

แบรนด์ 180 ปี

# พัฒนาสมอง พร้อมทุกสนามสอบ

O-NET, GAT-PAT กับ 24 ตัวเต๋อชื่อดังระดับประเทศ



BRANDS®

Summer Camp

ปีที่ 27

คณิตศาสตร์



[www.brandssummercamp.com](http://www.brandssummercamp.com)

<https://www.facebook.com/BRANDSWorldThailand>

# แบรนด์ 180 ปี



## พิศมมอง พร้อมทุกสนามสอบ O-NET, GAT-PAT กับ 24 ตัวเตอรืชื่อดังระดับประเทศ



### สุดยอดการทิวสท

- พิเศท เกืงข้อสอบก่ว 800 ข้อ
  - รอมสุดยอดทิวเตอรืชื่อดังระดับประเทศ
  - ทิวเซม 8 วิช 6 วันเทืม 4 ช่อทวง วันที่ 1-6 ตุลาคม 2558
1. ทิวสท ณ อาคารจกัรพืนรืพิญศิริ มหาวิทยาลัยเกษตรศทรศาสตร์ และส่งสัญญากนผ่านเครือช่ยอนทรืเนืท [www.ku.ac.th](http://www.ku.ac.th) ไปยังอืก 3 วิชเขต คือ นครปฐม ชลบุรี และสทลนคร
  2. ทิวพร้อมกันผ่านสัญญากนทวเทืยม
    - ภาคเหนือ คณะเภสัษศสทรศาสตร์ ม.เชยงใหม่
    - ภาคตะวันออกเชยงเหนือ คณะเภสัษศสทรศาสตร์ ม.ขอนแก่น
    - ภาคใต้ คณะแพทยศสทรศาสตร์ ม.สงขลานครินทร์ (ทวทไหญ)
    - และมหาวิทยาลัยราชกัฎ จ.ะเสลา
  3. ทิวผ่านสัญญากนทวเทืยมสามารถเข้าดูได้ที่ช่อทวงการรับชมสทณัทรืรทศัน
    - ทวเทืยม MCOT 1 (Live)
    - กล่อง GMM Z ช่อง 279
    - กล่อง PSI ช่อง 227
    - กล่อง True MPEG 4 ช่อง 78
    - กล่อง True MPEG 2 ช่อง 106
    - กล่อง CTH ช่อง 180
    - กล่อง Sun Box ช่อง 83
    - กล่อง Infosat ช่อง 245
  4. ทิวผ่านอินเทอรืเนตที่ <https://www.facebook.com/BRANDSWorldThailand>
  5. ดูยัอนหลังผ่านทวงสทณัฎวิชทรืรทศันการศึทกทวงไกลผ่านทวเทืยม สศทท. วังไกลกังวล ช่อง สศทท.14 วันที่ 15-20 ตุลาคม 2558

### BRANDS

### Summer Camp

ปีที่ 27

## ฟรี!! หนังสือเกืงข้อสอบ พีบีต O-NET, GAT-PAT

รับรหัสเพื่อทวณัฎไหลทหนังสือเกืงข้อสอบ  
แบรนด์ซัมเมอร์แคมป์ได้ที่

[www.brandssummerncamp.com](http://www.brandssummerncamp.com)



สอบครั้งสำคัญ...ทำให้เต็มที ลู ลู

# BRANDS 180 ปี



BRANDS®

Summer Camp

ปีที่ 27

## ขอขอบคุณ

คณะเภสัชศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่  
คณะเภสัชศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น  
คณะแพทยศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

ที่เป็นหนึ่งในการผลักดันและสร้างความสำเร็จทางการศึกษาให้แก่เยาวชนไทย

## เอกสารประกอบการบรรยาย

### วิชา คณิตศาสตร์

ส่วนที่ 1	(ONET).....โดย อ.อำนาจ มุจนานนท์ (อ.โต้ง).....	หน้า	2-56
ส่วนที่ 2	(PAT 1).....โดย อ.ศุภฤกษ์ สกุลชัยพรเลิศ (ครู sup'k).....	หน้า	57-178
ส่วนที่ 3	(PAT 1).....โดย อ.ณัฐพล ศุจิจันทร์รัตน์ (พีไอ).....	หน้า	179-221
ส่วนที่ 4	ชุดเก็งข้อสอบ.....	หน้า	222-240

[www.brandssummercamp.com](http://www.brandssummercamp.com)

<https://www.facebook.com/BRANDSWorldThailand>

แจกฟรี ห้ามจำหน่าย

ประสานงานอาจารย์และจัดพิมพ์โดย ชมรมบัณฑิตกเนนแวง



# BRANDS ซัมเมอร์แคมป์ ปีที่ 27



เอกสารประกอบคำบรรยาย  
วิชา **O NET**

## คณิตศาสตร์

โดย อ.อำนาจ มุจนานนท์ (อ.โต้ง)  
โรงเรียนกวดวิชาคณิตศาสตร์ อ.โต้ง

## เซต

### 1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเซต

#### 1.1 ความหมายของเซต

เซตเป็นนิยาม เราจะไม่ให้ความหมายของเซตว่าหมายถึงอะไร แต่เราจะใช้คำว่า “เซต” เพื่อบ่งบอกถึงกลุ่มของสิ่งต่างๆ โดยต้องทราบแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม และสิ่งใดไม่อยู่ในกลุ่มที่กล่าวถึง เช่น เซตของสระในภาษาอังกฤษ เซตของจำนวนนับ เซตของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ  $x^2 - 5x + 6 = 0$  เป็นต้น เราจะเรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า สมาชิกของเซต เช่น 4 เป็นสมาชิกของเซตจำนวนเต็มบวก เป็นต้น

#### 1.2 การเขียนเซต

การเขียนเซตนิยมใช้อักษร A, B, C, ... เขียนแทนเซต และใช้อักษร a, b, c, ... เขียนแทนสมาชิกของเซต มีวิธีเขียนเซตได้ 2 แบบ คือ

1.2.1 การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก การเขียนแบบนี้ จะเขียนสมาชิกทุกตัวในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา “{ }” โดยที่สมาชิกแต่ละตัวคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค “,”

เช่น เซตของสระในภาษาอังกฤษ เขียนแบบแจกแจงสมาชิก {a, e, i, o, u}

1.2.2 การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข การเขียนแบบนี้ จะเขียนโดยใช้ตัวแปร x, y หรือ z แทนสมาชิก หลังจากนั้นใช้เส้น “|” (อ่านว่า โดยที่) และต่อจากเส้นคั่นจะเป็นส่วนอธิบายเกี่ยวกับลักษณะของตัวแปรนั้นมีลักษณะอย่างไร

#### 1.3 สมาชิกของเซต

เราใช้สัญลักษณ์ “ $\in$ ” แทนคำว่า “เป็นสมาชิกของ” และใช้สัญลักษณ์ “ $\notin$ ” แทนคำว่า “ไม่เป็นสมาชิกของ” เช่น  $A = \{2, 5, 7, 9\}$  จะพบว่า  $2 \in A$ ,  $5 \in A$ ,  $6 \notin A$  เป็นต้น

#### 1.4 เขตจำกัด เขตอนันต์ และเซตว่าง

เซตจำกัด คือ เซตที่สามารถบอกได้แน่นอนว่ามีจำนวนสมาชิกเท่าใด  
เซตอนันต์ คือ เซตซึ่งไม่ใช่เซตจำกัด หรือ เซตซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนอนันต์  
เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\emptyset$  หรือ  $\{ \}$

ข้อสังเกต 1. การใช้สัญลักษณ์ ... ในการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก จะต้องแน่ใจว่าสมาชิกในตัวถัดไปเป็นตัวอะไร เช่น  $\{3, 5, 7, 9, \dots\}$  เราสามารถบอกได้ว่าสมาชิกที่อยู่ถัดจาก 9 นั้นเป็น 11, 13, 15 ไปเรื่อยๆ  
2. เซตว่างเป็นเซตจำกัด

#### 1.5 เอกภพสัมพัทธ์

เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตที่กำหนดขอบเขตสิ่งที่ต้องการศึกษา และใช้สัญลักษณ์  $U$  แทนเอกภพสัมพัทธ์

เช่น ถ้ากำหนด  $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  แสดงว่าจำนวนที่เราจะนำมาใช้ มี 5 ตัวเท่านั้น คือ  $-2, -1, 0, 1, 2$  สำหรับตัวอื่นเราจะไม่ใช่ ถ้ากำหนด  $U$  คือ เซตของจำนวนนับ แสดงว่าจำนวนที่เราจะนำมาใช้ คือ จำนวนนับทั้งหมด

ข้อสังเกต 1. เราจะใช้สัญลักษณ์  
I แทนเซตของจำนวนเต็ม  
N แทนเซตของจำนวนนับ  
Q แทนเซตของจำนวนตรรกยะ  
2. การเขียนเซตใดๆ เราจะต้องกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ทุกครั้ง ถ้าเซตใดไม่ได้กำหนดเอกภพสัมพัทธ์มาให้ ให้หมายถึงเซตนั้นมีเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง  
3. การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข เราอาจกำหนดเอกภพสัมพัทธ์อยู่ในเซต เช่น ถ้ากำหนดให้  $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ และ } x^2 - 3x - 4 = 0\}$  จะพบว่าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ( $\mathbb{R}$ ) การเขียนเซต  $A$  ดังกล่าวอาจเขียนได้หลายวิธีซึ่งมีความหมายเหมือนกันดังนี้  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$  หรือ  $\{x \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$

### 1.6 การเท่ากันของเซต

เซต A เท่ากับ เซต B ก็ต่อเมื่อ ทั้งสองเซตมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และเหมือนกันทุกตัว เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $A = B$

เช่น กำหนดให้  $A = \{0, 1, -1\}$  และ  $B = \{x \mid x^3 - x = 0\}$

เราสามารถเขียนเซต B แบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น  $B = \{0, 1, -1\} \therefore A = B$

### 1.7 การเทียบเท่ากันของเซต

เซต A เทียบเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ ทั้งสองเซตมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

เช่น กำหนดให้  $A = \{1, 4, 7\}$  และ  $B = \{x, y, z\}$

จะพบว่าจำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับจำนวนสมาชิกของ B  $\therefore$  เซต A เทียบเท่ากับเซต B

ข้อสังเกต 1. เซตใดที่มีสมาชิกในเซตซ้ำกันหรือเหมือนกันหลายตัว ให้ถือว่าสมาชิกนั้น เป็นสมาชิกตัวเดียวกัน และให้นับเป็น 1 ตัว

2. ถ้า  $A = B$  แล้วเซต A จะเทียบเท่ากับเซต B

3. ถ้าเซต A เทียบเท่ากับเซต B แล้ว A ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ B

### 1.8 ลับเซต

A เป็นลัษเซตของ B ก็ต่อเมื่อทุกๆ สมาชิกของ A จะต้องเป็นสมาชิกของ B เขียนแทน ด้วยสัญลักษณ์  $A \subset B$

สำหรับ “A ไม่เป็นลัษเซตของ B” จะใช้สัญลักษณ์  $A \not\subset B$  นั่นคือ  $A \not\subset B$  ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B

การเป็นลัษเซตสามารถแยกได้เป็น

1. เป็นลัษเซตแท้ เช่น A เป็นลัษเซตแท้ของ B จะได้ว่า  $A \subset B$  แต่  $B \not\subset A$
2. ไม่เป็นลัษเซตแท้ เช่น A ไม่เป็นลัษเซตแท้ของ B จะได้ว่า  $A \subset B$  แต่  $B \subset A$  ( $A = B$ )

#### 1) สมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับลัษเซต

กำหนด A, B เป็นเซตใดๆ

- (1) เซตว่างเป็นลัษเซตของทุกๆ เซต นั่นคือ  $\phi \subset A$
- (2) ทุกๆ เซตจะเป็นลัษเซตของตัวเองเสมอ นั่นคือ  $A \subset A$
- (3)  $A = B$  ก็ต่อเมื่อ  $A \subset B$  และ  $B \subset A$
- (4) ให้  $n(A)$  แทนจำนวนสมาชิกของ A แล้วจำนวนลัษเซตทั้งหมดของ A จะมี  $2^{n(A)}$  เซต

## 2) การหาสับเซตทั้งหมดของเซตจำกัด

กำหนดให้  $A$  เป็นเซตใดๆ การหาสับเซตทั้งหมดที่เป็นสับเซตของ  $A$  มีหลักการดังนี้  
เริ่มต้นด้วยเซตที่ไม่มีสมาชิก (เซตว่าง) จากนั้นหาสับเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว ที่นำมาจากเซต  $A$  และ  
สับเซตที่มีสมาชิก 2 ตัว, 3 ตัว ตามลำดับไปเรื่อยๆ จนถึงจำนวนสมาชิกของสับเซตที่เท่ากับจำนวนสมาชิกของ  
เซต  $A$

