sin^2 \theta$

2) $\cos^2 \theta$

3) $\tan^2 \theta$

4) $\cot^2 \theta$

โจทย์ฟังก์ชัน แนวจัดรูปฟังก์ชันอินเวอร์สธรรมดา

AVATAR-Pb6.1 (แนวสอบตรงแพทย์ กสพท) จงหา $f^{-1}(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$

ตอบ.....

โจทย์ฟังก์ชัน แนวคำนวณฟังก์ชันคอมโพสิต VS อินเวอร์ส

Happy-Pb7.3 (PAT1'เม.ย.57) ให้ $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$

สูตร

โดยที่ $f(x) = ax + 2$ และ $g(x) = x^3 - 3x(x - 1)$

ถ้า $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 1$ แล้ว $(g \circ f)(a)$ มีค่าเท่าใด

ตอบ

วิธีลัด

วิธีจริง

$f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ โดยที่ $f(x) = ax + 2$ และ $g(x) = x^3 - 3x(x - 1)$

ให้ $g^{-1}(1) = k$ จะได้ $g(k) = 1$

ฉะนั้น $k^3 - 3k(k - 1) = 1$

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$$

$$(k - 1)^3 = 0$$

$$k = 1$$

ดังนั้น $g^{-1}(1) = 1$

จาก $f(x) = ax + 2$ จะได้ $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{a}$

เพราะว่า $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 1$ และ $g^{-1}(1) = 1$

ฉะนั้น $f^{-1}(1) = 1$

$$\frac{1-2}{a} = 1$$

$$a = -1$$

จะได้ $f(x) = -x + 2$ ทำให้ $f(a) = f(-1) = -(-1) + 2 = 3$

ดังนั้น $(g \circ f)(a) = g(f(-1)) = g(3) = 3^3 - 3(3)(3 - 1) = 9$

Peach-Pb2.32 (แนว PAT1'ต.ค.55)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x+5) = x^3 - x^2 + 2x$ และ $g^{-1}(2x-1) = x+4$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อ I แทน เซตของจำนวนเต็ม

ก. $(f-g)(0) < -169$

ข. $\{x \in I \mid (g \circ f)(x) + 5 = 0\}$ เป็นเซตว่าง

ข้อใดต่อไปนี้สรุปถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

KMK-Pb2.3 (PAT1'ต.ค.52) ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = 2f(x)$ แล้ว จงหา $g \circ f(3) + f \circ g^{-1}(3)$

ตอบ.....

FPAT-Pb66 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ และ $g(x) = x^3$, $(f^{-1} \circ g)(3)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1) 16

2) 20

3) 50

4) 52

FPAT-Pb66.1 ให้ $f(x) = \frac{x+3}{x+6}$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{-6x}{x-1}$ ถ้า $g(a) = 2$ แล้ว a อยู่ในช่วงใด

1) $[-1, 1)$

2) $[1, 3)$

3) $[3, 5)$

4) $[5, 7)$

FPAT-Pb67 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x-5$ และ $g(x) = x^2$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $f \circ g(a) = g \circ f(a)$ แล้ว $(f \cdot g)(a)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 18

2) -18

3) 25

4) -25

Happy-Pb7.2 (PAT1'เม.ย.57) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $f: R \rightarrow R$ และ $g: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

โดยที่ $(f \circ g)(x) = 4x - 5$ และ $g^{-1}(x) = 2x + 1$ ทุกจำนวนจริง x

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $4(f^{-1} \circ g)(2x+1) = g(x) + 1$ ทุกจำนวนจริง x

ข. $(g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g))(x) = f^{-1}(x) + 1$ ทุกจำนวนจริง x

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

โจทย์ฟังก์ชัน แนวคำนวณฟังก์ชันคอมโพสิทียากขึ้นมาหน่อย

KAI0U-Pb2.22 (PAT1'มี.ค.53)

นิยาม $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ
 $(f \otimes g)(x) = f(g(x)) - g(f(x))$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = 2x + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว $(f \otimes g)(1)$ เท่ากับเท่าใด
ตอบ.....

KAI0U-Pb1.5 (PAT1'มี.ค.53) กำหนดให้ $y_1 = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 1

$$y_2 = f(y_1), \quad y_3 = f(y_2), \quad \dots$$

$$y_n = f(y_{n-1}) \quad \text{สำหรับ } n = 2, 3, 4, \dots$$

ค่าของ $y_{2553} + y_{2010}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{x-1}{x+1}$

2) $\frac{x^2+1}{x-1}$

3) $\frac{x^2+1}{2x}$

4) $\frac{1+2x-x^2}{x-1}$

SheLL2.28 (PAT1'ก.ค.53) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า f_1, f_2, f_3, f_4, g และ h เป็นฟังก์ชันจาก R ไป R โดยที่ $f_1(x) = x + 1, f_2(x) = x - 1, f_3(x) = x^2 + 4, f_4(x) = x^2 - 4$

$(f_1 \circ g)(x) + (f_2 \circ h)(x) = 2$ และ $(f_3 \circ g)(x) - (f_4 \circ h)(x) = 4x$ ค่าของ $(g \circ h)(1)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

SheLL1.18 (PAT1'ก.ค.53) กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันลด และ $f(f(f(x))) = 16x + 45$ แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -11

2) -5

3) 11

4) 5

โจทย์ฟังก์ชัน แนวสมการเชิงฟังก์ชันโอลิมปิก

*NaDate-Pb2.50 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสอดคล้องกับ $(f \circ f)(x) = 4 + x(4 - f(x))$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้วค่าของ $f(4)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ

แนวคิด

ขั้นที่ 1 จากโจทย์ $f(f(x)) = 4 + x(4 - f(x)) \quad \dots (*)$

ขั้นที่ 2 แทน $x = 0$ ลงใน $(*)$

จะได้
$$\begin{aligned} f(f(0)) &= 4 + 0(4 - f(0)) \\ f(f(0)) &= 4 \quad \dots (#) \end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 แทน $x = f(0)$ ลงใน $(*)$

จะได้
$$\begin{aligned} f(f(f(0))) &= 4 + f(0)(4 - f(f(0))) \\ \text{จาก } (#); \quad f(4) &= 4 + f(0)(4 - 4) \\ f(4) &= 4 + f(0)(0) \\ \therefore f(4) &= 4 \text{ ตอบ} \end{aligned}$$

*Happy-Pb7.4 (PAT'เม.ย.57) กำหนดให้ $f: R \rightarrow R$ และ $g: R \rightarrow R$

และ $f(x + g(y)) = 2x + y + 15$ ทุกจำนวนจริง x และ y

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(g \circ f)(x) = 2x + 15$ ทุกจำนวนจริง x

ข. $g(25 + f(57)) = 75$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) ก. ถูก และ ข. ถูก | 2) ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3) ก. ผิด และ ข. ถูก | 4) ก. ผิด และ ข. ผิด |

โจทย์ฟังก์ชัน แนวนิยามตรวจสอบความเป็นฟังก์ชัน

BRAN-Pb1.4 (PAT1'ต.ค.53) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง, ความสัมพันธ์ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

- 1) ความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x = \sqrt{4 - y^2} \text{ และ } xy \geq 0\}$
- 2) ความสัมพันธ์ $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } xy > 0\}$
- 3) ความสัมพันธ์ $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid ||x| - |y|| = 1\}$
- 4) ความสัมพันธ์ $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid |x - y| = 1\}$

โจทย์ฟังก์ชัน แนวฟังก์ชันแยกช่วง

FPAT-Pb76 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ $f(x) = x^2 + 2$ เมื่อ $x \in [-1, 0] \cup (1, 2)$

และ $g(x) = \begin{cases} -x & , x \in [-1, 0] \\ 4x - 2 & , x \in [\frac{1}{2}, 2] \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

- 1) $D_f \subseteq D_g$
- 2) $R_f \subseteq R_g$
- 3) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
- 4) g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

NaDate-Pb1.11 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{x} & , |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

ค่าของ $f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -6
- 2) 6
- 3) -3
- 4) 3

โจทย์ฟังก์ชัน แนวฟังก์ชันแยกช่วง VS อินเวอร์ส

FPAT-Pb79 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ $f(x) = 3x - 1$ และ $g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$

ค่าของ $f^{-1}(g(2) + g(-8))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{1 - \sqrt{2}}{3}$
- 2) $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$
- 3) $\frac{1 - \sqrt{2}}{-3}$
- 4) $\frac{1 + \sqrt{2}}{-3}$

NaDate-Pb1.7 (PAT1'มี.ค.56) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4, xy > 0\}$ เป็นฟังก์ชัน

ข. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$ และ $g(3x-1) = 2x^2 + 3x$ สำหรับ $x \in R$

แล้วค่าของ $(g \circ f^{-1})(25) = 14$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

โจทย์ฟังก์ชัน แนวฟังก์ชันพีชคณิตฟังก์ชัน VS อินเวอร์ส

KMK-Pb2.4 (PAT1'ต.ค.52) ถ้า $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = \frac{x}{1+x}$ แล้ว $(f^{-1} + g^{-1})(2)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์ฟังก์ชัน แนวคอมโพสิต VS อินเวอร์ส VS นิยามฟังก์ชันแบบเซต

BRAN-Pb2.42 (PAT1'ต.ค.53) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

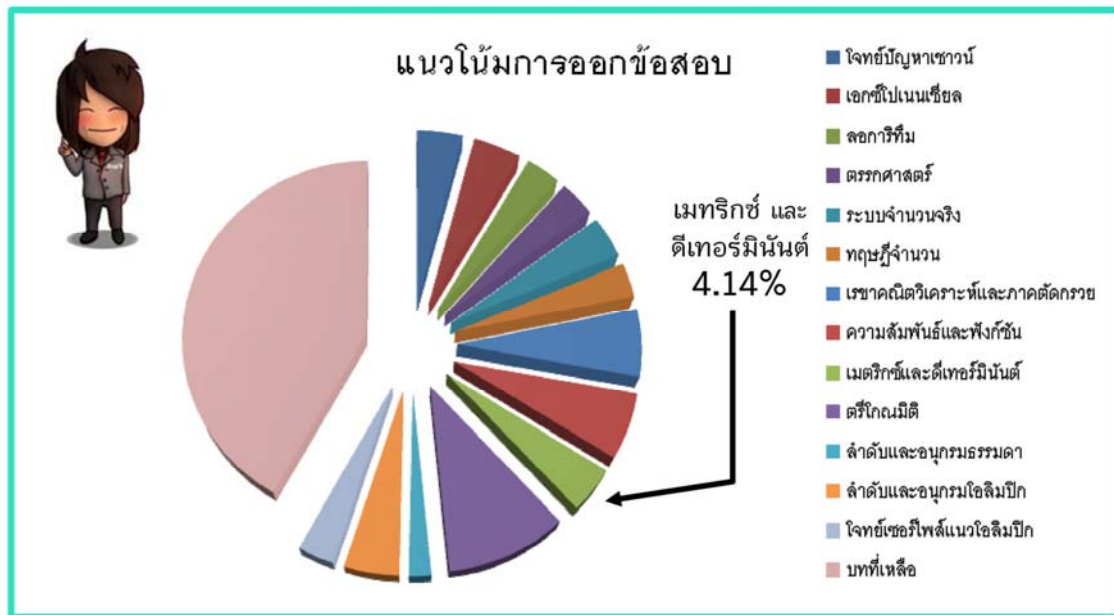
ให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x - 5\}$

$g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$

ถ้า $a \in R$ และ $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 4$ แล้ว $(f \circ g)(2a)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

สรุปภาพรวม “เมทริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์เมทริกซ์ แนวพื้นฐานและการหาอินเวอร์ส และสมการเมทริกซ์
2. โจทย์ *det* ดีเทอร์มิแนนต์ แนวทฤษฎีของ *det* ดีเทอร์มิแนนต์, ไมเนอร์, โคแฟกเตอร์
3. โจทย์ *det* ดีเทอร์มิแนนต์ แนวสูตรของ *det* ดีเทอร์มิแนนต์
4. โจทย์ *det* ดีเทอร์มิแนนต์ แนวสูตรของ *det* (*adj A*)
5. โจทย์ *det* ดีเทอร์มิแนนต์ แนว *det* ของเมทริกซ์บวกกัน
6. โจทย์เมทริกซ์ แนวแก้สมการหลายตัวแปร

เมทริกซ์ : อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ (ตัวผกผันของเมทริกซ์)

$$\text{นิยาม 1.1!!} \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

เมทริกซ์ $B_{n \times n}$ เป็นอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ $A_{n \times n}$

ก็ต่อเมื่อ $AB = I = BA$ เขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

สูตร 1.2!! ตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ A , อินเวอร์สของเมทริกซ์ A , A^{-1} สำหรับมิติ $n \times n$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

สูตร 1.3!! ถ้า $A = [a] \rightarrow \therefore A^{-1} = \left[\frac{1}{a} \right]$ เมื่อ $a \neq 0$

สูตร 1.4!! ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \therefore A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

นิยาม 1.6!! สำหรับเมทริกซ์ $A_{n \times n}$ ขนาดมิติใดๆ

ถ้า $\det A = 0$ แล้ว จะเรียก เมทริกซ์ A ว่า “เมทริกซ์เอกฐาน”, “Singular Matrix”, “ซิงกูลาร์เมทริกซ์”

จะหา A^{-1} ไม่ได้

นิยาม 1.7!! สำหรับเมทริกซ์ $A_{n \times n}$ ขนาดมิติใดๆ

ถ้า $\det A \neq 0$ แล้ว จะเรียก เมทริกซ์ A ว่า “ไม่ใช่เมทริกซ์เอกฐาน”, “Non-singular Matrix”, “นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์”

จะหา A^{-1} ได้

Prob ให้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $(A - 2B)^{-1}$

ตอบ

แนวคิด

ขั้นที่ 1 จาก $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow A = \frac{1}{(-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 จาก $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow B = \frac{1}{2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore B = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ขั้นที่ 3 จงหา } (A - 2B)^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{11}{3}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{9}{57} \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sup'k ระวัง!!

$$(A - 2B)^{-1} = A^{-1} - 2 \cdot B^{-1}$$

โจทย์เมทริกซ์ แนวหาอินเวอร์สของ 2×2

TF-PAT4 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับ $2A - B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

และ $A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ จงหาว่า $(AB)^{-1}$ คือ เมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

โจทย์เมทริกซ์ แนวแก้สมการเมทริกซ์

SheLL2.30 (PAT1'ก.ค.53) ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

ถ้า $3 \begin{bmatrix} 5^a & b \\ 2^c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^a & 6 \\ d-1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5^a+b \\ 2^c & 2d \end{bmatrix}$ แล้วค่าของ $b + c$ เท่ากับเท่าใด ตอบ.....

KAI0U-Pb2.7 (PAT1'มี.ค.53) ให้ x, y, z และ w สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -1 \\ z & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix}$$

ค่าของ $4w - 3z + 2y - x$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

BRAN-Pb1.12 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$

ถ้า $A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ แล้วค่าของ xyz เท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

1) -3

2) -1

3) 0

4) 1

KMK-Pb1.11 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ สอดคล้องกับสมการ $AX = C$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ถ้า $(2A + B)X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่าใดต่อไปนี้

1) 3

2) 6

3) 9

4) 12

โจทย์ $\det$ ดีเทอร์มิแนนต์ : ทฤษฎีของ $\det$ ดีเทอร์มิแนนต์

สูตร 3.1!! ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$A = [5] \rightarrow \therefore \det A = |[5]| = 5$$

$$B = [-7] \rightarrow \therefore \det B = |[-7]| = -7$$

Sup'k ระวัง!!

สูตร 3.2!! ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \det C = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 9 \times 2 - 4 \times 5 = 18 - 20 = -2$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \det D = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (-2) \times 7 - (-4) \times 5 = -14 + 20 = 6$$

สูตร 3.3!! กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$$\therefore \det A = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

ระวัง! สูตรคุณลงตอบเลย คุณขึ้นใส่ลบซ้อน ใช้ได้เฉพาะ 2×2 , 3×3

TF-PAT1 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & b & 2 \end{bmatrix} \text{ และ } Y = \begin{bmatrix} 2 & a & 3 \\ 2 & b & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

โดยที่ X และ Y ไม่มีตัวผกผัน แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -1

2) -2

3) -3

4) -4

โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ : สูตรของไมเนอร์, โคแฟกเตอร์

นิยาม 4.1 กำหนดให้เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 2
ไมเนอร์ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ออกไป
เขียนแทน ไมเนอร์ของ a_{ij} ด้วย $M(a_{ij}), M_{ij}(A)$

นิยาม 4.2 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 2
โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} คือ $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}(A)$
เขียนแทน โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} ด้วย $C(a_{ij}), C_{ij}(A)$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore M_{13}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$\rightarrow \therefore C_{13}(A) = (-1)^{1+3} M_{13}(A) = (-1)^4 M_{13}(A) = (-1)^4 (-5) = -5$$

TF-PAT2 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 1 & y \end{bmatrix}$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง

ถ้า $C_{11}(A) = 13$ และ $C_{21}(A) = 9$ แล้ว $\det(A)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -33
- 2) -30
- 3) 30
- 4) 33

โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ : สูตรของ det ดีเทอร์มิแนนต์

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ และ k เป็นค่าคงที่ใดๆ

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det(cA) = c^n \cdot (\det A)$
- $\det I = 1, \det 0 = 0$

- $\det(A^t) = \det A$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- $\det(A^n) = (\det A)^n$

- $\det(-A) = \det A, n = \text{คู่}$
- $\det(-A) = -\det A, n = \text{คี่}$
- $\det(A \pm B) \neq \det A \pm \det B$

Happy-Pb8.1 (PAT1'เม.ย.57) กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $ab \neq 0$

ถ้า $2(A - I)^{-1} = 4I - A$ แล้วพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $ab = 2$

ข. $\det(3A^2A^tA^{-1}) = 324$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

แนวคิด

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ โดยที่ $ab \neq 0$

จะได้ $A - I = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 3 \end{bmatrix}$ ทำให้ $(A - I)^{-1} = \frac{1}{0(3) - ab} \begin{bmatrix} 3 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{ab} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$

ก. ผิด : เพราะว่า $2(A - I)^{-1} = 4I - A$ ฉะนั้น $\begin{bmatrix} -\frac{6}{ab} & \frac{2}{b} \\ \frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $-\frac{6}{ab} = 3$ และ $\frac{2}{b} = -a$ และ $\frac{2}{b} = -b$

ดังนั้น $a = -2$

ข. ถูก : เมื่อ $ab = -2$ จะได้

NaDate-Pb2.33 (PAT1'มี.ค.56) ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ x & -1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน}$$

และให้ y เท่ากับผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S

ถ้า $A = \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ แล้วค่าของ $\det \left(\left((A^t)^{-1} \right)^t \right)^{-1}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ

DJton-Pb15.1 (แนว PAT1'ต.ค.55) ให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์ ซึ่ง $\det B \neq 0$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ และ $\det (B^{-1}CB^t) = -4$ จงหาค่าของ $\det (C^tAC)$ ตอบ

KAIou-Pb2.6 (PAT1'มี.ค.53) ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2

โดยที่ $2A - B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ และ $A - 2B = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det (A^4B^{-1})$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

KMK-Pb 1.12 (PAT1'ต.ค.52) ถ้า $\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{x-1}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

โจทย์ *det* ดีเทอร์มิแนนต์ แนว *det (adj A)*

AVATAR-Pb14.1 (แนวข้อสอบตรงเข้าแพทย์ กสพท) กำหนด A เป็นเมทริกซ์ 3×3

ที่มี $\det(A) = 2$

จงหา $\det(\text{adj}(\text{adj}(A)))$

ตอบ.....

แนวคิด & เทคนิค

Tips จากครู Sup'k

Peach-Pb2.34 (แนว PAT1'ต.ค.55) กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) \neq 0$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่า ถูก หรือผิด

ก. $\det(A^3) = \det(\text{adj } A)$

ข. ถ้า $A^2 = 2A$ แล้ว $\det A = 2$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อสรุปถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

MARARine-Pb46.34.1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(\text{adj}(\text{adj } A))$ ตอบ

Pb34.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $\det(\text{adj}(\text{adj}(-5A^{-1}B \text{ adj}(B^2))))$

ตอบ

* RaChiNee-Pb11.7 (สามัญ'57) ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 และ $\det(A) > 0$

ถ้า $[M_{ij}(A)] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $A^{-1} = [b_{ij}]$ แล้ว $b_{11} + b_{12} + b_{13}$ มีค่าเท่าใด

ตอบ

โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ : แนวข้อสอบของเมทริกซ์บวกกัน

Happy-Pb8.2 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ใดๆ มิติ 2×2

ให้ x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $\det(A^2 + xI) = 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\det(A + xI) = 0$

ข. $\det(A^2 + xI - B) = \det(B^t)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

MARARine-Pb27.2 (PAT1'มี.ค.54) กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม

และ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ ที่มี $\det(A) = 3$

ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 โดยที่ $BA + BA^{-1} = 2I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์

เอกลักษณ์การคูณมิติ 2×2 แล้วค่าของ $\det(B)$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

- 1) $[1, 2]$ 2) $[-1, 0]$ 3) $[0, 1]$ 4) $[-2, -3]$

TF-PAT3 (PAT1'ก.ค.52) ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 โดยที่ $\det(A) = 4$ และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

ถ้า $A - 3I$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แล้ว $\det(A + 3I)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) 12 2) 16 3) 20 4) 26

BRAN-Pb2.36 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดให้ X เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

แล้วค่าของ $\det(2X^t \cdot (X + X^t))$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

SheLL1.12 (PAT1'ก.ค.53) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ค่าของ $\det(2A^t + BC^2 + B^tC)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -1 2) 0 3) 2 4) 6

SheLL2.31 (PAT1'ก.ค.53) ให้ a, b, c, d, t เป็นจำนวนจริง ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $\det(A) = t \neq 0$

และ $\det(A + t^2A^{-1}) = 0$ แล้วค่าของ $\det(A - t^2A^{-1})$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

NaDate-Pb 1.13 (PAT1'ม.ค.56) กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ มีมิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) = 2$

และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & -2 & y \end{bmatrix}$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

ถ้า $AB + 3A = 2I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ที่มีมิติ 3×3 แล้ว $x + y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 0

2) -1

3) -2

4) -2.5

เมทริกซ์ผกผันของ A, $\text{adj}(A)$

นิยาม 2.1 เมทริกซ์ผกผันของ A คือ $\text{adj } A$
กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ จะได้ $\text{adj } A = [C_{ij}]^t$

นิยาม 2.2 $\text{adj } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t$

สูตร 2.3 $A \cdot \text{adj } A = \text{adj } A \cdot A = (\det A)I$

โจทย์เมทริกซ์ แนวนหาอินเวอร์สของ 3×3

KMK-Pb2.11 (PAT1'ต.ค.52) ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

สมาชิกแถวที่ 3 หลักที่ 1 ของ A^{-1} เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

แนวคิด ขั้นที่ 1 หา $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -70 \neq 0$ ซึ่งสามารถหาอินเวอร์สได้

ขั้นที่ 2 ใช้สูตร $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)$
 $A^{-1} = \frac{1}{-70} \cdot (\text{adj } A)$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-70} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-70} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{11}}{-70} & \frac{C_{21}}{-70} & \frac{C_{31}}{-70} \\ \frac{C_{12}}{-70} & \frac{C_{22}}{-70} & \frac{C_{32}}{-70} \\ \frac{C_{13}}{-70} & \frac{C_{23}}{-70} & \frac{C_{33}}{-70} \end{bmatrix}$

$\therefore$ สมาชิกแถวที่ 3 หลักที่ 1 ของ $A^{-1} = \frac{C_{13}}{-70} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot M_{13}}{-70} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-70}$
 $= \frac{(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-70} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot ((-3) \cdot 2 - 1 \cdot 8)}{-70} = 0.2$

TF-PAT6 (B-PAT1'ต.ค.51) กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$

เป็นเมทริกซ์ ที่มี $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว จงหาค่าของ a_{23}

- 1) 0 2) $\frac{16}{70}$ 3) $\frac{32}{70}$ 4) $\frac{12}{70}$

TF-PAT7 (PAT1'มี.ค.52) ให้ $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาสมาชิกในแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ A^{-1}

- 1) $-\frac{2}{3}$ 2) -2 3) $\frac{2}{3}$ 4) 2

Happy-Pb8.3 (สามัญ'57) ให้ $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ และ $\det(A) > 0$