## 2. การดำเนินการบนเซต

### 2.1 เพาเวอร์เซต

เพาเวอร์เซต (Power Set) ของเซต  $A$  คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสับเซต  
ทั้งหมดของเซต  $A$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $P(A)$

$$\text{นั่นคือ } P(A) = \{x \mid x \subset A\}$$

$$\therefore x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$$

**ข้อสังเกต** การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขในส่วนของการบรรยายลักษณะของตัวแปรนั้น  
อาจเขียนได้หลายวิธี กล่าวคือ จะเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขในลักษณะอย่างไรก็ได้ เมื่อนำมา  
เขียนเป็นเซตแบบแจกแจงสมาชิกจะต้องเหมือนกัน

สมบัติเกี่ยวกับเพาเวอร์เซต

กำหนด  $A, B$  เป็นเซตใดๆ

(1)  $\phi \in P(A)$

(2)  $A \in P(A)$

(3)  $P(\phi) = \{\phi\}$

(4)  $P(A) \neq \phi$

(5) ให้  $n(A)$  แทนจำนวนสมาชิกของ  $A$  และ

$$n[P(A)] \text{ แทนจำนวนสมาชิกของเพาเวอร์ } A \text{ จะได้ว่า } n[P(A)] = 2^{n(A)}$$

(6)  $A \subset B$  ก็ต่อเมื่อ  $P(A) \subset P(B)$

## 2.2 อินเตอร์เซกชัน

อินเตอร์เซกชันของเซต A และ B หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นสมาชิกของทั้ง A และ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $A \cap B$   
นั่นคือ  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$   
 $\therefore x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \text{ และ } x \in B$

**ข้อสังเกต** การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขในส่วนของ การบรรยายลักษณะของตัวแปรนั้น อาจเขียนได้หลายวิธี กล่าวคือ จะเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขในลักษณะอย่างไรก็ได้ เมื่อนำมาเขียนเป็นเซตแบบแจกแจงสมาชิกจะต้องเหมือนกัน

### สมบัติของอินเตอร์เซกชัน

กำหนด A, B และ C เป็นเซตใดๆ

- (1)  $A \cap A = A$
- (2)  $A \cap B = B \cap A$
- (3)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (4)  $A \cap \phi = \phi \cap A = \phi$
- (5)  $A \cap U = U \cap A = A$

## 2.3 ยูเนียน

ยูเนียนของเซต A และเซต B หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ A หรือ B หรือทั้งสองเซตเขียนแทนด้วย  $A \cup B$   
นั่นคือ  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$   
 $\therefore x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \text{ หรือ } x \in B$

### สมบัติของยูเนียน

ถ้า A, B และ C เป็นเซตใดๆ

- (1)  $A \cup A = A$
- (2)  $A \cup B = B \cup A$
- (3)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- (4)  $A \cup \phi = \phi \cup A = A$
- (5)  $A \cup U = U \cup A = U$
- (6)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (7)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (8)  $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
- (9)  $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$



## 2.4 ผลต่างของคอมพลีเมนต์

ผลต่างของเซต A และ B หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A ที่ไม่เป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $A - B$

$$\text{นั่นคือ } A - B = \{x \mid x \in A \text{ แต่ } x \notin B\}$$

$$\therefore x \notin A - B \leftrightarrow x \in A \text{ แต่ } x \notin B$$

คอมพลีเมนต์ของเซต A หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของ A หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ผลต่างระหว่างเซต U กับ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $A'$

$$\text{นั่นคือ } A' = \{x \mid x \in U \text{ แต่ } x \notin A\} = U - A$$

$$\therefore x \in A' \leftrightarrow x \in U \text{ และ } x \notin A$$

### สมบัติของคอมพลีเมนต์

ถ้า A, B และ C เป็นเซตใดๆ

$$(1) (A')' = A$$

$$(2) \phi' = U$$

$$(3) U' = \phi$$

$$(4) A \cap A' = \phi$$

$$(5) A \cup A' = U$$

$$(6) A - B = A \cap B'$$

$$(7) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(8) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

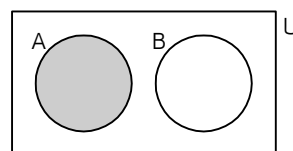
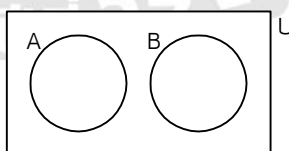
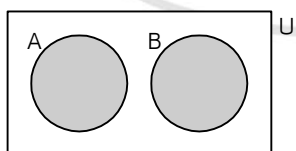
$$(9) \text{ ถ้า } A \subset B \text{ แล้ว } B' \subset A'$$

## 2.5 แผนภาพเวนน-ออยเลอร์

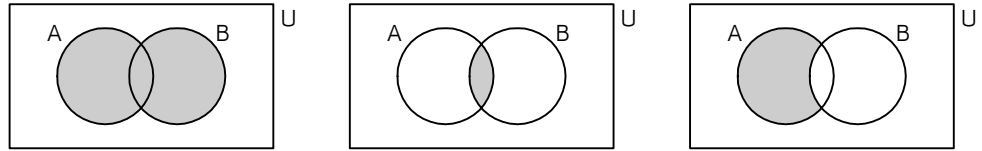
แผนภาพเวนน-ออยเลอร์ เป็นแผนภาพที่เขียนขึ้นเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซต นิยามเขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แทนเอกภพสัมพัทธ์ (U) และใช้รูปวงกลมหรือรูปวงรี แทนเซตในเอกภพสัมพัทธ์

การแรเงาแผนภาพเพื่อแสดงการยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และผลต่างของเซต A และเซต B

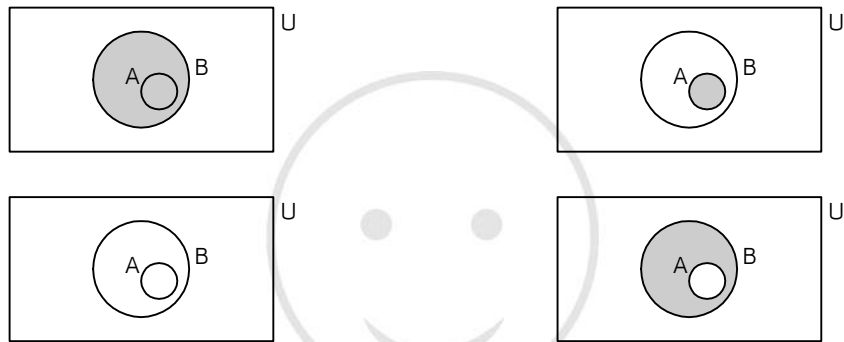
(1) ถ้า A และ B เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน



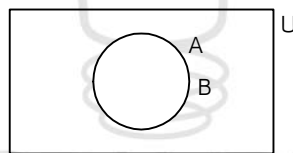
(2) ถ้า A และ B เป็นเซตที่มีสมาชิกบางตัวร่วมกัน และ  $A \not\subset B$ ,  $B \not\subset A$



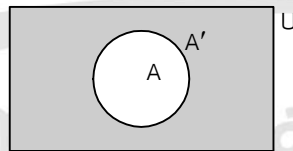
(3) ถ้า  $A \subset B$  และ  $A \neq B$



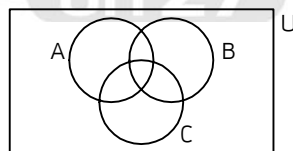
(4) ในกรณี  $A = B$  สามารถเขียนแผนภาพดังนี้



(5) การแรเงาแผนภาพแบบ A



(6) ถ้า A, B และ C เป็นเซตใดๆ สามารถเขียนแผนภาพดังนี้



### 3. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเซต

โจทย์ปัญหาที่ต้องนำเซตมาใช้ ส่วนใหญ่จะเป็นการหาจำนวนสมาชิกของเซต ถ้าเราให้  $A$  เป็นเซตจำกัด จำนวนเซตสมาชิกของ  $A$  เขียนแทนด้วย  $n(A)$  ก่อนอื่นจะต้องทำความเข้าใจ และต้องจำสูตรการหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้ให้ได้ เพื่อนำไปใช้ในการแก้โจทย์

กำหนด  $A, B$  และ  $C$  เป็นเซตจำนวนจำกัดใดๆ

$$1. n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$2. n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$3. n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$4. n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$$

$$5. n(A') = n(U) - n(A)$$

สำหรับสูตรข้างต้นนั้น สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้แผนภาพเวนน-ออยเลอร์ เข้าช่วย

## แบบทดสอบ

1. กำหนด  $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $H = \{a, b, d\}$ ,  $K = \{b, e, f\}$  และ  $L = \{a, c, f\}$

1.  $K \cup L = U$

2.  $H' \cap K' = \phi$

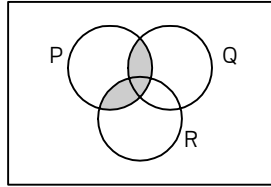
3.  $(K \cap L) \subset H$

4.  $(H \cup K) \subset U$

2. กำหนด  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{2, 3, 5\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ ,  $C = \{1, 3, 5\}$  และ  $D = \{1, 4\}$  จงหาเซตเมื่อแทนค่า  $X$  แล้วทำให้  $B \cap X = (C \cup D)'$  เป็นจริง

3. กำหนด P, Q, R เป็นเซตใดๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

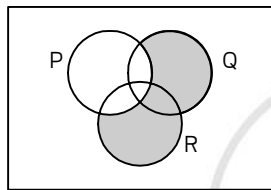
ก.



จากแผนภาพที่กำหนดให้

ส่วนที่แรเงา คือ เซต  $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$

ข.



จากแผนภาพที่กำหนดให้

ส่วนที่แรเงา คือ เซต  $(Q - P) \cup (R' \cup P)'$

4. ให้  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  แล้วจำนวนเซต X ซึ่ง  $X \subset A$  และ  $X \not\subset B$  เท่ากับเท่าใด

5. ถ้า  $A = \{2, a, 3, b, 4, c, 5\}$  และ  $B = \{a, b, c\}$  แล้วจำนวนเซต X ซึ่ง  $B \subset X \subset A$  เท่ากับเท่าใด

6. กำหนด  $A = \{2, x, 5, y, 8, z, 9\}$  :  $B = \{x, y, z\}$  แล้วจำนวนเซต  $X$  ซึ่ง  $X \subset A$  และ  $X \cap B \neq \phi$  เท่ากับเท่าใด

7. กำหนด  $n(A \cup B) = 15$  ,  $n(A - B) = 5$  และ  $n(B \cap A') = 7$  แล้ว  $n[P(A) \cap P(B)]$  เท่ากับเท่าใด

8. กำหนด  $A, B$  เป็นเซตใดๆ  $n(P(A)) = 32$  ;  $n[P(A) \cap P(B)] = 4$  และ  $n[P(B \cap A')] = 16$  แล้ว  $n(A \cup B)$  เท่ากับเท่าใด

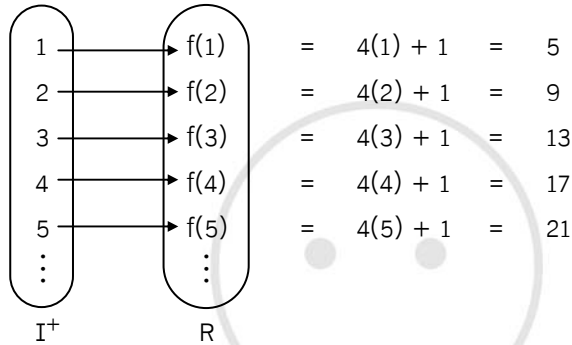


# ลำดับ และอนุกรม

## 1. ลำดับ

### 1.1 ความหมายของลำดับ

พิจารณาฟังก์ชัน  $f : I^+ \rightarrow R$  โดยกำหนด  $f(n) = 4n + 1$



ถ้านำค่าฟังก์ชันมาเรียงกันในลักษณะ ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccccc} f(1) & , & f(2) & , & f(3) & , & f(4) & , & f(5) & , & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 5 & , & 9 & , & 13 & , & 17 & , & 21 & , & \dots \end{array}$$

การเรียงลักษณะนี้เรียกว่า ลำดับ จะใช้สัญลักษณ์  $a_n$  แทน  $f(n)$  และเรียก  $a_n$  ว่า พจน์ที่  $n$  ของลำดับ หรือพจน์ทั่วไปของลำดับ

$$\begin{array}{l} \text{นั่นคือ } a_1 = f(1) = \text{พจน์ที่ 1 ของลำดับ} \\ a_2 = f(2) = \text{พจน์ที่ 2 ของลำดับ} \\ a_3 = f(3) = \text{พจน์ที่ 3 ของลำดับ} \\ \vdots \\ a_n = f(n) = \text{พจน์ที่ } n \text{ ของลำดับ} \end{array}$$

เรียกลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ว่าลำดับจำกัด และเรียก ลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ว่า ลำดับอนันต์ และอาจใช้สัญลักษณ์  $\{a_n\}$  แทนลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

## 1.2 ลำดับคณิต

ลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต  $\leftrightarrow a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 \dots = a_n - a_{n-1} = \dots$  ค่าคงที่ เรียกค่าคงที่ว่า ผลต่างร่วม ใช้สัญลักษณ์  $d$  แทนผลต่างร่วม

### พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

กำหนดลำดับเลขคณิต มีพจน์ที่  $1 = a_1$  และผลต่างร่วม  $= d$  จะได้

ลำดับ  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \dots, a_1 + (n - 1)d, \dots$   
 $(a_1) \quad (a_2) \quad (a_3) \quad (a_4) \quad (a_5) \quad (a_n)$

กำหนด  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต

$\therefore$  พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ  $a_n = a_1 + (n - 1)d$

## 1.3 ลำดับเรขาคณิต

ลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิต  $\leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots$  ค่าคงที่ เรียกค่าคงที่ว่า อัตราส่วนร่วม ใช้สัญลักษณ์  $r$  แทนอัตราส่วนร่วม

### พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

กำหนดลำดับเรขาคณิต มีพจน์ที่  $1 = a_1$  และอัตราส่วนร่วม  $= r$  จะได้

ลำดับ  $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, a_1r^4, \dots, a_1r^{(n-1)}, \dots$   
 $(a_1) \quad (a_2) \quad (a_3) \quad (a_4) \quad (a_5) \quad (a_n)$

กำหนด  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิต

$\therefore$  พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ  $a_n = a_1r^{(n-1)}$

## 1.4 ลำดับฮาร์มอนิก

ลำดับ  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับฮาร์มอนิก  
 $\leftrightarrow \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n} = \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต

หรือ จากนิยามสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

ลำดับ  $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots, \frac{1}{a_n} = \dots$  เป็นลำดับฮาร์มอนิก

$\leftrightarrow a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต \_\_\_\_\_ (\*)

จาก (\*) พจน์ที่  $n$  ของลำดับเลขคณิต  $= a_n = a_1 + (n - 1)d$

$\therefore$  พจน์ที่  $n$  ของลำดับฮาร์มอนิก  $= \frac{1}{a_1 + (n - 1)d}$

### 1.5 ลำดับอนันต์

กำหนดลำดับอนันต์  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

1. ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  (เป็นจำนวนจริง) จะได้ว่า ลำดับ \* เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ (Convergent) หรือลำดับลู่เข้า
2. ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  หาค่าไม่ได้ (มีค่าเป็น  $\infty$  หรือ  $-\infty$  หรือมีค่ามากกว่า 1 ค่า) จะได้ว่า ลำดับ \* เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ (Divergent) หรือลำดับลู่ออก

### 1.6 การหาลิมิตของลำดับ

การหาลิมิตของลำดับ สามารถหาได้โดยการเขียนกราฟแล้วดูแนวโน้มว่า  $a_n$  มีค่าเข้าใกล้ค่าใด แต่ถ้าโจทย์กำหนดพจน์ที่  $n$  ที่ยุ่งยาก ซึ่งยากต่อการเขียนกราฟ เราสามารถหาลิมิตของลำดับโดยใช้ทฤษฎีการหาลิมิต ซึ่งทฤษฎีมีดังนี้

ทฤษฎีการหาลิมิตของลำดับ

กำหนด  $c$  เป็นค่าคงที่ และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  (หาค่าได้)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$  (หาค่าได้)

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cL$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L + M$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L - M$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \cdot M$
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L}{M} ; M \neq 0$
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k = L^k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง และ  $L^k$  หาค่าได้
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } k > 0 \\ \infty & \text{เมื่อ } k < 0 \end{cases}$
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } |r| > 1 \\ \text{หาค่าไม่ได้} & \text{เมื่อ } |r| < 1 \end{cases}$



## ลำดับสลับ (Alternating Sequence)

กำหนดลำดับ

$$\left. \begin{array}{l} b_1, -b_2, b_3, -b_4, b_5, \dots, (-1)^{n+1} \cdot b_n \dots \\ \text{หรือ} \quad -b_1, b_2, -b_3, b_4, -b_5, \dots, (-1)^n \cdot b_n \dots \end{array} \right\}$$

เรียกลำดับที่มีแต่ละพจน์มีเครื่องหมายบวกและลบสลับกันว่า ลำดับสลับ

ให้  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot b_n$  หรือ  $(-1)^n \cdot b_n$

- ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  แล้วลำดับ \* เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ และมีลิมิตของลำดับเท่ากับ 0  
(  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  )
- ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = L$  ( $L \neq 0$ ) แล้วลำดับ \* เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์  
และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  หาค่าไม่ได้ (ไม่มีลิมิต)

## 2. ออนุกรม

### 2.1 สัญลักษณ์แทนการบวก และนิยามของอนุกรม

#### 1) สัญลักษณ์แทนการบวก

ใช้  $\Sigma$  เป็นสัญลักษณ์แทนการบวก อ่านว่า ซิกมา (Sigma) หรือ Summation

เช่น (1)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{100} = \sum_{i=1}^{100} a_i$

จุดเริ่มต้น  $\leftarrow$  จุดสิ้นสุด  $\leftarrow$   
 เริ่มต้นที่ 1  $\leftarrow$  สิ้นสุดที่ 100  $\leftarrow$

(2)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$

(3)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

สมบัติของ  $\Sigma$

กำหนด c เป็นค่าคงที่

1.  $\sum_{i=1}^n c = nc$

2.  $\sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i$

3.  $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

4.  $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$

ข้อควรจำ

$$1. \sum_{i=1}^n i = \sum n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{i=1}^n i^2 = \sum n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \sum_{i=1}^n i^3 = \sum n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

2) นิยามของอนุกรม

- |  |                 |
|--|-----------------|
| 1. กำหนด $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$         | เป็นลำดับจำกัด  |
| เรียก $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$        | ว่าอนุกรมจำกัด  |
| 2. กำหนด $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  | เป็นลำดับอนันต์ |
| เรียก $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$ | ว่าอนุกรมอนันต์ |

ผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรม

กำหนดอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$  ใช้สัญลักษณ์  $S_n$  แทน ผลบวก  $n$  พจน์แรก

ของอนุกรม

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

## 2.2 ออนุกรมเลขคณิต

ออนุกรมเลขคณิต เกิดจากการนำลำดับเลขคณิตมาบวกกัน นั่นคือ

ถ้า  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต

เรียก  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$  ว่าออนุกรมเลขคณิต

การหาผลอนุกรมเลขคณิตให้เขียนออนุกรมเลขคณิตของโจทย์ในบรรทัดแรก แล้วเขียนออนุกรมเลขคณิตเดิมโดยการเขียนกลับจากข้างหลังไปข้างหน้าในบรรทัดสอง โดยเรียงพจน์ให้ตรงกันทั้งสองบรรทัด แล้วนำออนุกรมทั้งสองบวกกันจะพบว่าแต่ละพจน์จะมีค่าเท่ากัน ซึ่งจะสะดวกต่อการหาผลบวก

$$\begin{array}{l} \text{ให้ (1)} \quad s = 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 \\ \text{(2)} \quad s = 41 + 37 + 33 + 29 + 25 + 21 + 17 + 13 + 9 + 5 \\ \hline \text{(1) + (2); } 2s = \underbrace{46 + 46 + 46 + 46 + 46 + 46 + 46 + 46 + 46 + 46}_{\text{มี 10 พจน์}} \end{array}$$

$$2s = 10 \times 46$$

$$s = \frac{10 \times 46}{2} = 230$$

ผลบวกออนุกรมนี้มีค่าเท่ากับ 230

### สูตรออนุกรมเลขคณิต

กำหนด  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$  เป็นออนุกรมเลขคณิตจะได้ว่า

- พจน์ที่  $n$  ของออนุกรมเลขคณิต คือ  $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- ผลบวก  $n$  พจน์แรกของออนุกรมเลขคณิต คือ  $s_n$  โดยที่

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d] \text{ หรือ} \\ s_n &= \frac{n}{2} [a_1 + a_n] \end{aligned}$$

### 2.3 ออนุกรมเรขาคณิต

ถ้า  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิต  
 เรียก  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$  ว่าอนุกรมเรขาคณิต

1) การหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

กำหนด  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต \_\_\_\_\_ \*

จากสูตร  $a_n = a_1 r^{n-1}$  ดังนั้น จาก \* จะได้ว่า

$$s_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} \quad \text{--- (1)}$$

$$(1) \times r ; \quad r s_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) - (2) ; (1 - r) s_n = a_1 + 0 - a_1 r^n$$

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{(1 - r)} ; r \neq 1$$

ในกรณี ที่  $r = 1$  จาก (1) จะได้ว่า  $s_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n \text{ พจน์}}$

$$s_n = n a_1$$

2) สูตรอนุกรมเรขาคณิต

กำหนด  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต

(1) พจน์ที่  $n$  ของลำดับเรขาคณิต คือ  $a_n = a_1 r^{n-1}$

(2) ผลบวก  $n$  พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ  $s_n =$  โดยที่

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{(1 - r)} = \frac{a_1(r^n - 1)}{(r - 1)} ; r \neq 1$$

$$s_n = n a_1 ; r = 1$$

## 2.4 ออนุกรมฮาร์โมนิก

ออนุกรมฮาร์โมนิก คือ การนำลำดับฮาร์โมนิกมาบวกกันและการหาผลบวก  $n$  พจน์แรกของออนุกรมฮาร์โมนิก ไม่มีสูตรในการหา แต่ถ้าต้องการหาผลบวกของออนุกรม เราสามารถทำได้โดย การบวกเลขธรรมชาติเท่านั้น

## 2.5 ออนุกรมอนันต์

กำหนดออนุกรมอนันต์  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$  \_\_\_\_\_ \*

ใช้สัญลักษณ์  $s_n$  แทนผลบวกย่อย  $n$  พจน์แรกของออนุกรมอนันต์ \* เราจะเรียกลำดับ  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$  ว่า ลำดับของผลบวกย่อยของออนุกรมอนันต์ \*

ขั้นตอนการหาผลบวกของออนุกรมอนันต์

1. หา  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$

2. หา  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  แล้วดูค่าลิมิต

(1) ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  (หาค่าได้) จะได้ว่าออนุกรม \* เป็นออนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกของออนุกรมอนันต์เท่ากับ  $s$

(2) ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  หาค่าไม่ได้ ( $\infty$  หรือ  $-\infty$  หรือมีค่ามากกว่า 1 ค่า) จะได้ว่าออนุกรมอนันต์ \* เป็นออนุกรมไดเวอร์เจนต์และไม่สามารถหาผลบวกของออนุกรมอนันต์ได้

## 2.6 ออนุกรมเลขคณิตอนันต์และออนุกรมเรขาคณิตอนันต์

1) ออนุกรมเลขคณิตอนันต์

กำหนดออนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  เป็นออนุกรมเลขคณิตอนันต์

จากสูตร  $s_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$

จะได้ว่า  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d]$

$\infty \begin{cases} 0 \text{ เมื่อ } a_1 = 0 \text{ และ } d = 0 \\ \text{หาค่าไม่ได้ เมื่อ } a_1 \neq 0 \text{ หรือ } d \neq 0 \end{cases}$

สรุปได้ว่า ออนุกรมเลขคณิตอนันต์ส่วนใหญ่เป็นออนุกรมไดเวอร์เจนต์ ยกเว้นออนุกรมเลขคณิตที่  $a_1 = 0$  และ  $d = 0$  [ $0 + 0 + 0 + \dots = 0$ ]

2) อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

กำหนดอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ \_\_\_\_\_ \*

เนื่องจาก  $a_n = a_1 r^{n-1}$  จาก \* สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + \dots \quad \text{_____ **}$$

จากสูตร 
$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)} ; r \neq 1$$

$$S_n = na_1 ; r = 1$$

เนื่องจาก 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } |r| < 1 \\ \text{หาค่าไม่ได้} & \text{เมื่อ } |r| > 1 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{a_1}{1-r} & \text{เมื่อ } |r| < 1 \\ \text{หาค่าไม่ได้} & \text{เมื่อ } |r| \geq 1 \end{cases}$$

สรุปเป็นสูตรได้ดังนี้

กำหนดอนุกรมเรขาคณิตอนันต์  $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots + a_1 r^{n-1} + \dots$

1. ถ้า  $|r| \geq 1$  จะได้อนุกรมเรขาคณิตอนันต์นี้เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ [หาผลบวกอนุกรมไม่ได้]

2. ถ้า  $|r| < 1$  จะได้อนุกรมเรขาคณิตอนันต์นี้เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และมีผลบวกของ

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ เขียนแทนด้วย  $s$  โดยที่  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