ถ้า $[M_{ij}(A)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $A^{-1} = [b_{ij}]$ แล้ว $b_{11} + b_{12} + b_{13}$ มีค่าเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์เมทริกซ์ แนวแก้สมการหลายตัวแปร

TF-PAT8 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$$a - b + 2c = 9, \quad 2a + b - c = 0, \quad 3a - 2b + c = 11$$

แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) -4 2) -2 3) 2 4) 4

TF-PAT9 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ x, y, z สอดคล้องกับระบบสมการ

$$2x - 2y - z = -5, \quad x - 3y + z = -6, \quad -x + y - z = 4$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 2) $x + y + z = 2$
3) $xyz = 6$ 4) $\frac{xy}{z} = -2$

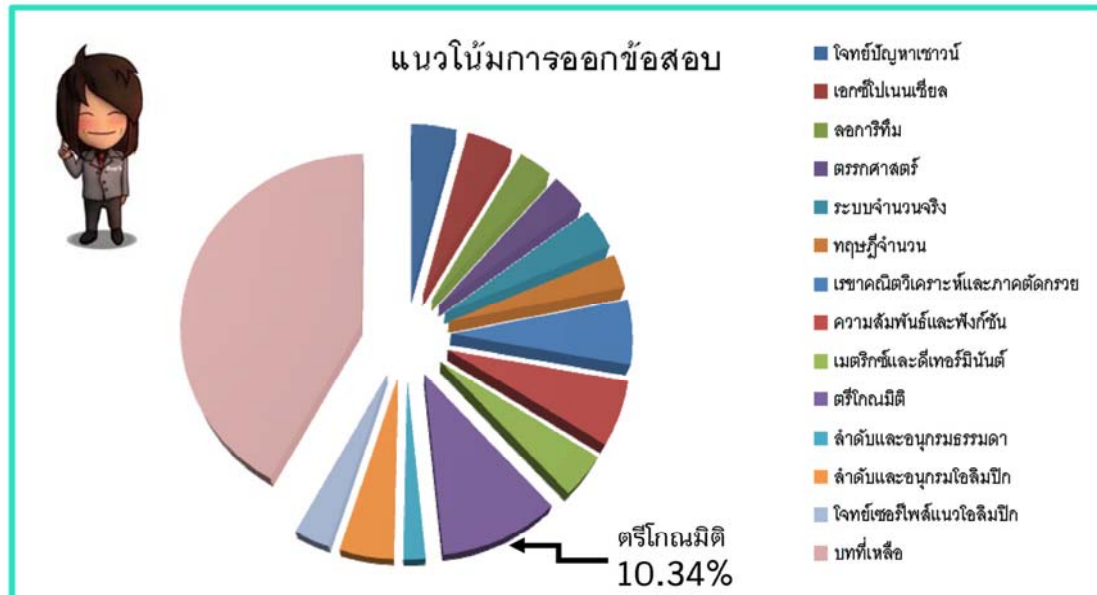
TF-PAT10 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับระบบสมการ

$$2a - 2b - c = 1, \quad a - 3b + c = 7, \quad -a + b - c = -5$$

แล้วค่าของ $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 0 2) 3 3) 6 4) 9

สรุปภาพรวม “โจทย์ตรีโกณมิติ” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ตรีโกณมิติ แนวสูตรตรีโกณประยุกต์
2. โจทย์ตรีโกณมิติ แนว $(\sin \theta + \cos \theta)$ VS $(\sin \theta \cdot \cos \theta)$
3. โจทย์ตรีโกณมิติ แนวอินเวอร์สตรีโกณ
4. โจทย์ตรีโกณมิติ แนวกฎของ $\sin$ VS กฎของ $\cos$

โจทย์ตรีโกณมิติ แนวสูตรตรีโกณประยุกต์

✚ สูตร 8.1! สูตรผลบวกหรือผลต่างของมุม

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A + B) &= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \\ \sin(A - B) &= \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B\end{aligned}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}, \quad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

พิสูจน์ $\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} = \frac{\frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$

$$= \frac{\frac{\sin A \cancel{\cos B} + \cos A \sin B}{\cancel{\cos A} \cos B}}{\frac{\cancel{\cos A} \cos B - \sin A \sin B}{\cancel{\cos A} \cos B}} = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\cos B}{\cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\cot(A + B) = \frac{\cot A \cdot \cot B - 1}{\cot B + \cot A}, \quad \cot(A - B) = \frac{\cot A \cdot \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

Hormone Pb1.1 (PAT1'มี.ค.57) ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$3 \sin(x - y) = 2 \sin(x + y)$ แล้ว $(\tan^3 x)(\cot^3 y)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 8
- 2) 27
- 3) 64
- 4) 125

FPAT-Pb81 (PAT1'ก.ค.52) จงหาว่า $\frac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ} - \frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}$ มีค่าเท่าใด

- 1) -4
- 2) -2
- 3) 2
- 4) 4

แนวคิด

SheLL1.13 (PAT1'ต.ค.53) ถ้า $\sin 15^\circ$ และ $\cos 15^\circ$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + ax + b = 0$ แล้วค่าของ $a^4 - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) -1
- 2) 1
- 3) 2
- 4) $1 + 3\sqrt{2}$

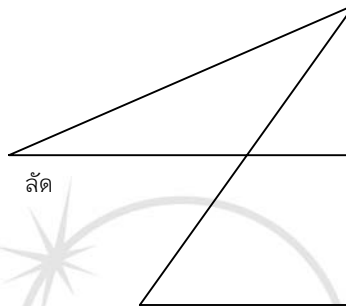
KMK-Pb2.5 (PAT1'ต.ค.52) ถ้า $1 - \cot 20^\circ = \frac{x}{1 - \cot 25^\circ}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

ตอบ.....

* *KAiOU-Pb2.5 (PAT1'มี.ค.53)* ค่าของ $\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

วิธีเร็วกว่า



วิธีจริง $\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ} = \frac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ}{\sin 36^\circ \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} - \cos 36^\circ}$

$$= \frac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\sin 36^\circ \sin 18^\circ + \cos 36^\circ \cos 18^\circ} = \frac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos (36^\circ - 18^\circ)}$$

$$= \frac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ = 2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ$$

$$= \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ}$$

$$= \frac{\sin 144^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{1}{2} = 0.5$$

สูตรมุม 2A

$$\begin{aligned}\sin 2A &= 2 \sin A \cdot \cos A \\ &= \frac{2 \cdot \tan A}{1 + \tan^2 A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2 \cdot \cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2 \cdot \sin^2 A \\ &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}\end{aligned}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \cdot \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cdot \cot A}$$

พิสูจน์

จาก สูตร $\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$
 แทนค่า มุม B = มุม A
 จะได้เป็น $\sin(A + A) = \sin A \cdot \cos A + \cos A \cdot \sin A$
 $\therefore \sin(2A) = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A$ จบ

แนวบทกลับของมุม 2A

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

พิสูจน์

จาก $\cos 2A = 1 - 2 \cdot \sin^2 A$
 $\therefore 2 \cdot \sin^2 A = 1 - \cos 2A$
 $\therefore \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

พิสูจน์

จาก $\cos 2A = 2 \cdot \cos^2 A - 1$
 $\therefore \cos 2A + 1 = 2 \cdot \cos^2 A$
 $\frac{1 + \cos 2A}{2} = \cos^2 A$

$$\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

พิสูจน์

$\tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$
 $\tan^2 A = \frac{\frac{1 - \cos 2A}{2}}{\frac{1 + \cos 2A}{2}}$
 $\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวสูตรมุมสองเท่า

NaDate-Pb1.9 (PAT1'มี.ค.56) พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ$

ข. $\sqrt{3} \cot 20^\circ = 1 + 4 \cos 20^\circ$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

***BRAN-Pb2.32 (PAT1'ต.ค.53)

ให้ $(\sin 1^\circ)(\sin 3^\circ)(\sin 5^\circ) \cdot \dots \cdot (\sin 89^\circ) = \frac{1}{2^n}$

ค่าของ $4n$ เท่ากับเท่าใด ตอบ.....

FPAT-Pb83 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้า $\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{1 + A \cos \theta \sin \theta}{\cos 2\theta}$ แล้ว A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 4
- 4) 6

***SheLL2.29 (PAT1'ก.ค.53) ค่าของ $\frac{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ} - \frac{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}$ เท่ากับเท่าใด ตอบ.....



สูตรมุม 3A และ บทกลับ

$$\begin{aligned}\sin 3A &= 3 \cdot \sin A - 4 \cdot \sin^3 A \\ \cos 3A &= 4 \cdot \cos^3 A - 3 \cdot \cos A \\ \tan 3B &= \frac{3 \cdot \tan B - \tan^3 B}{1 - 3 \cdot \tan^2 B} \\ \cot 3A &= \frac{\cot^3 A - 3 \cdot \cot A}{3 \cdot \cot^2 A - 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3 A &= \frac{3 \sin A - \sin 3A}{4} \\ \cos^3 A &= \frac{3 \cos A + \cos 3A}{4}\end{aligned}$$

เทคนิค เพลงสูตรคณิต จากครู Sup'k

- ค่า $\cos 3B$ ก็คือ $4 \cdot \cos^3 B$ ลบด้วย three แล้ว ก็คูณ $\cos$ มุม B
 แต่บอกตอนนี้ ไม่รู้ จะเร็วไปหรือไม่ ก็ยังไม่รู้ว่ เธอคิดเช่นไร
- ค่า $\cos 4D$ ต้องมีตัวเลข
 ถ้าบอกคำนั้น แล้วเธอตอบมาว่า ไม่ใช่ ถ้าเป็นแบบนี้ ก็คงจะเดินหนีไป
- $\cos$ มุม 5B
 มองกันให้ดี เธอก็คงรู้ ในความห่วยๆ ฉันมีอะไรซ่อนอยู่ ที่ยังไม่รู้ คือ เธอ นั้นคิดอย่างไร

Hormone Pb1.2 (PAT1'เม.ย.57) ถ้า $\cos 5\theta = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cdot \cos \theta$

เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ

แล้ว $a^2 + b^2 + c^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ

วิธีลัด

มีวิธีจริง อยู่หน้าถัดไป

วิธีจริงที่ 1

วิธีจริงที่ 2

ให้ $z = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } (\cos \theta + i \sin \theta)^5 &= \left\{ \begin{aligned} &\cos^5 \theta + \binom{5}{1} (\cos \theta)^4 (i \sin \theta) \\ &+ \binom{5}{2} (\cos \theta)^3 (i \sin \theta)^2 \\ &+ \binom{5}{3} (\cos \theta)^2 (i \sin \theta)^3 + \binom{5}{4} (\cos \theta) (i \sin \theta)^4 + (i \sin \theta)^5 \end{aligned} \right. \\ \cos 5\theta + i \sin 5\theta &= \left\{ \begin{aligned} &\cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta - 10i \cos^2 \theta \sin^3 \theta \\ &+ 5 \cos \theta \sin^4 \theta + i \sin^5 \theta \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\cos 5\theta + i \sin 5\theta = \left\{ \begin{aligned} &\cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ &+ i(5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta) \end{aligned} \right.$$

เทียบส่วนจริง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 10 \cos^5 \theta + 5 \cos \theta (1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) \\ &= 11 \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta - 10 \cos^3 \theta + 11 \cos^5 \theta \\ &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{เทียบกับรูปแบบ } \cos 5\theta = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cos \theta$$

จะได้ $a = 16, b = -20, c = 5$

$$\text{ดังนั้น } a^2 + b^2 + c^2 = 256 + 400 + 25 = 681 \text{ ตอบ}$$

Tips จากครู sup'k

ใช้เทคนิค จำนวนเชิงซ้อน
และทวินามช่วยจัดรูปสูตร

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนว $(\sin \theta + \cos \theta)$ VS $(\sin \theta \cdot \cos \theta)$

NaDate-Pb2.28 (PAT1'ม.ค.56) กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$

ถ้า $(1 + \tan^2 x) \cot x = \frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ

แนวคิด & เทคนิค

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad \sin x + \cos x &= \frac{4}{3} \\ (\sin x + \cos x)^2 &= \frac{16}{9} \\ \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x &= \frac{16}{9} \\ 1 + 2 \sin x \cos x &= \frac{16}{9} \\ \sin x \cos x &= \frac{7}{18} \\ \text{เพราะว่า} \quad (1 + \tan^2 x) \cot x &= \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{1}{\frac{7}{18}} \\ (1 + \tan^2 x) \cot x &= \frac{18}{7} \end{aligned}$$

เพราะว่า ห.ร.ม. ของ 18 และ 7 เท่ากับ 1

จึงได้ $a = 18, b = 7$

$\therefore a^2 + b^2 = 18^2 + 7^2 = 373$ ตอบ

Tips จากครู Sup'k

KAI0U-Pb1.7 (PAT1'ม.ค.53) กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\sin x + \cos x = a$ และ $\sin x - \cos x = b$ แล้วค่าของ $\sin 4x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{1}{2}(a^3b - ab^3)$
- 2) $\frac{1}{2}(ab^3 - a^3b)$
- 3) $ab^3 - a^3b$
- 4) $a^3b - ab^3$

KMK-Pb2.6 (PAT1'ต.ค.52)

ถ้า $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{3}{2}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ แล้ว $\arccos(\tan 3\theta)$ มีค่าเท่าใด

ตอบ

FPAT-Pb82 (PAT1'มี.ค.52) ถ้า $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ แล้วค่าของ $\sin 2\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{4}{13}$

2) $\frac{9}{13}$

3) $\frac{4}{9}$

4) $\frac{13}{9}$

BRAN-Pb2.33 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการ

$$5(\sin a + \cos a) + 2 \sin a \cos a = 0.04$$

จงหาค่าของ $125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75 \sin a \cos a$ ตอบ.....

วิธีจริง

ให้ $x = \sin a + \cos a$ และ $y = \sin a \cos a$

จากโจทย์จะได้ $5x + 2y = 0.04$... (1)

เนื่องจาก $x^2 = (\sin^2 a + \cos^2 a) + 2 \sin a \cos a = 1 + 2y = 1 + \sin 2a$

ฉะนั้น $x^2 = 1 + 2y$... (2)

พิจารณา $x^2 = 1 + \sin 2a$ จะได้ $0 \leq x^2 \leq 2$ ฉะนั้น $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

(1) + (2); $x^2 + 5x = 1.04$

$$x^2 + 5x - 1.04 = 0$$

$$(x + 5.2)(x - 0.2) = 0$$

$$x = 0.2, -5.2$$

แต่ $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ จึงได้ $x = 0.2$ เท่านั้น

ส่งผลให้ $y = \frac{1}{2}((0.2) - 1) = -0.48$

เพราะว่า $\sin^3 a + \cos^3 a = (\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)$
 $= x(1 - y)$

$$\begin{aligned} \therefore 125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75 \sin a \cos a &= 125x(1 - y) + 75y \\ &= 125(0.2)(1 - (-0.48)) + 75(-0.48) \\ &= 37 - 36 \\ &= 1 \text{ ตอบ} \end{aligned}$$

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนว $(\sin \theta + \cos \theta)$ VS $(\sin \theta \cdot \cos \theta)$

Peach-Pb1.2 (แนว PAT1'ต.ค.55) สำหรับ จำนวนจริง θ ใดๆ

ให้ a และ b เป็นค่ามากที่สุดของ $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$ และ $3 \cdot \sin \theta + 4 \cdot \cos \theta$ ตามลำดับ

จงหาค่าของ a + b

ตอบ

แนวคิด & เทคนิค จากครู Sup'k

Tips จากครู Sup'k

สูตร 22.1! สูตร ผลบวก ผลต่าง → ผลคูณ

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \sin (\text{half sum}) \cos (\text{half diff}) \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos (\text{half sum}) \sin (\text{half diff}) \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos (\text{half sum}) \cos (\text{half diff}) \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) = -2 \sin (\text{half sum}) \sin (\text{half diff})\end{aligned}$$

สูตร 23.1! สูตร ผลคูณ → ผลบวก ผลต่าง

$$\begin{aligned}2 \sin A \cos B &= \sin (A + B) + \sin (A - B) = \sin (\text{sum}) + \sin (\text{diff}) \\ 2 \cos A \sin B &= \sin (A + B) - \sin (A - B) = \sin (\text{sum}) - \sin (\text{diff}) \\ 2 \cos A \cos B &= \cos (A + B) + \cos (A - B) = \cos (\text{sum}) + \cos (\text{diff}) \\ -2 \sin A \sin B &= \cos (A + B) - \cos (A - B) = \cos (\text{sum}) - \cos (\text{diff})\end{aligned}$$

Hormone Pb1.3 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $16 \sin^3 \theta \cos^2 \theta = 2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta$

ข. $\sin 3\theta = (\sin 2\theta + \sin \theta)(2 \cos \theta - 1)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก

2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

วิธีลัด

Tips จากครู Sup'k

วิธีจริง

ก. ถูก
$$\begin{aligned} 2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta &= (\sin 3\theta + \sin \theta) - (\sin 5\theta - \sin \theta) \\ &= (2 \sin 2\theta \cos \theta) - (2 \cos 3\theta \sin 2\theta) \\ &= (2 \sin 2\theta)(\cos \theta - \cos 3\theta) \\ &= (4 \sin \theta \cos \theta)(-2 \sin 2\theta \sin (-\theta)) \\ &= (4 \sin \theta \cos \theta)(4 \sin \theta \cos \theta \sin \theta) \\ &= 16 \sin^3 \theta \cos^2 \theta \end{aligned}$$

ข. ถูก
$$\begin{aligned} (\sin 2\theta + \sin \theta)(2 \cos \theta - 1) &= (2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta)(2 \cos \theta - 1) \\ &= (\sin \theta)(2 \cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) \\ &= (\sin \theta)(4 \cos^2 \theta - 1) \\ &= (\sin \theta)(4 - 4 \sin^2 \theta - 1) \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \\ &= \sin 3\theta \end{aligned}$$

Peach-Pb2.22 (แนว PAT1'ต.ค.55) จงพิจารณาความถูก ผิดของข้อความต่อไปนี้

ก. $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \pi = \frac{1}{2}$

ข. $\tan \frac{7\pi}{16} + \tan \frac{3\pi}{8} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$

ข้อใดต่อไปนี้สรุปถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

Hormone Pb1.4 (PAT1'มี.ค.57) ให้ $\sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ โดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ถ้า $a = \frac{\tan \theta - \tan 2\theta}{\cos \theta - \cos 2\theta}$ และ $b = \frac{\sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta}$

แล้วค่าของ $a^4 + b^4$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

ตอบ 0153.00

แนวคิด

$$\sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$$

$$(\sin 3\theta + \sin \theta) - \sin 2\theta = 0$$

ใช้สูตรเปลี่ยนผลบวก ไปเป็นผลคูณ ;

$$2 \sin 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta = 0$$

$$(\sin 2\theta)(2 \cos \theta - 1) = 0$$

เพราะว่า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $0 < 2\theta < \pi$ ฉะนั้น $\sin 2\theta \neq 0$

จึงได้ว่า

$$2 \cos \theta - 1 = 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

จะได้

$$a = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})}{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta} \\ &= \frac{2 \sin 4\theta \cos \theta + \sin 4\theta}{2 \cos 4\theta \cos \theta + \cos 4\theta} \\ &= \tan 4\theta = \tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^4 + b^4 &= (2\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^4 \\ &= 144 + 9 = 153 \end{aligned}$$

โจทย์ตรีโกณมิติ แนวอินเวอร์สตรีโกณ

สูตร 35.1! ระวังเงื่อนไขของ x ด้วย

$$\begin{aligned}\arcsin(-x) &= -\arcsin x \\ \arccos(-x) &= \pi - \arccos x \\ \arctan(-x) &= -\arctan x \\ \operatorname{arccot}(-x) &= \pi - \operatorname{arccot} x \\ \operatorname{arccosec}(-x) &= -\operatorname{arccosec} x \\ \operatorname{arcsec}(-x) &= \pi - \operatorname{arcsec} x\end{aligned}$$

สูตร 35.2! ระวังเงื่อนไขของ x ด้วย

$$\begin{aligned}\arcsin \frac{1}{x} &= \operatorname{arccosec} x \\ \arccos \frac{1}{x} &= \operatorname{arcsec} x \\ \arctan \frac{1}{x} &= \operatorname{arccot} x \\ \operatorname{arccot} \frac{1}{x} &= \arctan x \\ \operatorname{arccosec} \frac{1}{x} &= \arcsin x \\ \operatorname{arcsec} \frac{1}{x} &= \arccos x\end{aligned}$$

สูตร 35.3!!

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin x) &= x \text{ เมื่อ } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \arccos(\cos x) &= x \text{ เมื่อ } 0 \leq x \leq \pi \\ \arctan(\tan x) &= x \text{ เมื่อ } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arccot}(\cot x) &= x \text{ เมื่อ } 0 < x < \pi \\ \operatorname{arccosec}(\operatorname{cosec} x) &= x \text{ เมื่อ } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \operatorname{arcsec}(\sec x) &= x \text{ เมื่อ } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]\end{aligned}$$

สูตร 3.1!! $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$

สูตร 3.2!! $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \pi$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y$

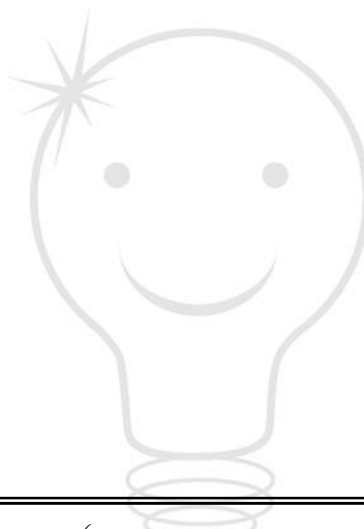
สูตร 3.3!! $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \pi$ เมื่อ $\arctan x + \arctan y < -\frac{\pi}{2}$

สูตร 3.4!! $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$

Peach-Pb1.26 (แนว PAT1'ต.ค.55) จงหาค่าของ $\sec^2 \left(2 \cdot \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} \right)$

ตอบ

แนวคิด & เทคนิค จากครู Sup'k



BRAN-Pb2.31 (PAT1'ต.ค.53) จงหา $\frac{\tan \left(\operatorname{arccot} \frac{1}{5} - \operatorname{arccot} \frac{1}{3} + \arctan \frac{7}{9} \right)}{\sin \left(\arcsin \frac{5}{13} + \arctan \frac{12}{13} \right)}$ ตอบ

MEP-Pb1.3 (แนวสามัญ) $\cos \left(\arcsin \left[\frac{\sec^2(2 \arctan \sqrt{2})}{11} \right] \right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ

MEP-Pb1.3.2 (สามัญ) $\sin^2 (2 \cdot \arctan \sqrt{2})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ

Hormone Pb1.4 (PAT1'มี.ค.57) $\cot \left(\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

2) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

3) $\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

4) $\sqrt{3}$

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวสมการอินเวอร์สตรีโกณ

สูตรลัด จากครู Sup'k I

สูตรลัด จากครู Sup'k II

Hormone Pb1.5 (สามัญ'57) ผลบวกของคำตอบของสมการ $2 \arcsin (x^2 - 3x + 1) + \pi = 0$

เท่ากับเท่าใด **ตอบ**

แนวคิด $2 \arcsin (x^2 - 3x + 1) + \pi = 0$

$$2 \arcsin (x^2 - 3x + 1) = -\pi$$

$$\arcsin (x^2 - 3x + 1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - 3x + 1 = -1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow \therefore x = 1, 2 \text{ ตรวจสอบคำตอบแล้วผ่าน}$$

ดังนั้น ผลบวกของคำตอบของสมการ $= 1 + 2 = 3$

FPAT-Pb87 (B-PAT1'ต.ค.51) จำนวนคำตอบที่แตกต่างกันของสมการ $\arcsin x = 2 \arccos x$ มีกี่ค่า

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

วิธีทำ & เทคนิค

Peach-Pb2.39 (แนว PAT1'ต.ค.55) ให้ $\operatorname{arcsec} x = 2 \cdot \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{17}}$

แล้วจงหาค่าของ $\cot \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsec} x \right)$

1) $-\frac{13}{9}$

2) $\frac{13}{9}$

3) $-\frac{13}{16}$

4) $\frac{13}{16}$

FPAT-Pb89 (PAT1'ก.ค.52) ถ้า $\arcsin (5x) + \arcsin (x) = \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\tan (\arcsin x)$ มีค่าเท่าใด

1) $\frac{1}{5}$

2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

3) $\frac{1}{3}$

4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

FPAT-Pb88 (PAT1'มี.ค.52) ให้ $-1 \leq x \leq 1$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2552}$

แล้วค่าของ $\sin \left(\frac{\pi}{2552} \right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $2x$

2) $1 - 2x^2$

3) $2x^2 - 1$

4) $-2x$

SheLL1.6 (PAT1'ก.ค.53) ให้ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$

แล้วค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{15} + \arccos(x^2)\right)$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

- 1) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

KAiOU-Pb2.4 (PAT1'มี.ค.53) ให้ α และ β เป็นมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

โดยที่ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ ถ้า $\cos\left(\arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \sin\left(\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 1$

แล้ว $\sin \beta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด ตอบ.....