2.7 อนุกรมผลมเลขคณิตและเรขาคณิตอนันต์

กำหนด (1)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$  เป็นอนุกรมเลขคณิตอนันต์

และ (2)  $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิตอนันต์

จะเรียกอนุกรม  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + \dots + a_n b_n + \dots$  ว่า \_\_\_\_\_ \*

อนุกรมผลมเลขคณิตและเรขาคณิตอนันต์

อนุกรม \* เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และหาผลบวกอนุกรม \* ได้ เมื่ออนุกรมเรขาคณิตอนันต์

(2) มี  $|r| < 1$  เท่านั้น สำหรับการหาผลบวกอนุกรม \* ให้นำ  $r$  คูณในสมการ \* ได้สมการเป็น \*\* แล้วนำสมการทั้งสองมาลบกัน

2.8 ทฤษฎีการตรวจสอบอนุกรมอนันต์ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์หรืออนุกรมไดเวอร์เจนต์

1) อนุกรมพี

$$\text{กำหนดอนุกรม } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad \text{---}^*$$

และเรียก \* ว่า อนุกรมพี (P-series)

1. ถ้า  $P > 1$  จะได้ว่าอนุกรม \* เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
2. ถ้า  $P \leq 1$  จะได้ว่าอนุกรม \* เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

2) การทดสอบอนุกรมไดเวอร์เจนต์

$$\text{ทฤษฎี : ถ้าอนุกรม } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

การนำทฤษฎีนี้ไปใช้ เราจะนำส่วนกลับไปใช้โดยใช้หลักการที่ว่า  $P \rightarrow Q \equiv \sim Q \rightarrow \sim P$

$$\text{ถ้า } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ แล้ว อนุกรม } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์}$$

ข้อควรระวัง

ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  แล้ว อนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ยังสรุปไม่ได้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ ต้องใช้วิธีอื่นตรวจสอบ

3) การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน

$$\text{กำหนดอนุกรมอนันต์ } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

1. ถ้า  $L < 1$  จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
2. ถ้า  $L > 1$  จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
3. ถ้า  $L = 1$  จะได้ว่า  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ยังไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์ ต้องใช้วิธีอื่นตรวจสอบ

## แบบทดสอบ

- ถ้าพจน์ที่ 3 พจน์ที่ 4 และพจน์ที่ 5 ของลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งเป็น 164, 146, 128 ตามลำดับ ถ้าพจน์สุดท้ายของลำดับนี้ เป็น  $-322$  จงหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์  
1) 20 พจน์                      2) 25 พจน์                      3) 30 พจน์                      4) 35 พจน์
- ถ้า  $a - 1$ ,  $a + 1$ ,  $a + 5$  เป็น 3 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่ง ถ้าพจน์สุดท้ายของลำดับนี้เป็น 1024 จงหาว่าลำดับนี้มีกี่พจน์  
1) 8 พจน์                      2) 9 พจน์                      3) 10 พจน์                      4) 11 พจน์
- ถ้าผลบวกของ 3 พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตซึ่งเรียงจากน้อยไปหามากเป็น 117 และมีผลคูณเป็น 19,683 จงหาพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้  
1) 243                      2) 343                      3) 572                      4) 729
- ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งผลต่างของพจน์ที่ 19 และพจน์ที่ 20 เป็น 8 ถ้าพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้เป็น 48 จงหาผลบวก 3 พจน์แรกของลำดับนี้  
1) 106                      2) 116                      3) 216                      4) 316



5. กำหนด  $a$ ,  $b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $25$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $37$  เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต จงหา  $a + b + c$
- 1) 90                      2) 91                      3) 92                      4) 93

6. กำหนด  $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  จงหา  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- 1) -1                      2) 1                      3) -2                      4) 2

7. จงหาขีดจำกัดของลำดับ  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$
- 1) 0                      2)  $\frac{1}{2}$                       3) 1                      4) 2

8. กำหนด  $n \in \mathbb{I}^+$  และ  $1 + \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \log_{\sqrt[4]{2}} 2 + \dots + \log_{\sqrt[n]{2}} 2 = n^2 - 28$  แล้ว  
จงหา  $n^2 + 1$
- 1) 26                      2) 37                      3) 50                      4) 65

9. จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรม  ${}_3\log_3 1 + {}_3\log_3 2 + {}_3^2\log_3 2 + {}_3^3\log_3 2 + \dots$
- 1) 1024                      2) 1023                      3) 1022                      4) 1021

10. ลำดับหนึ่งมี  $a_n = \begin{cases} n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \\ 2^{-n/2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \end{cases}$  จงหา  $\sum_{n=1}^{101} a_n$

1)  $(50)^2 + 2^{50} - 1$

2)  $(50)^2 - \frac{2^{50} - 1}{2}$

3)  $(51)^2 + \frac{2^{50} - 1}{2}$

4)  $(51)^2 + \frac{2^{50} - 1}{2^{50}}$

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}$  มีค่าตรงกับข้อใด

1) 0

2) 1

3) 2

4) 3

12. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ แล้วอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ข. ถ้าอนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

ข้อใดต่อไปนี้จริง

1) ข้อ ก. และข้อ ข. จริง

2) ข้อ ก. และข้อ ข. ไม่จริง

3) ข้อ ก. จริงข้อเดียว

4) ข้อ ข. จริงข้อเดียว

13. ลำดับในข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

1)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n+1}, \dots$

2)  $5, 5, 5, \dots, 5, \dots$

3)  $2, -2, 2, -2, 2, \dots$

4)  $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$

14. กำหนด  $f(x) = x - 2$  และ  $g(x) = 3x + 1$  ถ้า  $F(x) = (g \circ f)(x)$  และ  $F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(n) = 530$  จงหา  $n$

- 1) 10                      2) 15                      3) 20                      4) 25

15. จงหาผลบวกของอนุกรม  $0 + 7 + 26 + 63 + \dots + 999$

- 1) 3015                      2) 3020                      3) 3025                      4) 3030

16. ผลบวกตั้งแต่พจน์ที่ 5 ถึงพจน์ที่ 20 ของอนุกรม  $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + \dots + (2n - 1)(2n) + \dots$

- 1) 10,960                      2) 11,060                      3) 11,160                      4) 11,260

17. กำหนดให้  $S = \{51, 52, 53, \dots, 150\}$  จงหาผลบวกของสมาชิกของ  $S$  ที่ 2หารลงตัวแต่ 3หารไม่ลงตัว

- 1) 3316                      2) 3317                      3) 3318                      4) 3319

18. จงหาลิมิตของลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม  $1 + \frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{10}{125} + \frac{15}{625} + \dots$

- 1)  $\frac{64}{125}$                       2)  $\frac{125}{64}$                       3)  $\frac{16}{125}$                       4)  $\frac{125}{16}$

19. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$  ถ้าลำดับหนึ่งมี  $a_n = \det \left( \left( \frac{1}{2}A \right)^n \right)$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  มีค่าตรงกับข้อใด
- 1) 0                      2) 1                      3) 2                      4) 3

20. ค่าของ  $\frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{10 \times 11} + \dots + \frac{1}{119 \times 120}$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
- 1)  $\frac{7}{58}$                       2)  $\frac{7}{59}$                       3)  $\frac{7}{60}$                       4)  $\frac{7}{61}$

21. จงหาผลบวกของอนุกรม  $1 + 0.2 + 0.034 + 0.00034 + 0.0000034 + \dots$
- 1)  $1 \frac{116}{495}$                       2)  $1 \frac{116}{990}$                       3)  $1 \frac{232}{999}$                       4)  $\frac{232}{495}$

22. กำหนด  $a_n$  เป็นพจน์ที่  $n$  ของลำดับหนึ่ง เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$  ถ้า  $a_1 = \frac{2}{3}$  และ  $a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n$  แล้ว  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้
- 1)  $\frac{2}{3}$                       2)  $\frac{3}{2}$   
 3) 2                      4) เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

23. กำหนด  $a_n$  เป็นพจน์ที่  $n$  ของลำดับเรขาคณิตโดยมี  $r$  เป็นอัตราส่วนร่วม ถ้า  $\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_3}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} = 2n$  แล้ว  $r$  มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้
- 1)  $-\frac{1}{2}$                       2)  $\frac{1}{2}$                       3)  $-2$                       4)  $2$

24. ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง และ  $a = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}\dots}}$  และ  $b = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}\dots}}$  และถ้า  $a, b, c$  เรียงเป็นลำดับเลขคณิตแล้วจงหา  $c^2 + 1$
- 1) 37                      2) 50                      3) 65                      4) 82

25. ถ้าอนุกรม  $1 + \frac{2^x}{1+2^x} + \frac{2^{2x}}{(1+2^x)^2} + \frac{2^{3x}}{(1+2^x)^3} + \dots = 9$  จงหาค่า  $x^2 + 1$
- 1) 7                      2) 8                      3) 9                      4) 10

เฉลยแบบทดสอบลำดับ และอนุกรม

- |            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1. ตอบ 3)  | 2. ตอบ 3)  | 3. ตอบ 4)  | 4. ตอบ 3)  | 5. ตอบ 4)  |
| 6. ตอบ 2)  | 7. ตอบ 3)  | 8. ตอบ 4)  | 9. ตอบ 2)  | 10. ตอบ 4) |
| 11. ตอบ 1) | 12. ตอบ 4) | 13. ตอบ 3) | 14. ตอบ 3) | 15. ตอบ 1) |
| 16. ตอบ 1) | 17. ตอบ 1) | 18. ตอบ 2) | 19. ตอบ 1) | 20. ตอบ 3) |
| 21. ตอบ 1) | 22. ตอบ 3) | 23. ตอบ 1) | 24. ตอบ 2) | 25. ตอบ 4) |

# สถิติ

## 1. ความหมายของคำศัพท์ต่างๆ ในวิชาสถิติ

### 1.1 สถิติ มีความหมายกว้างๆ อยู่ 2 ประการ คือ

ประการ 1 สถิติ หมายถึง ข้อเท็จจริงที่เป็นตัวเลข หรือตัวอักษรที่เก็บรวบรวมมาได้ เช่น สถิติปริมาณน้ำฝน สถิติจำนวนอุบัติเหตุ สถิติผู้ป่วยโรคมะเร็ง เป็นต้น

ประการ 2 สถิติ หมายถึง ศาสตร์แขนงหนึ่งที่เป็นทั้งวิทยาศาสตร์และศิลปะ ว่าด้วยการศึกษาที่เกี่ยวกับข้อมูล ซึ่งประกอบด้วย การเก็บรวบรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล การวิเคราะห์ข้อมูล และการตีความหมายของข้อมูล

### 1.2 ประชากร

หมายถึง เซตของสิ่งต่างๆ ที่ต้องการศึกษาทั้งหมด คำว่า ประชากรเปรียบเสมือนกับเอกภพสัมพัทธ์ในเรื่องเซตนั่นเอง

### 1.3 ตัวอย่าง

หมายถึง ส่วนหนึ่งของประชากร และเป็นส่วนที่นำมาหาข้อมูล

### 1.4 พารามิเตอร์

หมายถึง ค่าตัวเลขที่คำนวณได้จากประชากร เช่น ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ( $\mu$ ) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ( $\sigma$ ) สัดส่วน ( $p$ ) เป็นต้น

### 1.5 ค่าสถิติ

หมายถึง ค่าตัวเลขที่คำนวณได้จากตัวอย่าง เช่น ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ( $\bar{x}$ ) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) สัดส่วน ( $\hat{p}$ ) ในทางปฏิบัติการหาค่าสถิติเพื่อนำค่าสถิตินี้ไปทดสอบด้วยวิธีการทางสถิติแล้วนำไปสรุปผลเป็นพารามิเตอร์

### 1.6 ข้อมูลสถิติ

หมายถึง ตัวเลขหรือข้อความ แสดงให้เห็นข้อเท็จจริงเกี่ยวกับเรื่องที่จะศึกษา “สำหรับข้อมูลเพียงหน่วยเดียวไม่ถือว่าเป็นสถิติ”

### 1.7 ค่าจากการสังเกต

คือ ค่าแต่ละค่าที่ได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูล เช่น ถ้าข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้ประกอบด้วย 3, 5, 6, 8, 9, 11 ตัวเลขแต่ละตัวเรียกว่า ค่าจากการสังเกต กล่าวคือ ตัวเลข 5 เรียกว่าค่าจากการสังเกตตัวหนึ่งของข้อมูล

## 2. การเก็บรวบรวมข้อมูล

### 2.1 แหล่งที่มาของข้อมูล

#### 2.1.1 แหล่งปฐมภูมิ

เป็นแหล่งที่เกิดข้อมูลโดยตรง กล่าวคือ ข้อมูลที่ผู้ใช้จะต้องเก็บรวบรวมข้อมูลจากผู้ให้ข้อมูล เรียกข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากแหล่งนี้ว่า ข้อมูลปฐมภูมิ