NaDate-Pb1.10 (PAT1'มี.ค.56) ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุด โดยที่ $0 < x < 1$

และสอดคล้องกับ $\arctan(1-x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2 \operatorname{arcsec} \sqrt{1+2x(1-x)}$

แล้วค่าของ $\cos \pi x$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -1 2) 0 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ตอบ 3)

แนวคิด ให้ $y = \operatorname{arcsec} \sqrt{1+2x(1-x)}$, $0 < x < 1 \rightarrow \sec y = \sqrt{1+2x(1-x)}$

ทำให้ $\tan y = \sqrt{2x(1-x)}$ ดังนั้น $y = \arctan \sqrt{2x(1-x)}$

ต่อไปแก้สมการ

$$\arctan(1-x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2 \operatorname{arcsec} \sqrt{1+2x(1-x)}$$

$$\arctan(1-x) + \arctan(2x) = 2 \arctan \sqrt{2x(1-x)}$$

$$\tan(\arctan(1-x) + \arctan(2x)) = \tan(2 \arctan \sqrt{2x(1-x)})$$

$$\frac{(1-x) + 2x}{1 - (1-x)(2x)} = \frac{2\sqrt{2x(1-x)}}{1 - 2x(1-x)}$$

$$\frac{1+x}{1-2x+2x^2} = \frac{2\sqrt{2x(1-x)}}{1-2x+2x^2}$$

$$1+x = 2\sqrt{2x(1-x)}$$

$$1+2x+x^2 = 4(2x-2x^2)$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\therefore (3x-1)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ตรวจสอบคำตอบแล้วผ่าน}$$

$$\therefore \text{จะหาค่าของ } \cos \pi x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ ตอบ}$$

NaDate-Pb2.32 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

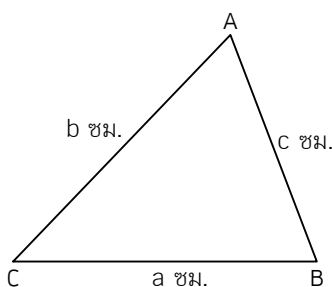
โดยที่ $\theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{1 - \sqrt{x}} \right) - \arctan \sqrt{x}$ เมื่อ $0 < x < 1$

ค่าของ $\tan \theta + \cot \theta$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวทฤษฎีของ $\sin$ VS ทฤษฎีของ $\cos$

✦ สูตร 42.1! สูตรของพื้นที่สามเหลี่ยม

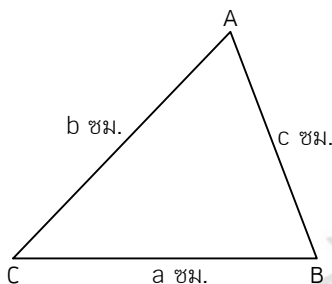


$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \hat{B}$$

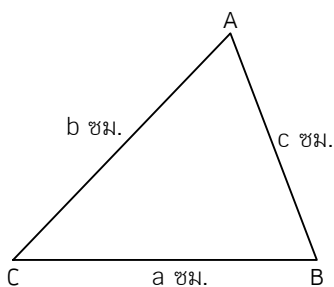
✦ สูตร 42.21! กฎของ $\sin$



กฎของ $\sin$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

✦ สูตร 42.3! กฎของ $\cos$



กฎของ $\cos$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos C$$

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวทฤษฎีของ sin

BRAN-Pb1.7 (PAT1'ต.ค.53) ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูป

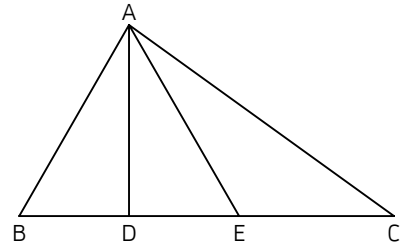
ถ้า $\hat{A}BC = 30^\circ$, $\hat{B}AC = 135^\circ$

และ AD และ AE แบ่ง $\hat{B}AC$

ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กัน แล้ว $\frac{EC}{BC}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

- 2) $\sqrt{3}$
4) $\sqrt{2}$



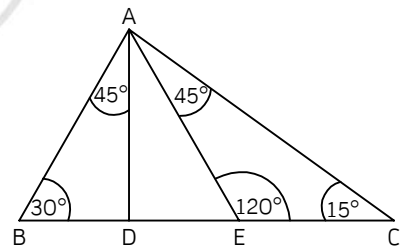
แนวคิด

ใน $\triangle ABC$

จะได้ $\hat{A}CB = 180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$

โดยทฤษฎีของไซน์

$$\begin{aligned} \frac{\sin 30^\circ}{AC} &= \frac{\sin 135^\circ}{BC} \\ \frac{1}{2(AC)} &= \frac{1}{\sqrt{2}(BC)} \\ BC &= \sqrt{2}(AC) \end{aligned}$$



ใน $\triangle ACE$ จะได้ $\hat{C}AE = \frac{135^\circ}{3} = 45^\circ$

และ $\hat{A}EC = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$

โดยทฤษฎีของไซน์ได้

$$\begin{aligned} \frac{\sin 120^\circ}{AC} &= \frac{\sin 45^\circ}{EC} \\ \frac{\sqrt{3}}{2(AC)} &= \frac{1}{\sqrt{2}(EC)} \\ EC &= \frac{\sqrt{2}(AC)}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$EC = \frac{BC}{\sqrt{3}} \rightarrow \therefore \frac{EC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวกฎของ sin ผลสมกฎของ cos

Duem-Pb2.8 (แนว PAT1'ธ.ค.54) กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B, C ยาว a, b, c ตามลำดับ และ $(\sin A - \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 \sin A \sin C$

จงหาค่าของ $\sqrt{3 \operatorname{cosec}^2 B + 3 \sec^2 B}$

ตอบ

แนวคิด & เทคนิค

ขั้นที่ 1 ใน $\triangle ABC$ โดยกฎของ sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \text{สมมติตัวแปรเพิ่ม} = k$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = k, \frac{b}{\sin B} = k, \frac{c}{\sin C} = k$$

$$\therefore \frac{a}{k} = \sin A, \frac{b}{k} = \sin B, \frac{c}{k} = \sin C \rightarrow (*)$$

ขั้นที่ 2 จากโจทย์กำหนดให้

$$(\sin A - \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 \sin A \sin C$$

$$\text{แทนจาก } (*) ; \left(\frac{a}{k} - \frac{b}{k} + \frac{c}{k} \right) \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k} \right) = 3 \cdot \frac{a}{k} \cdot \frac{c}{k}$$

$$\left(\frac{a-b+c}{k} \right) \left(\frac{a+b+c}{k} \right) = 3 \cdot \frac{a \cdot c}{k^2}$$

$$(a-b+c)(a+b+c) = 3 \cdot a \cdot c$$

$$((a+c)-b)((a+c)+b) = 3ac$$

$$(a+c)^2 - b^2 = 3ac$$

$$a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = 3ac$$

$$a^2 - ac + c^2 = b^2$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = ac$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = ac$$

$$\text{นำ } 2ac \text{ หารทั้งสองข้าง } \therefore \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac}$$

$$\therefore \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

$$\text{โดยกฎของ cos ; } \therefore \cos B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore B = 60^\circ \text{ ตอบ}$$

สูตรลัด จากครู Sup'k

กฎของ cos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos B$$

จัดรูปใหม่

$$\therefore 2 \cdot ac \cdot \cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

NaDate-Pb1.16 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ

ถ้าด้านตรงข้ามมุม A ยาว 14 หน่วย, ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 30 หน่วย

และ $3 \sin B = 5 \sin C$ แล้ว $\sin 2A$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1) $-\frac{1}{2}$

2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\frac{1}{2}$

4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hormone Pb1.6 (PAT1'เม.ย.57) ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B และ C เป็นมุมแหลม และสอดคล้องกับ

ก. $25 \cos B - 13 \cos C = 15$

ข. $65 (\cos B + \cos C) = 77$

ค. ความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม C ยาว 20 หน่วย

จงหาความยาวเส้นรอบรูปของ $\triangle ABC$

ตอบ

Hormone Pb1.7 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ

โดยที่ความยาวตรงข้ามมุม A, มุม B, มุม C เท่ากับ a หน่วย, b หน่วย, c หน่วย ตามลำดับ

ถ้ามุม A มีขนาดมากกว่า 90° , มุม B มีขนาด 45°

และ $\sqrt{2}c = (\sqrt{3} - 1)a$ แล้ว $\cos^2(A - B - C) + \cos^2 B + \cos^2 C$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ

เฉลยคำตอบ ชีทตัวแบรนด์ซัมเมอร์แคมป์ ในส่วนของครู Sup'k

NaDate-Pb2.48	ตอบ 10	SheLL2.46	ตอบ x = 3	SheLL2.47	ตอบ x = 9
SheLL2.4	ตอบ x = 3	BRAN-Pb1.25	ตอบ 1)	TF-PAT119	ตอบ 4)
TF-PAT120	ตอบ 2)	TF-PAT123	ตอบ 3)	TF-PAT124	ตอบ 3)
BRAN-Pb1.20	ตอบ 4)	KAiOU-Pb1.24	ตอบ 4)	SheLL2.49	ตอบ 208
NaDate-Pb2.49	ตอบ 6	QET-G-Pb26.1	ตอบ 4)	QET-G-Pb23.2	ตอบ 1)
QET-G-Pb23.3	ตอบ 4)	VetaNaDate-Pb1.25	ตอบ 2)	KAiOU-Pb1.22	ตอบ 3)
SheLL1.24	ตอบ 4)	DiAMK-Pb1.25	ตอบ 2)	SheLL1.10	ตอบ 1)
DiAMK-Pb1.2	ตอบ 1)	KAiOU-Pb1.11	ตอบ 2)	Sup'k-Pb2.29.1	ตอบ 2 ตัว
Sup'k-Pb2.29.2	ตอบ 2 ตัว	FPAT-Pb14	ตอบ 2)	FPAT-Pb1	ตอบ 1)
FPAT-Pb3	ตอบ 2)	SheLL1.11	ตอบ 2)	AVATAR-Pb5.1	ตอบ 2)
KMK-Pb1.8	ตอบ 2)	KAiOU-Pb1.12	ตอบ 2)	FPAT-Pb4	ตอบ 3)
NaDate-Pb2.27	ตอบ 20	NaDate-Pb2.30	ตอบ 4	BRAN-Pb2.27	ตอบ 13
KAiOU-Pb2.2	ตอบ 5	SheLL2.27	ตอบ 2	SheLL1.14	ตอบ 2)
FPAT-Pb9	ตอบ 1)	FPAT-Pb8	ตอบ 2)	KAiOU-Pb1.10	ตอบ 1)
FPAT-Pb7	ตอบ 4)	BRAN-Pb1.11	ตอบ 1)	FPAT-Pb11	ตอบ 3)
NaDate-Pb2.29	ตอบ 5	KMK-Pb 2.10	ตอบ 4	FPAT-Pb12	ตอบ 3)
KMK-Pb2.9	ตอบ 6	NaDate-Pb1.12	ตอบ 3)	SheLL1.1	ตอบ 2)
KMK-Pb1.2	ตอบ 1)	FPAT-Pb17	ตอบ 2)	FPAT-Pb18	ตอบ 2)
KAiOU-Pb1.1	ตอบ 4)	NaDate-Pb1.3	ตอบ 2)	KAiOU-Pb1.2	ตอบ 3)
FPAT-Pb21	ตอบ 4)	KMK-Pb1.1	ตอบ 4)	FPAT-Pb22	ตอบ 1)
FPAT-Pb32	ตอบ 2)	FPAT-Pb34	ตอบ 1)	FPAT-Pb35	ตอบ 2)
FPAT-Pb36	ตอบ 4)	FPAT-Pb37	ตอบ 4)	KMK-Pb1.4	ตอบ 1)
FPAT-Pb39	ตอบ 1)	FPAT-Pb41	ตอบ 1)	FPAT-Pb43	ตอบ 3)
FPAT-Pb42	ตอบ 1)	KMK-Pb1.5	ตอบ 2)	KAiOU-Pb1.4	ตอบ 1)
BRAN-Pb1.3	ตอบ 4)	FPAT-Pb46	ตอบ 4)	FPAT-Pb45	ตอบ 2)
SheLL1.4	ตอบ 3)	NaDate-Pb1.4	ตอบ 3)	KAiOU-Pb1.15	ตอบ 1)
KAiOU-Pb1.9	ตอบ 4)	FPAT-Pb49	ตอบ 1)	SheLL1.9	ตอบ 2)
BRAN-Pb1.8	ตอบ 4)	NaDate-Pb1.8	ตอบ 4)	KMK-Pb1.9	ตอบ 2)
BRAN-Pb2.34	ตอบ 17	FPAT-Pb50	ตอบ 1)	FPAT-Pb54	ตอบ 1)
FPAT-Pb55	ตอบ 4)	FPAT-Pb56	ตอบ 3)	KMK-Pb2.8	ตอบ 8
KMK-Pb1.6	ตอบ 4)	FPAT-Pb57	ตอบ 3)	FPAT-Pb58	ตอบ 4)
FPAT-Pb59	ตอบ 1)	NaDate-Pb2.31	ตอบ 162	KMK-Pb1.10	ตอบ 1)
FPAT-Pb62	ตอบ 4)	FPAT-Pb63	ตอบ 1)	FPAT-Pb64	ตอบ 3)
KAiOU-Pb1.8	ตอบ 3)	SheLL1.8	ตอบ 1)	NaDate-Pb1.17	ตอบ 4)
FPAT-Pb77	ตอบ 1)	FPAT-Pb78	ตอบ 1)	FPAT-Pb75	ตอบ 1)
FPAT-Pb70	ตอบ 2)	PAT-Pb71	ตอบ 3)	FPAT-Pb72	ตอบ 1)
KAiOU-Pb1.6	ตอบ 4)	FPAT-Pb65	ตอบ 1)	KAiOU-Pb1.13	ตอบ 1)