#### 2.1.2 แหล่งทุติยภูมิ

เป็นแหล่งที่มีผู้รวบรวมไว้แล้ว ไม่ใช่จากกำเนิดข้อมูลโดยตรง ผู้เก็บรวบรวมข้อมูลเพียงแต่ไปทำการคัดลอกข้อมูลที่ต้องการมาจากแหล่งนี้เท่านั้น ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้เรียกว่า ข้อมูลทุติยภูมิ

## 2.2 ชนิดของข้อมูล

2.2.1 จำแนกตามปริมาณ ได้แก่ ข้อมูลที่แสดงถึงข้อเท็จจริงของหน่วยตัวอย่าง ตามปริมาณที่วัดได้เป็นตัวเลข และมีหน่วยแน่นอน เช่น สถิติจำนวนการตายจากอุบัติเหตุทางรถยนต์จำแนกตามอายุ สถิติจำนวนนักเรียนของโรงเรียนศิริพานนท์ แยกตามอายุ หรือความสูง เป็นต้น

2.2.2 จำแนกตามคุณภาพ ได้แก่ ข้อมูลที่แสดงถึงข้อเท็จจริงของหน่วยตัวอย่าง ตามลักษณะคุณสมบัติฐานะที่ไม่อาจวัดเป็นตัวเลขได้ หรือถ้าข้อมูลเป็นตัวเลข ตัวเลขนั้นจะไม่ให้ความหมายในเชิงปริมาณ เช่น สถิติผู้ป่วยในโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง จำแนกตามโรคต่างๆ เป็นต้น

2.2.3 จำแนกตามกาลเวลา ได้แก่ ข้อมูลที่แสดงถึงข้อเท็จจริงของหน่วยตัวอย่าง ตามเวลาที่เปลี่ยนแปลงซึ่งเรียกข้อมูลประเภทนี้ว่า ข้อมูลอนุกรมเวลา เช่น สถิติมูลค่าการขายสินค้าของบริษัทแห่งหนึ่งในแต่ละปี เป็นต้น

2.2.4 จำแนกตามสภาพภูมิศาสตร์ หรือภูมิภาค ได้แก่ ข้อมูลที่แสดงข้อเท็จจริงของหน่วยตัวอย่าง โดยยึดถือลักษณะทางภูมิศาสตร์เป็นเกณฑ์ เช่น สถิติเกี่ยวกับปริมาณการผลิตข้าวแยกตามภาคต่างๆ ในประเทศไทย เป็นต้น

## 2.3 วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล

วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ กระบวนการที่จะให้ได้ข้อมูลมาเพื่อตอบสนองวัตถุประสงค์ของการศึกษาข้อมูลเรื่องหนึ่งเรื่องใด ผู้ศึกษาข้อมูลต้องการซึ่งข้อมูลนั้นอาจจะเป็นตัวเลขหรือไม่เป็นตัวเลขก็ได้แล้วแต่ลักษณะของข้อมูลนั้น

## 3. การนำเสนอข้อมูล

การนำเสนอข้อมูล คือ การแสดงข้อมูลที่รวบรวมมาได้ให้เข้าใจโดยง่าย และเพื่อนำไปวิเคราะห์ทางสถิติ การนำเสนอข้อมูลนิยมใช้กันทั่วไปมี 2 แบบ คือ

### 3.1 การนำเสนอข้อมูลอย่างไม่เป็นแบบแผน

การนำเสนอข้อมูลอย่างไม่เป็นแบบแผน เป็นการนำเสนอข้อมูลที่ไม่จำเป็นต้องระวางให้ถูกกฎเกณฑ์มากนักที่ใช้กันมากมี 2 วิธี

3.1.1 การนำเสนอข้อมูลในรูปของบทความ หรือข้อความ

3.1.2 การนำเสนอข้อมูลในรูปของความถี่ตาราง

### 3.2 การนำเสนอข้อมูลอย่างเป็นแบบแผน

การนำเสนอข้อมูลอย่างเป็นแบบแผน เป็นการนำเสนอข้อมูลที่มีกฎเกณฑ์ ซึ่งจะต้องปฏิบัติตามมาตรฐานที่กำหนดไว้เป็นแบบอย่างการนำเสนอข้อมูลโดยวิธีที่สำคัญ ได้แก่ การนำเสนอข้อมูลในรูปตาราง การนำเสนอข้อมูลในรูปแผนภูมิและแผนภาพ และการนำเสนอข้อมูลในรูปกราฟเส้น

3.2.1 การนำเสนอข้อมูลในรูปตาราง มีกฎเกณฑ์ที่ต้องปฏิบัติตามโดยตารางที่จัดทำต้องมี ส่วนประกอบที่สำคัญ ได้แก่ หมายเลขตาราง ชื่อตาราง หัวเรื่อง ตัวเรื่อง ต้นขั้ว และแหล่งข้อมูล นอกจากนี้ อาจมีหมายเหตุโดยเขียนเป็นข้อความอยู่ใต้ชื่อเรื่องลักษณะที่ง่ายต่อการเข้าใจมากที่สุด โดยทั่วไปตารางสถิติ แบ่งออกได้เป็น 4 ชนิด

3.2.1.1 ตารางแสดงความถี่ หรือตารางแจกแจงความถี่เป็นตารางที่มีตัวเรื่องแสดงความถี่ของข้อมูล

3.2.1.2 ตารางทางเดียว เป็นตารางที่มีการจำแนกรายการบนหัวเรื่อง หรือต้นขั้วเพียง ด้านเดียว

3.2.1.3 ตารางสองทาง เป็นตารางที่มีการจำแนกรายการบนหัวเรื่อง และต้นขั้วทั้งสองด้าน

3.2.1.4 ตารางหลายทาง เป็นรายการที่มีการจำแนกรายการบนหัวเรื่อง และต้นขั้วให้ ย่อยไปอีกจากตารางสองทาง

### 3.2.2 การนำเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิ และแผนภาพ

3.2.2.1 แผนภูมิแท่ง (Bar Chart) เป็นแผนภูมิที่ประกอบด้วยแท่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวแต่ละรูปแปรตามขนาดของข้อมูล เมื่อความกว้างของทุกรูปเท่ากันหมด นิยามเรียกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าชนิดนี้ว่า แท่ง (Bar) การนำเสนอข้อมูลชนิดนี้อาจเรียงตามแนวนอน หรือแนวตั้งก็ได้ แผนภูมิแท่งออกเป็น 6 ชนิดที่สำคัญ คือ

3.2.2.1.1 แผนภูมิแท่งเชิงเดี่ยว คือ แผนภูมิแท่งที่แสดงการเปรียบเทียบ ลักษณะของข้อมูลที่น่าสนใจ ศึกษาเพียงชุดเดียว

3.2.2.1.2 แผนภูมิแท่งเชิงซ้อน คือ แผนภูมิแท่งที่แสดงการเปรียบเทียบ ลักษณะของข้อมูลที่สนใจ ศึกษาตั้งแต่สองลักษณะหรือ 2 ช่วงเวลาขึ้นไป

3.2.2.1.3 แผนภูมิแท่งเชิงประกอบ คือ แผนภูมิแท่งที่ใช้แสดงรายละเอียด ส่วนย่อยของข้อมูลที่นำเสนอ

3.2.2.1.4 แผนภูมิแท่งบวก-ลบ คือ แผนภูมิแท่งที่ใช้แสดงการเปรียบเทียบ ข้อมูลที่มีค่าเป็นไปได้ ทั้งค่าบวกและค่าลบ

3.2.2.1.5 แผนภูมิแท่งซ้อนกัน คือ แผนภูมิแท่งเชิงซ้อน เพียงแต่ให้แท่งซ้อน เหลื่อมกัน ทั้งนี้เพื่อประหยัดเนื้อที่ในการนำเสนอด้วย

3.2.2.1.6 แผนภูมิแท่งพีรามิด คือ แผนภูมิแท่งที่เรียงซ้อนกันเป็นรูป สามเหลี่ยม

3.2.2.2 แผนภูมิรูปวงกลม (Pie Chart) แผนภูมิที่แสดงด้วยรูปวงกลม โดยแสดง ข้อมูลที่เราสนใจศึกษา นิยมแสดงในรูปร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์ กล่าวคือ ให้พื้นที่ของรูปวงกลมแทนจำนวน ข้อมูลทั้งหมด หลังจากนั้นแบ่งพื้นที่ออกตามสัดส่วนของลักษณะของข้อมูลแต่ละประเภท โดยแบ่งมุมที่ จุดศูนย์กลางของรูปวงกลม ซึ่งผลรวมของมุมเหล่านี้ต้องเท่ากับ 360 องศา บางครั้งเรียกแผนภูมิรูปวงกลมว่า แผนภูมิกง ก็ได้



3.2.2.3 แผนภูมิรูปภาพ (Pictogram) คือ แผนภูมิที่แสดงข้อมูลโดยใช้รูปภาพ รูปภาพที่นำเสนออาจเป็นรูปที่สมบูรณ์หรือไม่ก็ได้ โดยรูปที่ไม่สมบูรณ์จะแสดงปริมาณเป็นสัดส่วนของปริมาณ เมื่อเปรียบเทียบรูปที่สมบูรณ์ เช่น รูปภาพรถยนต์ 1 คัน แทนรถยนต์ที่นำเสนอ 1 พันคัน และรูปรถยนต์ เครื่องคัน แทนรถยนต์ 500 คัน เป็นต้น

3.2.3 การนำเสนอข้อมูลโดยใช้กราฟเส้น นิยมใช้กับข้อมูลอนุกรมเวลา ซึ่งเป็นข้อมูลที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่ข้อมูลนั้นเกิดขึ้น และสามารถนำมาใช้ประโยชน์ในการพยากรณ์ข้อมูลในอนาคตได้อีก ด้วย การนำเสนอข้อมูลโดยใช้กราฟเส้นมี 5 ชนิด คือ

3.2.3.1 กราฟเส้นเชิงเดี่ยว คือ กราฟที่แสดงการเปรียบเทียบข้อมูลเพียงลักษณะเดียว

3.2.3.2 กราฟเส้นเชิงซ้อน คือ กราฟที่แสดงการเปรียบเทียบข้อมูลตั้งแต่ 2 ลักษณะขึ้นไป

3.2.3.3 กราฟเส้นเชิงประกอบ คือ กราฟที่แสดงรายละเอียดส่วนย่อยของข้อมูลในช่วงเวลาต่างๆ กัน ที่ต้องการเปรียบเทียบ

3.2.3.4 กราฟตุล คือ กราฟที่แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างระหว่างลักษณะของข้อมูลสองลักษณะหรือมากกว่าที่มีความสัมพันธ์กัน

3.2.3.5 กราฟกึ่งลอการิทึม เป็นกราฟที่มีมาตราส่วนบนแกน x และแกน y ไม่เท่ากัน กล่าวคือ มาตราส่วนบนแกน x เป็นมาตราส่วนเลขคณิต มาตราส่วนบนแกน y เป็นมาตราส่วนลอการิทึม กราฟลักษณะนี้ไม่ค่อยนิยมกัน

#### 4. การแจกแจงความถี่ของข้อมูล

##### 4.1 ความหมายการแจกแจงความถี่ของข้อมูล

การแจกแจงความถี่ของข้อมูล คือ การจัดข้อมูลที่มีจำนวนมาก และยังไม่เป็นระเบียบแบบแผน เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ข้อมูล การแจกแจงความถี่ของข้อมูล สามารถแบ่งได้ 2 ลักษณะ คือ

4.1.1 การแจกแจงความถี่ของข้อมูลที่ไม่ได้จัดเป็นหมวดหมู่

4.1.2 การแจกแจงความถี่ของข้อมูลที่ได้จัดเป็นหมวดหมู่ (เป็นอันตรภาคชั้น)

ในหัวข้อการแจกแจงความถี่ของข้อมูล ต้องรู้จักคำศัพท์ต่างๆ ดังต่อไปนี้

- 1) ความถี่ คือ จำนวนของข้อมูลนั้น หรือค่าที่บ่งบอกประมาณนั้น ใช้สัญลักษณ์  $f$  แทนความถี่
- 2) ความถี่สะสมของข้อมูลใด คือ ผลรวมของความถี่ของข้อมูลนั้น กับความถี่ของข้อมูลที่น้อยกว่าทั้งหมด (หรือความถี่ของข้อมูลทั้งหมด)
- 3) ความถี่สัมพัทธ์ คือ ความถี่ของข้อมูลนั้นหารด้วยผลรวมของความถี่ทั้งหมด
- 4) อันตรภาคชั้น คือ การแบ่งค่าสังเกตออกเป็นช่วงๆ
- 5) ขีดจำกัดล่าง คือ ค่าต่ำสุดของอันตรภาคชั้นนั้น
- 6) ขีดจำกัดบน คือ ค่าสูงสุดของอันตรภาคชั้นนั้น
- 7) ขอบเขตล่างของอันตรภาค คือ ค่ากึ่งกลางระหว่างขีดจำกัดล่างของอันตรภาคชั้นนั้น กับขีดจำกัดบนของอันตรภาคชั้นที่มีคะแนนต่ำกว่าที่อยู่ถัดไป

8) ขอบเขตบนของอันตรภาค คือ ค่ากึ่งกลางระหว่างขีดจำกัดบนของอันตรภาคชั้นนั้น กับ ขีดจำกัดล่างของอันตรภาคชั้นที่มีคะแนนสูงกว่าที่อยู่ถัดไป

9) ความกว้างของอันตรภาคชั้น คือ ผลต่างระหว่างขอบเขตบน และขอบเขตล่างของชั้น นั้น หรือผลต่างระหว่างขีดจำกัดล่างของชั้นที่อยู่ติดกัน หรือผลต่างระหว่างขีดจำกัดบนของชั้นที่อยู่ติดกัน

10) ค่ากึ่งกลางของอันตรภาคชั้น หรือจุดกึ่งกลางชั้น  
จุดกึ่งกลางชั้นของอันตรภาคชั้น (จุดกึ่งกลางชั้น)

คือ  $\frac{\text{ผลบวกของขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของอันตรภาคชั้นนั้น}}{2}$

หรือ  $\frac{\text{ผลบวกของขีดจำกัดล่างและขอบเขตบนของอันตรภาคชั้นนั้น}}{2}$

#### ข้อสังเกต

การหาขอบเขตชั้นจากตารางแจกแจงความถี่ ให้รวดเร็วมีข้อสังเกตดังนี้

1. ถ้าข้อมูลเป็นจำนวนเต็ม

ขอบเขตล่าง = ขีดจำกัดล่าง - 0.5 ; ขอบเขตบน = ขีดจำกัดบน + 0.5

2. ถ้าข้อมูลเป็นทศนิยม 1 ตำแหน่ง

ขอบเขตล่าง = ขีดจำกัดล่าง - 0.05 ; ขอบเขตบน = ขีดจำกัดบน + 0.05

3. ถ้าข้อมูลเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง

ขอบเขตล่าง = ขีดจำกัดล่าง - 0.005 ; ขอบเขตบน = ขีดจำกัดบน + 0.005

การหาจุดกึ่งกลางจากตารางแจกแจงความถี่ให้รวดเร็ว มีดังนี้

1. หาจุดกึ่งกลางของชั้นแรก

2. นำความกว้างของอันตรภาคชั้น + จุดกึ่งกลางชั้นแรก จะได้จุดกึ่งกลางชั้นถัดไป

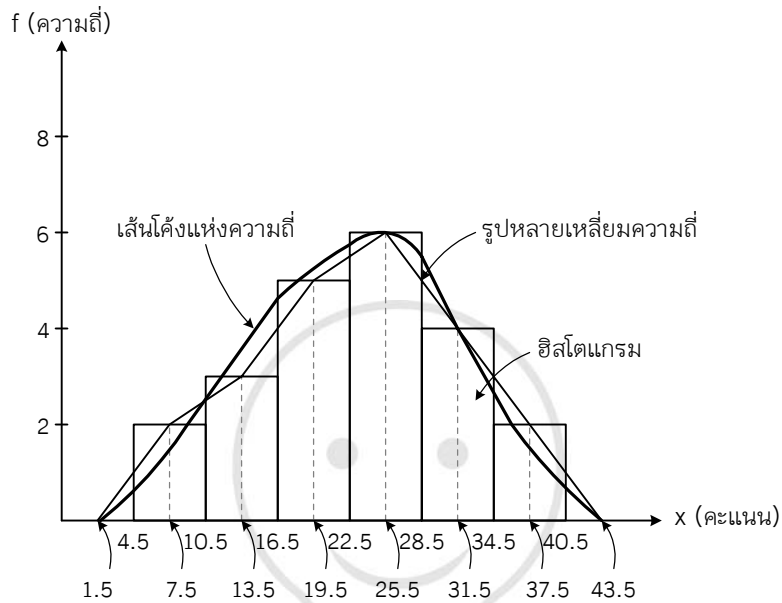
#### 4.2 การแจกแจงความถี่ข้อมูลโดยใช้กราฟ

4.2.1 กราฟฮิสโตแกรม จะเป็นกราฟแท่ง โดยแต่ละแท่งนำขอบเขตชั้นมาเป็นความกว้างของแท่งกราฟและความถี่ของชั้นนั้นเป็นความสูงของแท่งกราฟ

4.2.2 กราฟรูปหลายเหลี่ยมของความถี่ จะเขียนจากกราฟฮิสโตแกรม โดยหาจุดกึ่งกลางของยอดแต่ละแท่ง แล้วลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดของแต่ละแท่งนั้น กราฟที่ได้จะเป็นกราฟรูปหลายเหลี่ยมของความถี่

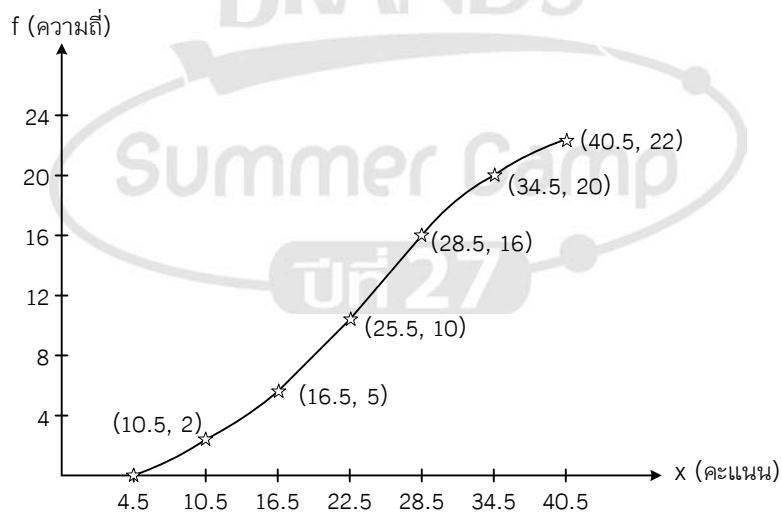
4.2.3 กราฟเส้นโค้งของความถี่ จากกราฟรูปหลายเหลี่ยมของความถี่ จะต้องปรับรูปเหลี่ยมเป็นเส้นโค้ง โดยให้พื้นที่เส้นโค้งที่ปรับให้ใกล้เคียงกับพื้นที่ได้รูปหลายเหลี่ยมของความถี่ให้มากที่สุด

ลักษณะกราฟทั้ง 3 แบบ แสดงดังรูป (ข้อมูลจากตัวอย่าง 1 ข้อ 4.2.2)



4.2.4 กราฟเส้นโค้งของความถี่สะสม นิยมให้ระยะบนแกน x แทนค่าของตัวแปร และระยะบนแกน y แทนความถี่สะสมแล้วลงจุดแทนด้วยคู่อันดับ (ขอบบน, ความถี่สะสม) ของอันตรภาคชั้นเดียวกันโยงจุดคู่อันดับแล้วปรับให้เป็นเส้นโค้งเรียบ

จากข้อมูลตัวอย่าง 1 (2) สามารถเขียนกราฟเส้นโค้งความถี่สะสมได้ดังรูป



### หมายเหตุ

สมมติว่าค่าสังเกตของข้อมูลชุดหนึ่งมีจำนวนมากๆ เรียกข้อมูลนั้นว่าข้อมูลดิบ ถ้าเราต้องการสร้างตารางแจกแจงความถี่ของข้อมูลเป็นอันตรภาคชั้น โดยกำหนดจำนวนอันตรภาคชั้น โดยมีหลักเกณฑ์ว่าค่าต่ำสุดของข้อมูลจะต้องอยู่ในอันตรภาคชั้นชั้นแรก และค่าสูงสุดของข้อมูลต้องอยู่ในอันตรภาคชั้นสุดท้าย เรามีสูตรการหาความกว้างของอันตรภาคชั้นดังนี้

$$1. \text{พิสัย} = \text{ค่าสูงสุดของข้อมูล} - \text{ค่าต่ำสุดของข้อมูล} = X_{\max} - X_{\min}$$

$$2. \text{ความกว้างของอันตรภาคชั้น} = \frac{\text{พิสัย}}{\text{จำนวนอันตรภาคชั้น}} \\ = \text{ผลลัพธ์ที่ได้ปัดขึ้นเป็นจำนวนเต็ม}$$

### ข้อตกลงสัญลักษณ์แทนการบวก

เราจะใช้  $\Sigma$  เป็นสัญลักษณ์แทนการบวก อ่านว่า ซิกมา (Sigma) หรือ Summation

กำหนด  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  แทนค่าจากการสังเกตแต่ละตัวของข้อมูลชุดหนึ่ง ถ้านำค่าจากการสังเกต

ทุกตัวมาบวกกัน เขียนแทนด้วย  $\sum_{i=1}^n x_i$  นั่นคือ  $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$

เพื่อความสะดวกจึงนิยมใช้  $\Sigma x$  แทน  $\sum_{i=1}^n x_i$

$\therefore \Sigma x =$  ผลบวกของค่าจากการสังเกตทุกตัวในข้อมูลชุดนั้น หรือเขียนสั้นๆ ว่า “ผลรวมของข้อมูลทั้งหมด”

### สมบัติของ $\Sigma$

กำหนด  $c$  เป็นค่าคงที่ และ  $x_i$  และ  $y_i$  เป็นข้อมูล

$$1. \sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i$$

$$2. \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$$

$$3. \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i$$

$$4. \sum_{i=1}^n c_i = nc$$

## 5. การวัดค่ากลางของข้อมูล

### 5.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic Mean : $\bar{x}$ , A.M., Mean)

#### 5.1.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

กำหนดข้อมูล ( $x_i$ ) :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  มีจำนวนข้อมูล  $n$  จำนวน

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต =  $\frac{\text{ผลบวกของข้อมูลทั้งหมด}}{\text{จำนวนทั้งหมด}}$

$$\therefore \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{หรือ} \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

#### 5.1.2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

พิจารณตารางแจกแจงความถี่ ต่อไปนี้

อันตรภาคชั้น	ความถี่ ( $f_i$ )	จุดกึ่งกลางชั้น ( $x_i$ )	$f_i x_i$
	$f_1$	$x_1$	$f_1 x_1$
	$f_2$	$x_2$	$f_2 x_2$
	$f_3$	$x_3$	$f_3 x_3$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$f_k$	$x_k$	$f_k x_k$
	$N = \sum_{i=1}^k f_i$		$\sum_{i=1}^k f_i x_i$

จากตารางแจกแจงความถี่ สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ( $\bar{x}$ ) ได้จากสูตร

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{N} \quad \text{หรือเขียนสั้นๆ ได้เป็น} \quad \bar{x} = \frac{\sum f x}{N}$$

### 5.1.3 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนัก

ข้อมูล	น้ำหนัก
$X_1$	$W_1$
$X_2$	$W_2$
$X_3$	$W_3$
$\vdots$	$\vdots$
$X_n$	$W_n$
	$\sum w$

การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลแบบถ่วงน้ำหนักมีสูตรดังนี้

$$\bar{X} = \frac{W_1X_1 + W_2X_2 + W_3X_3 + \dots + W_nX_n}{W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

ข้อมูลที่น่ามาใช้คำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนัก เช่น การหาเกรดเฉลี่ยของนักเรียน การหาราคาเฉลี่ยของสินค้า เป็นต้น

### 5.1.4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม

ถ้ามีข้อมูลทั้งหมด  $k$  กลุ่ม โดยที่

กลุ่มที่ 1 มีข้อมูลจำนวน  $n_1$  จำนวน และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ  $\bar{x}_1$

กลุ่มที่ 2 มีข้อมูลจำนวน  $n_2$  จำนวน และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ  $\bar{x}_2$

กลุ่มที่ 3 มีข้อมูลจำนวน  $n_3$  จำนวน และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ  $\bar{x}_3$

$\vdots$   $\vdots$   $\vdots$

กลุ่มที่  $k$  มีข้อมูลจำนวน  $n_k$  จำนวน และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ  $\bar{x}_k$

ถ้านำข้อมูลดังกล่าวทั้ง  $k$  กลุ่มมารวมกัน แล้วหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ซึ่งหาได้จากสูตร

$$\bar{X}_{รวม} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3 + \dots + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}$$

## 5.2 มัธยฐาน (Median : Med)

มัธยฐาน คือ ค่าของข้อมูลที่อยู่ตรงกลาง ซึ่งเรียงข้อมูลจากน้อยไปหามาก หรือจากมากไปหาน้อย