AVATAR-Pb6.1	ตอบ $f^{-1}(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$	KMK-Pb 2.3	ตอบ 7.5	FPAT-Pb66	ตอบ 4)
FPAT-Pb66.1	ตอบ 3)	FPAT-Pb67	ตอบ 2)	KAiOU-Pb2.22	ตอบ 7
KAiOU-Pb1.5	ตอบ 2)	SheLL2.28	ตอบ 1	SheLL1.18	ตอบ 1)
BRAN-Pb1.4	ตอบ 2)	FPAT-Pb76	ตอบ 4)	NaDate-Pb1.11	ตอบ 2)
FPAT-Pb79	ตอบ 1)	NaDate-Pb1.7	ตอบ 1)	KMK-Pb2.4	ตอบ 6
BRAN-Pb2.42	ตอบ 262	TF-PAT4	ตอบ 4)	SheLL2.30	ตอบ 4
KAiOU-Pb2.7	ตอบ 6	BRAN-Pb1.12	ตอบ 1)	KMK-Pb1.11	ตอบ 3)
TF-PAT1	ตอบ 2)	TF-PAT2	ตอบ 4)	KAiOU-Pb2.6	ตอบ 32
KMK-Pb1.12	ตอบ 4)	AVATAR-Pb14.1	ตอบ 16	TF-PAT3	ตอบ 4)
BRAN-Pb2.36	ตอบ 396	SheLL1.12	ตอบ 3)	SheLL2.31	ตอบ 4
NaDate-Pb1.13	ตอบ 4)	TF-PAT6	ตอบ 4)	TF-PAT7	ตอบ 3)
KMK-Pb2.11	ตอบ 0.2	TF-PAT8	ตอบ 3)	TF-PAT9	ตอบ 1)
TF-PAT10	ตอบ 1)	SheLL1.13	ตอบ 3)	KMK-Pb2.5	ตอบ 2
KAiOU-Pb2.5	ตอบ 0.5	FPAT-Pb83	ตอบ 2)	SheLL2.29	ตอบ 2
KAiOU-Pb1.7	ตอบ 3)	KMK-Pb2.6	ตอบ 0	FPAT-Pb82	ตอบ 3)
BRAN-Pb2.31	ตอบ 1	FPAT-Pb87	ตอบ 1)	FPAT-Pb89	ตอบ 1)
FPAT-Pb88	ตอบ 2)	SheLL1.6	ตอบ 4)	KAiOU-Pb2.4	ตอบ 0.5
NaDate-Pb2.32	ตอบ 2	Hormone Pb1.6	ตอบ 54	Hormone Pb1.7	ตอบ 2



เก็งข้อสอบ

ชุดที่ 1

- จากการสอบถามผู้หญิงจำนวน 100 คน เกี่ยวกับดอกไม้ที่ชอบ ระหว่างดอกกุหลาบกับดอกมะลิ พบว่า 22 คนชอบทั้งสองชนิด 11 คนไม่ชอบดอกกุหลาบและไม่ชอบดอกมะลิ 53 คนชอบดอกมะลิ มีจำนวนผู้หญิงที่ชอบดอกกุหลาบเพียงอย่างเดียวกี่คน
1) 36 คน 2) 58 คน 3) 67 คน 4) 89 คน
- กำหนดให้ a, b เป็นคำตอบของสมการ $|7 - 2x| = 9$ และ c, d เป็นคำตอบของสมการ $\frac{2x^2 - 1}{x} = 1$ แล้วค่าของ $a + b + c + d$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี
1) -5.5 2) -2.5 3) 3.5 4) 7.5
- ถ้า $\frac{3^x + 3^{x+2}}{9^x} = 9$ แล้ว $(\sqrt{3})^x$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี
1) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ 2) $\sqrt{\frac{10}{3}}$ 3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 4) $\frac{\sqrt{10}}{3}$
- รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ตารางเซนติเมตร แล้วความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ตรงกับข้อใด
1) $\sqrt{3}$ เซนติเมตร 2) $\sqrt{9}$ เซนติเมตร 3) $\sqrt{27}$ เซนติเมตร 4) $\sqrt{81}$ เซนติเมตร
- กำหนด S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม โดยที่ $S_n = 2n^2 - 25$ แล้วพจน์ที่ 7 ของอนุกรมนี้มีค่าเท่ากับข้อใด
1) 26 2) 47 3) 73 4) 120
- รูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ถ้า $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ และ AB ยาว 5 หน่วย แล้วพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC ตรงกับข้อใด
1) $\sqrt{5}$ ตารางหน่วย 2) $2\sqrt{5}$ ตารางหน่วย
3) 5 ตารางหน่วย 4) 10 ตารางหน่วย
- กราฟพาราโบลารูปหนึ่งมีจุดวกกลับที่จุด $(2, -3)$ ตัดแกน X ที่จุด $(5, 0)$ แล้วจุดตัดแกน X ของกราฟพาราโบลารูปดังกล่าวอีกหนึ่งจุดคือจุดในข้อใด
1) $(-3, 0)$ 2) $(-1, 0)$ 3) $(1, 0)$ 4) $(8, 0)$

8. กำหนดแผนภาพต้นไม้ แสดงคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนจำนวน 19 คน ดังนี้

ต้น	ใบ
1	3 8
2	2 0 8 7 9
3	4 5 3 6 5
4	8 1 5 3 2 8 9

ข้อใดคือคะแนนสอบของนักเรียนตรงตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 60

- 1) 18 2) 28 3) 36 4) 43
9. กำหนดข้อมูล 7 จำนวน ดังนี้
15 8 11 22 34 11 25
ข้อใดต่อไปนี้เรียงลำดับได้ถูกต้อง
- 1) ฐานนิยม < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < ค่ามัธยฐาน
2) ฐานนิยม < ค่ามัธยฐาน < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
3) ค่ามัธยฐาน < ฐานนิยม < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
4) ค่ามัธยฐาน < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < ฐานนิยม
10. นำเลขโดดทั้งหมดมาสร้างเป็นจำนวนคู่สามหลัก โดยที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ทั้งสิ้นกี่จำนวน
- 1) 328 จำนวน 2) 360 จำนวน 3) 504 จำนวน 4) 720 จำนวน
11. จงพิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้
- ก. เหตุ 1. นักเรียนทุกคนเป็นคนขยัน
2. นายมาริโอไม่ใช่นักเรียน
ผล นายมาริโอไม่ใช่คนขยัน
- ข. เหตุ 1. คนที่เล่นอูคูเลเล่ทุกคนจะเป็นคนอารมณ์ดี
2. คนอารมณ์ดีทุกคนจะมีความสุข
ผล คนที่เล่นอูคูเลเล่ทุกคนเป็นคนมีความสุข
- ข้อความใดสรุปถูกต้อง
- 1) ก. สมเหตุสมผล และ ข. ไม่สมเหตุสมผล 2) ก. ไม่สมเหตุสมผล และ ข. สมเหตุสมผล
3) สมเหตุสมผลทั้ง ก. และ ข. 4) ไม่สมเหตุสมผลทั้ง ก. และ ข.
12. กำหนด 3, 3, 8, 6, 13, 9, 18, 12, ... โดยใช้หลักการให้เหตุผลแบบอุปนัย พจน์ที่ 19 มีค่าเท่ากับข้อใด
- 1) 48 2) 47 3) 29 4) 28
13. ให้ $a = \sqrt{3} - 2$ และ $b = \sqrt{3} + 2$ ข้อใดเป็นอินเวอร์สการคูณของ $ab + 2a - 2b$
- 1) $-\frac{1}{5}$ 2) $-\frac{1}{9}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{1}{5}$
14. กำหนด $f = \{(-2, 5), (0, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)\}$ ค่าของ $f(-2) + f(0) - f(4) - f(2)$ ตรงกับข้อใด
- 1) 0 2) -6 3) -5 4) 27

15. กำหนด $(x + y, 2) = (8, x - y)$ ค่าของ $|x| + |y| - 2|xy|$ คือข้อใด
 1) -38 2) -22 3) 22 4) 38
16. กำหนด $f(x) = |x + 2| - 5$ และ $g(x) = |x| + 3$ ค่าของ $R_f - R_g$ เป็นสับเซตในข้อใด
 1) $(-7, 2]$ 2) $(-5, 2]$ 3) $(-6, 4)$ 4) $[-3, 3]$
17. กำหนด $g(x) = x^2 - 2x + 5$ ถ้าค่าของ $g(x - 1) = x^2 + ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด
 1) 4 2) 3 3) -3 4) -4
18. กำหนด $f(x) = 2x^2 + 8x + c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง ค่า c ที่ทำให้ $f(x)$ มีค่าต่ำสุดเป็น -5 คือข้อใด
 1) -13 2) -3 3) 3 4) 13
19. กำหนด $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2y} = \frac{27}{125}$ และ $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} = \frac{64}{729}$ ค่าของ $x + y$ ตรงกับข้อใด
 1) 1 2) $\frac{3}{2}$ 3) 2 4) $\frac{5}{2}$
20. กำหนดให้ A, B และ C เป็นมุมแหลมที่ $\cos B = \frac{1}{10}$ และ $\cos C = \frac{15}{2}$ ถ้า $\frac{\sin A}{2} = 7 \cos B - 3 \tan C$ แล้ว $\sec A \tan A$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 1) $\frac{15}{16}$ 2) $\frac{12}{25}$ 3) $\frac{4}{5}$ 4) $\frac{3}{5}$
21. กำหนดให้ $A = \sqrt{8} + \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{512}$ และ $B = \sqrt{256} + \sqrt[3]{-27} - \sqrt[4]{64}$ ค่าของ AB ตรงกับข้อใด
 1) 5 2) 31 3) 161 4) 177
22. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกกรุปอย่างง่าย และมีเลขชี้กำลังเป็นบวกของ $\left[\frac{a^{-4/3}b^{-1/3}}{a^2b^{1/2}}\right]^{3/5} \div \left[\frac{a^{-2/3}b^{-3/4}}{a^{1/2}b^{2/3}}\right]^6$ ตรงกับข้อใด
 1) $\frac{a^5}{b^8}$ 2) a^5b^8 3) $\frac{b^9}{a^5}$ 4) $\frac{a^5}{b^9}$
23. ค่าของ $\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + 2(1 - \sec^2 75^\circ)(\sec^2 15^\circ - 1)$ เท่ากับข้อใด
 1) 3 2) 1 3) -1 4) -3
24. นายดำยืนอยู่ ณ ทิศตะวันออกของเสาธง เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 30° ส่วนนายแดงยืนอยู่ทางทิศตะวันตกของเสาธง เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60° ถ้าเขาทั้งสองอยู่ห่างกัน 100 เมตร ความสูงของเสาธงเท่ากับข้อใด
 1) 25 เมตร 2) $25\sqrt{3}$ เมตร 3) 50 เมตร 4) $50\sqrt{3}$ เมตร
25. ถ้า $3a - 1, b - a, 7b + 8$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด
 1) $-\frac{7}{5}$ 2) $-\frac{5}{7}$ 3) $\frac{5}{7}$ 4) $\frac{7}{5}$