### 5.2.1 มัธยฐานของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

สมมติข้อมูลชุดหนึ่งเรียงข้อมูลจากน้อยไปหามาก มีจำนวนข้อมูล  $n$  จำนวน

$$\text{ตำแหน่งของมัธยฐาน} = \frac{n+1}{2}$$

5.2.2 มัธยฐานของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่ มีลำดับขั้นตอนการหามัธยฐานดังนี้

5.2.2.1 เรียงข้อมูลจากน้อยไปหามาก และสร้างตารางเพิ่มอีก 1 ช่อง เป็นช่องความถี่

สะสม

5.2.2.2 หาดำแหน่งของมัธยฐาน =  $\frac{N}{2}$

อันดับภาคชั้น	ความถี่ ( $f_i$ )	ความถี่สะสม ( $cf$ )
		$\Sigma f_L$
		*
	$f_{me}$	$\Delta$
	$N = \Sigma f$	

$L =$  ขอบเขตล่าง  
 $I =$  ความกว้าง

มีค่าน้อยกว่า  $\frac{N}{2}$   
 มีค่ามากกว่า หรือ เท่ากับ  $\frac{N}{2}$   
 สมมติขั้นนี้เป็น ขั้นที่มี Med อยู่

5.2.2.3 สูตรที่ใช้ในการหามัธยฐาน

$$Med = L + I \left( \frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_{me}} \right)$$

โดยที่  $\Sigma f_L$  = ผลรวมของความถี่ของชั้นที่ต่ำกว่าชั้นที่มีมัธยฐานอยู่

$f_{me}$  = ความถี่ของชั้นที่มีมัธยฐานอยู่

$L$  = ขอบเขตล่างของอันดับภาคชั้นที่มีมัธยฐานอยู่

$I$  = ความกว้างของอันดับภาคชั้น

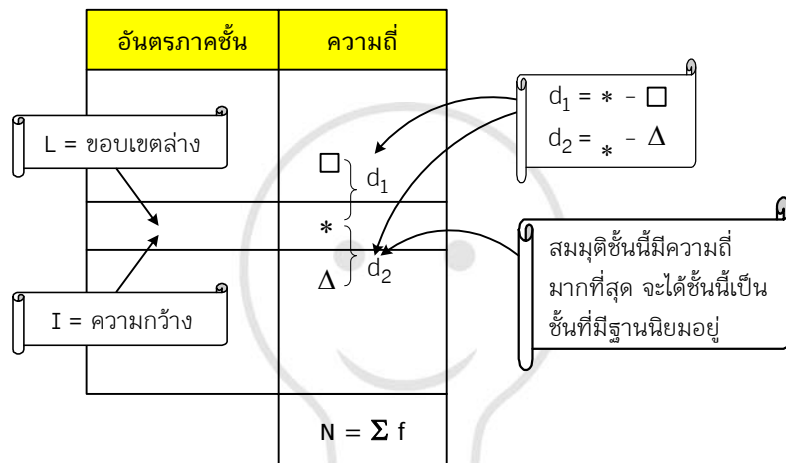
### 5.3 ฐานนิยม (Mode : Mod)

ฐานนิยม คือ ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด กล่าวคือ ข้อมูลใดที่มีความถี่สูงสุด ข้อมูลนั้นเป็นฐานนิยม และฐานนิยมมีมากที่สุดเพียง 2 ค่าเท่านั้น

5.3.1 ฐานนิยมของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

5.3.2 ฐานนิยมของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่ ลำดับขั้นตอนการหาฐานนิยมมีดังนี้

5.3.2.1 เลือกอันตรภาคชั้นที่มีความถี่มากที่สุด ซึ่งชั้นนั้นจะเป็นชั้นที่มีฐานนิยมอยู่



5.3.2.2 สูตรที่ใช้ในการหาฐานนิยม

$$\text{Mod} = L + I \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

โดยที่  $L =$  ขอบเขตล่างของอันตรภาคชั้นที่มีฐานนิยมอยู่

$I =$  ความกว้างของอันตรภาคชั้น

$d_1 =$  ผลต่างของความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มีฐานนิยมอยู่กับความถี่ของอันตรภาคชั้นที่ต่ำกว่าที่อยู่ติดกัน

$d_2 =$  ผลต่างของความถี่ของอันตรภาคชั้นที่มีฐานนิยมอยู่กับความถี่ของอันตรภาคชั้นที่สูงกว่าที่อยู่ติดกัน



#### 5.4 ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (Geometric Mean : G.M.)

##### 5.4.1 ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

กำหนดข้อมูล ( $x_i$ ) :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  มีจำนวนข้อมูล  $n$  จำนวน  
สูตร

$$G.M. = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$$

##### 5.4.2 ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

อันตรภาคชั้น	ความถี่ ( $f_i$ )	จุดกึ่งกลางชั้น ( $x_i$ )
	$f_1$	$x_1$
	$f_2$	$x_2$
	$f_3$	$x_3$
	$\vdots$	$\vdots$
	$f_k$	$x_k$
	$N = \sum f$	

สูตร

$$G.M. = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot x_3^{f_3} \cdot \dots \cdot x_k^{f_k}}$$

#### 5.5 ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก (Harmonic Mean : H.M.)

การหาค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกส่วนใหญ่ ใช้กับข้อมูลที่เป็นอัตราส่วน เช่น ความเร็ว ความเร่ง

เป็นต้น

##### 5.5.1 ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

กำหนดข้อมูล ( $x_i$ ) :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  มีจำนวนข้อมูล  $n$  จำนวน  
สูตร

$$H.M. = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

### 5.5.2 ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

สูตร

$$H.M. = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \frac{f_3}{x_3} + \dots + \frac{f_k}{x_k}} \quad \text{หรือ} \quad H.M. = \frac{N}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \frac{f_3}{x_3} + \dots + \frac{f_k}{x_k}}$$

### 5.5.3 อัตราเร็วเฉลี่ย

ระยะทาง	$d_1$	$d_2$	$d_3$	...	$d_k$
อัตราเร็ว	$v_1$	$v_2$	$v_3$	...	$v_k$
เวลา	$t_1$	$t_2$	$t_3$	...	$t_k$

สูตร อัตราเร็ว =  $\frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}} \rightarrow \text{เวลา} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{อัตราเร็ว}}$

ถ้ามีระยะทาง  $k$  ช่วง แต่ละช่วงใช้อัตราเร็ว และเวลาดังแผนภาพ

$$\begin{aligned} \therefore \text{อัตราเร็วเฉลี่ย} &= \frac{\text{ระยะทางทั้งหมด}}{\text{เวลาทั้งหมด}} \\ &= \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_k}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_k} \end{aligned}$$

$$V_{\text{เฉลี่ย}} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_k}{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3} + \dots + \frac{d_n}{v_n}}$$

จะสังเกตว่าสูตรอัตราเร็วเฉลี่ย ก็คือสูตรค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก นั่นเอง

## 5.6 ค่ากึ่งกลางพิสัย (Mid-Range)

### 5.6.1 ค่ากึ่งกลางพิสัย ของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

สูตร

$$\begin{aligned}\text{กึ่งกลางพิสัย} &= \frac{\text{ค่าสูงสุดของข้อมูล} + \text{ค่าต่ำสุดของข้อมูล}}{2} \\ &= \frac{X_{\max} + X_{\min}}{2}\end{aligned}$$

### 5.6.2 ค่ากึ่งกลางพิสัยของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

สูตร

$$\text{ค่ากึ่งกลางพิสัย} = \frac{\text{ขอบเขตบนของอัตราภาคขั้นสูงสุด} + \text{ขอบเขตล่างของอัตราภาคขั้นต่ำสุด}}{2}$$

สมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต, มัชยฐาน, ฐานนิยม, ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต และค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก

1.  $\sum x = n\bar{x}$
2.  $\sum (x - \bar{x}) = 0$
3.  $\sum (x - a)^2$  มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ  $a = \bar{x}$
4.  $\sum |x - a|$  มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ  $a = \text{Med}$
5. ถ้าข้อมูลมีความแตกต่างกันมากๆ การวัดค่ากลางของข้อมูลควรใช้ มัชยฐาน
6. ถ้าข้อมูลเป็นข้อมูลจำแนกตามคุณภาพ การวัดค่ากลางของข้อมูลควรใช้ ฐานนิยม
7. ถ้าข้อมูลมี 2 ข้อมูล ข้อมูลหนึ่งเป็น  $x$  อีกข้อมูลหนึ่งเป็น  $y$  มีความสัมพันธ์แบบ

เชิงเส้น

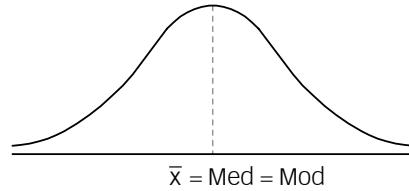
ข้อมูล  $(x_i)$  :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต =  $\bar{x}$

ข้อมูล  $(y_i)$  :  $ax_1 + b, ax_2 + b, ax_3 + b, \dots, ax_n + b$  มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต =  $\bar{y}$

ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล  $x_i$  กับข้อมูล  $y_i$  แบบเชิงเส้น  $y_i = ax_i + b$  จะได้  $\bar{y} = a\bar{x} + b$

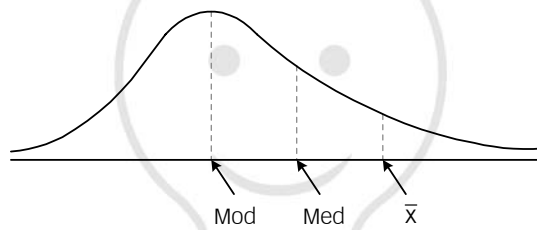
8.  $\bar{x} > \text{G.M.} > \text{H.M.}$

9. (9.1) ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมี  $\text{Mod} = \text{Med} = \bar{x}$  จะได้ว่า  
ข้อมูลดังกล่าวจะมีลักษณะ การแจกแจงปกติ

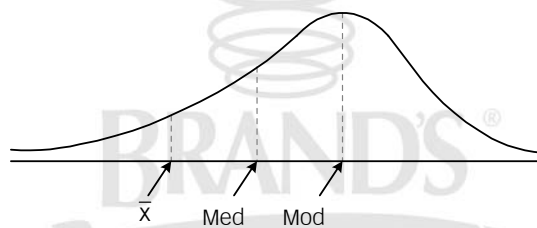


ถ้ากำหนดข้อมูลเป็นการแจกแจงปกติ หรือข้อมูลใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติ  
จะได้รับความสัมพันธ์ระหว่าง  $\text{Mod}$ ,  $\text{Med}$  และ  $\bar{x}$  เป็น  $(\bar{x} - \text{Mod}) = 3(\bar{x} - \text{Med})$

- (9.2) ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมี  $\text{Mod} < \text{Med} < \bar{x}$  จะได้ว่าข้อมูลดังกล่าวมีลักษณะเบ้ขวา



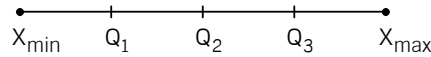
- (9.3) ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมี  $\bar{x} < \text{Med} < \text{Mod}$  จะได้ว่าข้อมูลดังกล่าวมีลักษณะเบ้ซ้าย



## 6. การวัดตำแหน่งของข้อมูล

### 6.1 รูปแบบการวัดตำแหน่งข้อมูล

6.1.1 ควอร์ไทล์ (Quartile) เป็นการแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปหามาก ใช้สัญลักษณ์  $Q_r$  แทน ควอร์ไทล์ที่  $r$

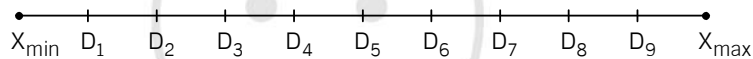


$Q_1$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่านี้อยู่ 1 ใน 4 ของจำนวนทั้งหมด

$Q_2$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่านี้อยู่ 2 ใน 4 ของจำนวนทั้งหมด

$Q_3$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่านี้อยู่ 3 ใน 4 ของจำนวนทั้งหมด

6.1.2 เดไซล์ (Decile) เป็นการแบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วนเท่าๆ กัน เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปหามาก ใช้สัญลักษณ์  $D_r$  แทน เดไซล์ที่  $r$



$D_1$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่านี้อยู่ 1 ใน 10 ของจำนวนทั้งหมด

$D_2$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่านี้อยู่ 2 ใน 10 ของจำนวนทั้งหมด

$\vdots$   $\vdots$

$D_9$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่านี้อยู่ 9 ใน 10 ของจำนวนทั้งหมด

6.1.3 เปอร์เซ็นไทล์ (Percentile) เป็นการแบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่าๆ กัน เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปหามาก ใช้สัญลักษณ์  $P_r$  แทน เปอร์เซ็นไทล์ที่  $r$



$P_1$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่านี้อยู่ 1 ใน 100 ของจำนวนทั้งหมด

$P_2$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่านี้อยู่ 2 ใน 100 ของจำนวนทั้งหมด