-

ชุดที่ 2

36. กำหนดจำนวนสมาชิกของเซตตามตารางต่อไปนี้

เซต	$A \cup B \cup C$	$A \cup B$	$B \cup C$	$A \cup C$	$A \cap B \cap C$
จำนวนสมาชิก	46	37	39	38	4

ค่าของ $n(A) + n(B) + n(C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 72 2) 84 3) 96 4) 156

37. กำหนดให้ ประพจน์ $(\sim p \leftrightarrow \sim r) \vee (p \leftrightarrow q)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ประพจน์ใดต่อไปนี้ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

- 1) $\sim p \rightarrow (q \vee r)$ 2) $\sim p \rightarrow (q \wedge r)$ 3) $p \vee q \vee \sim r$ 4) $p \wedge q \wedge \sim r$

38. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^{2553} - x^{2550} + x^5 - x^2 + 4 > 0$

39. ให้ $p(x)$ เป็นพหุนาม ถ้าหาร $p(x)$ ด้วย $x - 1$ จะเหลือเศษ 3 และถ้าหาร $p(x)$ ด้วย $x - 3$ จะเหลือเศษ 5 ถ้า $r(x) = ax + b$ คือ เศษที่เกิดจากการหาร $p(x)$ ด้วย $(x - 1)(x - 3)$ แล้ว $3a + 2b$ เท่ากับเท่าใด

40. ให้ $A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ และ } |x^2 - 1| = |x - 1| - |x + 1|\}$ จงเขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก

41. ถ้า $ab - 25a - 25b = 1575$ และ $(a, b) = 5$ โดยที่ $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว $|a - b|$ เท่ากับเท่าใด

42. กำหนดให้ $A(4, 3)$, $B(10, -5)$, $C(3, -4)$ และ $R(u, v)$ เป็นจุดในระนาบโดยที่ $\overline{CP}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด P แล้วระยะจากจุด P ไปยังเส้นตรงซึ่งมีสมการ $3x + 4y + 8 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{18}{5}$ 2) $\frac{21}{5}$ 3) 5 4) 6

43. ให้ H เป็นไฮเพอร์โบลา $12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$ ซึ่งมีจุดโฟกัส คือ F_1 และ F_2 ให้ E เป็นวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ H โดยมี F_1 และ F_2 เป็นจุดยอดและสัมผัสกับแกน Y ถ้า E ตัดแกน X ที่จุด A และ B แล้ว AB ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\sqrt{8}$ หน่วย 2) $\sqrt{7}$ หน่วย 3) $\sqrt{6}$ หน่วย 4) $\sqrt{5}$ หน่วย

44. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ a เป็นจำนวนจริงค่าน้อยสุดที่สอดคล้องสมการ $\det(A - aI_3) = 0$

จงหา $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ที่ทำให้ $(A - aI_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

45. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 และ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 ถ้า $A^2 + 3A = I$ แล้ว $\det(AA^t + A^t + 2A + 2I)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 1 2) 3 3) 9 4) 27

46. ถ้า $f(x) = x + 2$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = 3x^2 - 5$ แล้วเซตคำตอบของสมการ $g(x) < 0$ คือข้อใดต่อไปนี้
 1) $[-1, 1]$ 2) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 3) $(-1, 1)$ 4) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
47. $\sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}}$ เมื่อ $2 < x < 3$ มีค่าเท่าใด
 1) $3\sqrt{3}$ 2) $\sqrt[4]{3}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $\sqrt[3]{2}$
48. ถ้า $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} = 2^{5+4x}$ แล้ว $x^2 - 2x$ เท่ากับเท่าใด
49. ให้ $a = \log_{18} 12$ และ $b = \log_{54} 24$ จงหาค่าของ $\frac{1-ab}{a-b}$
50. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^2 \log_5(x^2 + 2x - 3) - x \log_{1/5}(x^2 + 2x - 3) = x^2 + x$ ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกของ A มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้
 1) 2 2) 4 3) 6 4) 8
51. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ ซึ่ง $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 22$ และ $|\vec{u}| = \sqrt{3}$ ถ้ามุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็น 60° แล้วค่าของ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ คือข้อใด
 1) $\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{6}$ 3) $\sqrt{12}$ 4) $\sqrt{18}$
52. ถ้า $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ และ $A + B + C = \pi$ แล้วเซตคำตอบของสมการ $\cos 2x - 3 \sin x = 2 + \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cdot \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cdot \cos A}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 1) $\left\{-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right\}$ 2) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$ 3) $\left\{-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right\}$ 4) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$
53. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\arccos(1-x) + \frac{\pi}{2} = \arccos \frac{3x}{4}$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\arccos(1-x) = \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{3x}{4}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
 1) $A = B$ 2) $A \subset B$ แต่ $B \not\subset A$ 3) $B \subset A$ แต่ $A \not\subset B$ 4) $A \not\subset B$ และ $B \not\subset A$
54. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) = 3 \sin A \cdot \sin B$ แล้ว $\tan C$ เท่ากับเท่าใด
55. กำหนด z เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $i^2 = -1$ ถ้า $\left|z - \frac{i}{1 - \frac{i}{(1+i)}}\right| = 3$ และ $\left|z + \frac{i}{1 + \frac{i}{(1-i)}}\right| = 1$ แล้ว $|z + 1|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 1) $\frac{3}{2}$ 2) 2 3) $\frac{5}{2}$ 4) 3
56. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $z|z| + 2z + i = 0$ แล้วส่วนจินตภาพของ z มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 1) -1 2) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{2} - 1$ 4) $1 - \sqrt{2}$

57. กำหนดให้ $P(x) = x^3 + bx^2 + x + d$ โดยที่ $b, d \in \mathbb{R}$ และ $P(1 + i) = 0$ จงหาผลบวกของรากทั้งหมดของ $P(x)$
58. กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{n^k} [1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + \dots + (n + \underbrace{\dots}_{n \text{ พจน์}} + n)]$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, $\ell > 0$ แล้ว $6(\ell + k)$ มีค่าเท่าใด
59. กำหนดให้ a, b, c เป็น 3 พจน์เรียงติดกันในลำดับเรขาคณิต และมีผลคูณเป็น 27 ถ้า $a, b + 3, c + 2$ เป็น 3 พจน์เรียงติดกันในลำดับเลขคณิตแล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
60. ให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $|x| < 1$ ถ้านุกรม $1 + (1 + x)\frac{1}{2} + (1 + x + x^2)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 + x + x^2 + x^3)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$ มีผลบวกเท่ากับ $\frac{16}{7}$ และ x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) $-\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{4}$
61. ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)a}{\sqrt{x}-2} & \text{เมื่อ } x > 4 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 4 \text{ โดยที่ } a, b \text{ เป็นจำนวนจริง} \\ x^2 - b & \text{เมื่อ } x < 4 \end{cases}$
- ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด $x = 4$ แล้ว $f\left(a + \frac{b}{16}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) -16 2) -14 3) 14 4) 16
62. ให้ $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้งบนระนาบ XY โดยที่ f มีอนุพันธ์ที่ $x = 1$ และ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h^2 + 2h} = 3$
- ถ้า $y = g(x)$ เป็นสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด $(1, 2)$ แล้วค่าของ $\int_2^3 g(x) dx$ เท่ากับเท่าใด
63. ให้ L เป็นเส้นตรงซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$, $x > 0$ ที่จุด $(1, -1)$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L ณ จุดสัมผัสจะตัดกับพาราโบลา $x = y^2$ ที่จุดใดต่อไปนี้
- 1) $(1, -1)$ และ $(4, 2)$ 2) $(1, -1)$ และ $(16, -4)$
3) $(1, -1)$ และ $(25, 5)$ 4) $(1, -1)$ และ $(49, -7)$
64. พื้นที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุภายในระหว่างพาราโบลา $y = 5 + 4x - x^2$ กับแกน X โดยมีด้านหนึ่งอยู่บนแกน X มีค่าเท่ากับเท่าใด
65. ถ้า a คือ เลขที่ได้จากการสุ่มเลขจากเลข 1 ถึง 7 และ b คือ เลขที่ได้จากการสุ่มเลขจากเลข 2 ถึง 9 ความน่าจะเป็นที่สมการ $x^2 - ax + b = 0$ จะมีรากเป็นจำนวนจริงมีค่าเท่าใด
66. ในการคำนวณค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของข้อมูลชุดหนึ่งซึ่งมี 40 จำนวน พบว่ามีค่าเฉลี่ย 20 และค่าแปรปรวน 25 ต่อมาภายหลังพบว่าอ่านคะแนนผิดไป 2 จำนวน คือ “อ่าน 7 เป็น 1 และอ่าน 3 เป็น 5” แล้ว ความแปรปรวนที่ถูกต้องมีค่าเท่าใด

67. ถ้าน้ำหนักแรกเกิดของเด็กไทยมีการแจกแจงปกติ โดยในปี 2533 มีน้ำหนักเฉลี่ย 2500 กรัม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 250 กรัม และในปี 2540 มีน้ำหนักเฉลี่ย 3240 กรัม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 200 กรัม น้ำหนักแรกเกิดของเด็กไทยที่อยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 97.73 ในปี 2533 จะอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ตามข้อใดต่อไปนี้เมื่อเทียบกับปี 2540 กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติดังนี้

Z	1.0	1.2	2.0	2.2
A	0.3413	0.3849	0.4773	0.4861

- 1) 11.51 2) 38.49 3) 48.61 4) 61.51
68. จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างยอดขาย (y) (หน่วยเป็นหมื่นบาท) ของพนักงานขายประกัน ในบริษัท ประกันภัยแห่งหนึ่งกับประสบการณ์การขาย (x) (หน่วยเป็นปี) ของพนักงานขาย โดยเก็บข้อมูลจากพนักงานขายประกัน 8 คน ได้ข้อมูลดังนี้

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 48, \sum_{i=1}^8 y_i = 41, \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 286, \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 348$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าพนักงานขายประกันคนหนึ่งมีประสบการณ์ขาย 6 ปี ยอดขายโดยประมาณของพนักงานคนนี้จะเท่ากับ 51,250 บาท

ข. ประสบการณ์ในการขายเพิ่มขึ้น 1 ปี ทำให้ยอดขายประกันเพิ่มขึ้น 11,250 บาท

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

69. กำหนดให้ สมการจุดประสงค์ คือ $C = 3x + y$

อสมการข้อจำกัด คือ $2x + 3y \leq 120$

$$x + y \geq 10$$

$$y - x \leq 5$$

$$y - 2 \geq 0$$

ถ้า a เป็นค่ามากที่สุด และ b เป็นค่าน้อยสุดของ C แล้ว a - b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 63 2) 147 3) 158 4) 188
70. ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $27x + 28y + 29z = 363$ แล้ว $10(x + y + z)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ชุดที่ 3

71. Sup'k-Pb 2.1 If for $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{3} < \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} < 3$, then $\frac{9 \cdot 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 4}{9 \cdot 3^{2x} + 6 \cdot 3^x + 4}$ lies between :

สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$, ถ้า $\frac{1}{3} < \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} < 3$ แล้ว จงหาว่า $\frac{9 \cdot 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 4}{9 \cdot 3^{2x} + 6 \cdot 3^x + 4}$ อยู่ระหว่างค่าใด

- 1) $\frac{1}{2}$ และ 2 2) $\frac{1}{3}$ และ 3 3) 0 และ 2 4) ไม่มีข้อใดถูกต้อง

72. Sup'k-Pb 2.2 Find the solution of $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$

จงหาเซตคำตอบของ $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$

ตอบ

73. Sup'k-Pb 2.3 The solution of $||x| - 1| < |1 - x|$

จงหาเซตคำตอบของ $||x| - 1| < |1 - x|$

ตอบ

74. Sup'k-Pb 2.4 กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^5 - 2x^4 - 7x^3 + x = 10\}$, $B = \{2\}$

และ $C = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $A \cup B \neq P(A)$

ข. $\{A, A - C\} \in P(P(A))$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. และ ข. เป็นจริง 2) ก. เป็นจริง และ ข. เป็นเท็จ
3) ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นจริง 4) ก. และ ข. เป็นเท็จ

75. Sup'k-Pb 2.5 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $||x| + |y|| + ||x| - |y|| = |x + y| + |x - y|$

ข. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\frac{x + y - |x - y|}{2} \leq x \leq \frac{x + y + |x - y|}{2}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. และ ข. เป็นจริง 2) ก. เป็นจริง และ ข. เป็นเท็จ
3) ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นจริง 4) ก. และ ข. เป็นเท็จ

76. Sup'k-Pb 2.6 กำหนดการดำเนินการ $*$ บนเซตของจำนวนจริง เป็นไปตามกฎต่อไปนี้

ก. $2 * 2 = \frac{3}{2}$

ข. $2a * b = (a * b) + \frac{1}{2}$ ทุกจำนวนจริงบวก a และ b

ค. $a^2 * b = b^2 * a$ ทุกจำนวนจริงบวก a และ b

จงพิจารณาว่า $1 * 1$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1) 0

2) $\frac{1}{2}$

3) 1

4) $\frac{3}{2}$

77. Sup'k-Pb 2.7 กำหนดความสัมพันธ์ r_1 และ r_2 ดังต่อไปนี้

$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log_{2556} (2x + y) + xy = 3y + 3\}$

$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 4x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x + 8y + 5 = 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) $r_1 \cap r_2 = \emptyset$

2) $r_1 \subseteq r_2$

3) $r_2 \subseteq r_1$

4) $r_1 \cup r_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

78. Sup'k-Pb 2.8 ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$2 + \sqrt{2^{2x+y+1} - 16^x - 4^y} = \log_3 (x + y)$$

แล้ว $x^2 + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 3

2) 8

3) 15

4) 24

79. Sup'k-Pb 2.9 ให้ $A = \{x \mid 2^{x+3} > 4\}$

$B = \{x \mid 2 \cdot \log (x + 3) < \log (5x + 15)\}$ และ $C = \{x \in I \mid x \in A \cap B\}$ จงหา $n(P(C))$

ตอบ

80. Sup'k-Pb 2.10 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. มีจำนวนจริงบวก $a \neq b$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $a + \frac{1}{\sqrt{b}} = b + \frac{1}{\sqrt{a}}$

ข. มีจำนวนจริงบวก $a \neq b$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $a - \frac{1}{\sqrt{b}} = b - \frac{1}{\sqrt{a}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. และ ข. เป็นจริง

2) ก. เป็นจริง และ ข. เป็นเท็จ

3) ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นจริง

4) ก. และ ข. เป็นเท็จ

81. Sup'k-Pb 2.11 กำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$ ถ้า $\tan(2\theta) = \frac{m}{n}$ โดยที่ $m, n \geq 0$

แล้วข้อใดต่อไปนี้จะตรงกับค่าของ $\tan \theta$

- 1) $\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ 2) $\frac{n + \sqrt{n^2 + m^2}}{m}$ 3) $\frac{m}{n + \sqrt{n^2 + m^2}}$ 4) ไม่มีข้อใดถูกต้อง

82. Sup'k-Pb 2.12 จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ $p + q$

เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p + q$ หาร pq ลงตัว

ตอบ

83. Sup'k-Pb 2.13 กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก 100 จำนวนเรียงติดกัน

จงหาค่าน้อยที่สุดที่เป็นจำนวนเต็มของ $\sqrt{a_2 + a_3 + \dots + a_{99}} - \sqrt{a_1 + a_{100}}$

ตอบ

84. Sup'k-Pb 2.14 Find the value of $\cos \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \dots \cdot \cos \frac{32\pi}{65}$

จงหาค่าของ $\cos \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \dots \cdot \cos \frac{32\pi}{65}$

ตอบ

85. Sup'k-Pb 2.15 If $\tan x + \cot x = 2$,

then the value of $\sin x + \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x + \dots + \sin^{25} x + \cos^{25} x$

กำหนดให้ $\tan x + \cot x = 2$

จงหาค่าของ $\sin x + \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x + \dots + \sin^{25} x + \cos^{25} x$

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) ไม่มีข้อใดถูกต้อง

86. Sup'k-Pb 2.16 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC

ซึ่งมีด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a, b, c ตามลำดับ

ถ้า $b^2 + c^2 - bc = a^2$ และ $\frac{c}{b} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$ แล้ว $\tan B$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ

87. Sup'k-Pb 2.17 รูปสามเหลี่ยม ABC มี $\angle ACB$ กว้าง 45°

ให้ D เป็นจุดบนด้าน AC ซึ่งทำให้ $AD = (2 + 2\sqrt{3})DC$

ถ้า $\angle ACB$ กว้าง 60° แล้ว $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ

88. Sup'k-Pb 2.18 ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\sin (2A - B) + \sin (2B - C) + \sin (2C - A) = 0$$

แล้ว $\cos (2A - B) + \cos (2B - C) + \cos (2C - A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ

89. *Sup'k-Pb 2.19 กำหนดให้ $A = \left\{ \cos x + \cos y : \tan x \cdot \tan y = 2, x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right\}$

จงเขียนเซต A ในรูปของช่วง

ตอบ

90. *Sup'k-Pb 2.20 จงหาสามสิ่งอันดับ (a, b, p) ทั้งหมดซึ่ง a, b เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ และสอดคล้อง

$$\frac{a}{1+b} - \frac{b}{1+a} = \frac{p^2}{1+a+b+ab}$$

ตอบ

91. Sup'k-Pb 2.21 ในตารางข้างล่างนี้ ถ้าผลบวกของแต่ละแถว ผลบวกของแต่ละหลัก และผลบวกของแนวทแยงมุมทั้งสองเท่ากันหมด จงหาค่าของ $a + b + c + d + e + f$

a	b	6
c	d	e
f	7	2

ตอบ

92. Sup'k-Pb 2.22 ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $\log (x + 1) = 3 \log 2$ และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $2^y = \frac{1}{8}$ แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1

2) 2

3) 4

4) 5

93. Sup'k-Pb 2.23 กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $3^x = 2^{x^2}$ และ $B = \{2x \mid x \in A\}$ แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของเซต B มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ

94. Sup'k-Pb 2.24 กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์

ถ้า $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แล้วประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

- 1) $\sim(p \rightarrow s)$ 2) $p \wedge r$ 3) $\sim(r \rightarrow q)$ 4) $q \leftrightarrow s$

95. Sup'k-Pb 2.25 กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{3-2x}{1-|1-x|} \geq 0$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูก

- 1) $A' \cap [2, 3) \neq \emptyset$ 2) $A' \subset (-\infty, 0)$
3) $A \cap (1, 2) = \emptyset$ 4) $A \subset (1, \infty)$

96. Sup'k-Pb 2.26 จงหาผลบวกของสมาชิกใน A

เมื่อ $A = \{a \in I^+ \mid a \geq 3 \text{ และ } a - 2 \text{ เป็นตัวประกอบของ } 3a^2 - 2a + 10\}$

ตอบ

97. Sup'k-Pb 2.27 ให้ C_1, C_2 และ C เป็นวงกลมที่มีสมการ ดังนี้

$$C_1 : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

$$C : x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ถ้า C ผ่านจุดตัดของ C_1 กับ C_2 และผ่านจุด $(0, 0)$ จงหา $D + E + F$

ตอบ

98. Sup'k-Pb 2.28 ให้ C เป็นวงกลมที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 4$ และ l เป็นเส้นสัมผัสวงกลม C ที่จุดใน
จุดภาค (Quadrant) ที่ 1 และ l ผ่านจุด $(5, 0)$ จงหาความชันของ l

ตอบ

99. Sup'k-Pb 2.29 ถ้า F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-20)^2}{5} - \frac{(x+11)^2}{4} = 1$ แล้ว
ส่วนของเส้นตรง F_1F_2 มีความยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 1 หน่วย 2) 2 หน่วย 3) 3 หน่วย 4) 5 หน่วย

100. Sup'k-Pb 2.30 ให้ m เป็นคำตอบของสมการ $f(m) = \frac{1}{4}$ เมื่อ $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$ แล้ว

จงหา $4 \cdot f(m^2)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ

เฉลย

ชุดที่ 1

1. 1) 2. 4) 3. 4) 4. 3) 5. 1) 6. 3) 7. 2) 8. 3) 9. 2) 10. 1)
 11. 2) 12. 1) 13. 2) 14. 3) 15. 2) 16. 3) 17. 1) 18. 3) 19. 4) 20. 1)
 21. 3) 22. 4) 23. 3) 24. 2) 25. 1) 26. 3) 27. 1) 28. 4) 29. 3) 30. 3)
 31. 4) 32. 4) 33. 1) 34. 2) 35. 3)

ชุดที่ 2

- | | | |
|-------------------|-----------------------------------|---|
| 36. 1) | 37. 4) | 38. $(-1, \infty)$ |
| 39. 7 | 40. $\{-\sqrt{3}, 1 - \sqrt{2}\}$ | 41. 15 |
| 42. 3) | 43. 2) | 44. $\frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ |
| 45. 4) | 46. 3) | 47. 3) |
| 48. 2 | 49. 5 | 50. 3) |
| 51. 2) | 52. 1) | 53. 4) |
| 54. $\sqrt{3}$ | 55. 2) | 56. 4) |
| 57. $\frac{3}{2}$ | 58. 20 | 59. 13 |
| 60. 4) | 61. 2) | 62. 11 |
| 63. 4) | 64. $12\sqrt{3}$ ตารางหน่วย | 65. $\frac{25}{56}$ |
| 66. 21.79 | 67. 1) | 68. 2) |
| 69. 3) | 70. 130 | |

ชุดที่ 3

71. Sup'k-Pb 2.1 ตอบ 2)
 72. Sup'k-Pb 2.2 ตอบ $(-\infty, \log_2(\sqrt{2} - 1)] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$
 73. Sup'k-Pb 2.3 ตอบ $(-\infty, 0)$
 74. Sup'k-Pb 2.4 ตอบ 3)
 75. Sup'k-Pb 2.5 ตอบ 1)
 76. Sup'k-Pb 2.6 ตอบ 1)

77. Sup'k-Pb 2.7 ตอบ 3)
78. Sup'k-Pb 2.8 ตอบ 3)
79. Sup'k-Pb 2.9 ตอบ 4
80. Sup'k-Pb 2.10 ตอบ 3)
81. Sup'k-Pb 2.11 ตอบ 3)
82. Sup'k-Pb 2.12 ตอบ 4
83. Sup'k-Pb 2.13 ตอบ 66
84. Sup'k-Pb 2.14 ตอบ $\frac{1}{64}$
85. Sup'k-Pb 2.15 ตอบ 4)
86. Sup'k-Pb 2.16 ตอบ $\frac{1}{2}$
87. Sup'k-Pb 2.17 ตอบ 0
88. Sup'k-Pb 2.18 ตอบ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
89. Sup'k-Pb 2.19 ตอบ $\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$
90. Sup'k-Pb 2.20 ตอบ $(-3, 1, 2)$, $(-3, -2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, 2)$
91. Sup'k-Pb 2.21 ตอบ 12
92. Sup'k-Pb 2.22 ตอบ 3)
93. Sup'k-Pb 2.23 ตอบ 4
94. Sup'k-Pb 2.24 ตอบ 1)
95. Sup'k-Pb 2.25 ตอบ 1)
96. Sup'k-Pb 2.26 ตอบ 51
97. Sup'k-Pb 2.27 ตอบ -17.5
98. Sup'k-Pb 2.28 ตอบ $-\frac{2}{\sqrt{21}}$
99. Sup'k-Pb 2.29 ตอบ 4)
100. Sup'k-Pb 2.30 ตอบ 2