$\vdots$   $\vdots$

$P_{99}$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่านี้อยู่ 99 ใน 100 ของจำนวนทั้งหมด

#### หมายเหตุ

ควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นไทล์ จะมีหลักการคำนวณเหมือนกับมัธยฐาน ซึ่งมัธยฐานจะเป็นการแบ่งข้อมูลออกเป็น 2 ส่วน เท่าๆ กัน เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปหามาก ข้อมูลที่อยู่ตรงกลางจะเป็นมัธยฐาน ดังนั้นสูตรการหาควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นไทล์ จึงมีหลักการคำนวณโดยการเลียนแบบจากการหามัธยฐาน

6.2 การหาควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นต์ไทล์

6.2.1 การหาควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นต์ไทล์ ของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่ กำหนดข้อมูลจำนวน n ตัว เมื่อเรียงค่าสังเกตจากน้อยไปหามาก มี  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

6.2.1.1 ตำแหน่งของมัธยฐาน (Med) =  $\frac{n+1}{2}$

6.2.1.2 ตำแหน่งของ  $Q_r$  =  $\frac{r(n+1)}{4}$

6.2.1.3 ตำแหน่งของ  $D_r$  =  $\frac{r(n+1)}{10}$

6.2.1.4 ตำแหน่งของ  $P_r$  =  $\frac{r(n+1)}{100}$

6.2.2 การหาควอร์ไทล์ เดไซล์ และเปอร์เซ็นต์ไทล์ ของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่ การหา  $Q_r$ ,  $D_r$  และ  $P_r$  ใช้หลักการเกี่ยวกับการหามัธยฐาน และมีวิธีการหาดังนี้

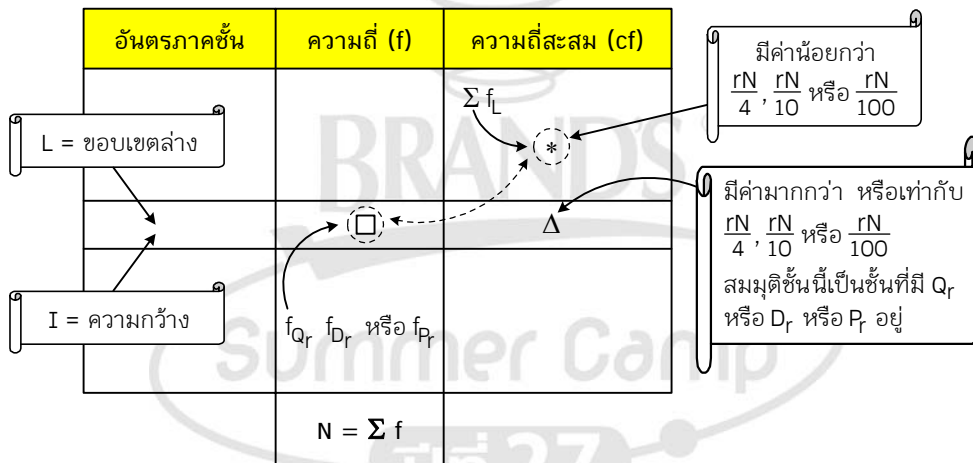
6.2.2.1 จากตารางแจกแจงความถี่ เรียงข้อมูลจากน้อยไปหามาก และสร้างตารางเพิ่มอีก 1 ช่องเป็นช่องความถี่สะสม

6.2.2.2 หาดำแหน่งของข้อมูล

ตำแหน่ง  $Q_r$  =  $\frac{rN}{4}$

ตำแหน่ง  $D_r$  =  $\frac{rN}{10}$

ตำแหน่ง  $P_r$  =  $\frac{rN}{100}$



6.2.3 สูตรที่ใช้ในการหา Med,  $Q_r$ ,  $D_r$  และ  $P_r$

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Med} &= L + I \left( \frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_{me}} \right) \\
 2. \text{ } Q_r &= L + I \left( \frac{\frac{rN}{4} - \sum f_L}{f_{Q_r}} \right) \\
 3. \text{ } D_r &= L + I \left( \frac{\frac{rN}{10} - \sum f_L}{f_{D_r}} \right) \\
 4. \text{ } P_r &= L + I \left( \frac{\frac{rN}{100} - \sum f_L}{f_{P_r}} \right)
 \end{aligned}$$

โดยที่  $\sum f_L$  = ผลรวมของความถี่ของชั้นที่ต่ำกว่าชั้นที่มี Med หรือ  $Q_r$  หรือ  $D_r$  หรือ  $P_r$  อยู่  
 $f_{me}, f_{Q_r}, f_{D_r}, f_{P_r}$  = ความถี่ของชั้นที่มี Med หรือ  $Q_r$  หรือ  $D_r$  หรือ  $P_r$  อยู่ (ตามลำดับ)  
 $L$  = ขอบเขตล่างของอันตรภาคชั้นที่มี Med หรือ  $Q_r$  หรือ  $D_r$  หรือ  $P_r$  อยู่  
 $I$  = ความกว้างของอันตรภาคชั้น

7. การวัดการกระจายของข้อมูล

7.1 การวัดการกระจายสัมบูรณ์

7.1.1 พิสัย (Range)

7.1.1.1 พิสัยของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

สูตร  $\text{พิสัย} = \text{ค่าสูงสุดของข้อมูล} - \text{ค่าต่ำสุดของข้อมูล}$

$\therefore \text{พิสัย} = X_{\max} - X_{\min}$

7.1.1.2 พิสัยของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

สูตร

$\text{พิสัย} = \text{ขอบเขตบนของอันตรภาคชั้นที่สูงที่สุด} - \text{ขอบเขตล่างของอันตรภาคชั้นต่ำสุด}$

7.1.2 ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ (Quartile Deviation : Q.D.)

สูตร  $\text{Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

โดยที่  $Q_1$  แทนควอร์ไทล์ที่ 1

$Q_3$  แทนควอร์ไทล์ที่ 3

### 7.1.3 ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (Mean Deviation : M.D.)

7.1.3.1 การหาส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

กำหนดข้อมูล ( $x_i$ ) :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$\text{สูตร M.D.} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} \quad \text{เมื่อ } \bar{x} \text{ แทนค่าเฉลี่ยเลขคณิต}$$

$$\text{หรือ } \boxed{\text{M.D.} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}} ; \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

7.1.3.2 การหาส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

อันตรภาคชั้น	ความถี่ ( $f_i$ )	จุดกึ่งกลางชั้น ( $x_i$ )
	$f_1$	$x_1$
	$f_2$	$x_2$
	$f_3$	$x_3$
	$\vdots$	$\vdots$
	$f_k$	$x_k$
	$N = \sum f$	

$$\text{สูตร M.D.} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i |x_i - \bar{x}|}{N}$$

$$\text{หรือ } \boxed{\text{M.D.} = \frac{\sum f|x - \bar{x}|}{N}}$$



### 7.1.4 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation : S.D.)

#### 7.1.4.1 การหาส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลที่ไม่มีการแจกแจงความถี่

กำหนดข้อมูล ( $x_i$ ) :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล =  $\bar{x} = \frac{\sum X}{n}$

$$\text{สูตร (1)} \quad \text{S.D.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i + \bar{x})^2}{n}}$$

หรือ 
$$\text{S.D.} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

สูตร (1) นี้เหมาะสำหรับ  $\bar{x}$  เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{สูตร (2)} \quad \text{S.D.} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2} \quad \text{สูตร (2) สามารถหาได้}$$

โดยการกระจายจากสูตร (1) ซึ่งสูตร (2) นี้ เหมาะสำหรับ  $\bar{x}$  เป็นทศนิยม หรือเศษส่วน

#### 7.1.4.2 การหาส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลที่มีการแจกแจงความถี่

อันตรภาคชั้น	ความถี่ ( $f_i$ )	จุดกึ่งกลางชั้น ( $x_i$ )	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
	$f_1$	$x_1$		
	$f_2$	$x_2$		
	$f_3$	$x_3$		
	$\vdots$	$\vdots$		
	$f_k$	$x_k$		
	$N = \sum f$		$\sum fx$	$\sum fx^2$

$$\text{สูตร (3)} \quad \text{S.D.} = \sqrt{\frac{\sum f(x + \bar{x})^2}{N}} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

สูตร (3) ถ้ากระจายสูตร แล้วใช้สมบัติ  $\sum$  จะใช้สูตร (4) ดังนี้

$$\text{สูตร (4)} \quad \text{S.D.} = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - (\bar{x})^2} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

การใช้สูตร (3) และ (4) จะพบว่าไม่สะดวกในการคำนวณเนื่องจากตัวเลขค่อนข้างจะมาก เราจะใช้วิธีลดทอนข้อมูล เพื่อ่ายในการคิดคำนวณตัวเลขซึ่งขั้นตอนการสมมุติ  $d$  เหมือนกับการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต โดยวิธีลดทอนข้อมูลทุกประการ

อันตรภาคชั้น	ความถี่ (f)	d	fd	fd <sup>2</sup>
		⋮		
		-2		
		-1		
		0		
		1		
		2		
		3		
		⋮		
	$N = \sum f$		$\sum fd$	$\sum fd^2$

I = ความกว้าง

เลือกชั้นใดชั้นหนึ่งสมมุติให้ชั้นนั้นมี  $d = 0$  การเลือกควรเลือกชั้นที่มีความถี่มากที่สุด

$$\text{สูตร (5) S.D.} = I \cdot \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - (\bar{d})^2} \quad \text{เมื่อ } \bar{d} = \frac{\sum fd}{N}$$

$$\therefore \text{S.D.} = I \cdot \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

สูตร (4) จะหาสูตร (5) โดยการเปลี่ยน  $x$  ในสูตร (4) เป็น  $d$  และนำ  $I$  คูณหน้าเครื่องหมายกรณฑ์  $\sqrt{\quad}$

7.1.5 ความแปรปรวน (Variance) คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ยกกำลัง 2 นั่นคือ

$$\text{ความแปรปรวน} = (\text{S.D.})^2 = S^2$$

### 7.1.6 ความแปรปรวนรวม

ถ้ามีข้อมูล 2 ชุด และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต และความแปรปรวนดังตาราง

	ชุดที่ 1	ชุดที่ 2
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
ความแปรปรวน	$S_1^2$	$S_2^2$
จำนวนข้อมูล	$n_1$	$n_2$

ถ้ามีข้อมูล 2 ข้อมูลมารวมกัน แล้วหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและความแปรปรวนให้  $\bar{x}_{รวม}$  แทนค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม ;  $S_{รวม}^2$  แทนความแปรปรวนรวม

สูตร 
$$\bar{x}_{รวม} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

สูตรการหาความแปรปรวนรวม แบ่งออกเป็น 2 กรณี

กรณี 1 ถ้า  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$  จะได้ว่า 
$$S_{รวม}^2 = \frac{n_1S_1^2 + n_2S_2^2}{n_1 + n_2}$$

กรณี 2 ถ้า  $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

จากสูตร 
$$S^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{--- (*)}$$

$$S_1^2 = \frac{\sum x^2}{n_1} - \bar{x}_1^2 \quad \text{--- (1)}$$

$$S_2^2 = \frac{\sum y^2}{n_2} - \bar{x}_2^2 \quad \text{--- (2)}$$

$$S_{รวม}^2 = \frac{\sum x^2 + \sum y^2}{n_1 + n_2} - \bar{x}_{รวม}^2 \quad \text{--- (3)}$$

จาก (1) และ (2) จะให้ 
$$\sum x^2 = n_1(S_1^2 + \bar{x}_1^2)$$

$$\sum y^2 = n_2(S_2^2 + \bar{x}_2^2)$$

นำ  $\sum x^2$  และ  $\sum y^2$  แทนใน 3 จะได้

$$S_{รวม}^2 = \frac{n_1(S_1^2 + \bar{x}_1^2) + n_2(S_2^2 + \bar{x}_2^2)}{n_1 + n_2} - \bar{x}_{รวม}^2$$

7.1.7 สมบัติส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความแปรปรวน

7.1.7.1 ถ้า S.D. = 0 แสดงว่าข้อมูลชุดนั้นซึ่งค่าสังเกตแต่ละตัวมีค่าเท่ากันหมด

7.1.7.2 กำหนดข้อมูล ( $x_i$ ) :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต =  $\bar{x}$  และความแปรปรวน =  $S_x^2$

สมมติข้อมูล ( $y_i$ ) :  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  ซึ่ง  $y_i$  มีความสัมพันธ์กับ  $x_i$  เป็นแบบเชิงเส้น  $y_i = ax_i + b$  เราสามารถหา  $\bar{y}$ ,  $S_y^2$  จาก  $\bar{x}$  และ  $S_x^2$  ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{y} &= a\bar{x} + b \\ S_y^2 &= a^2 S_x^2 \\ S_y &= |a|S_x \end{aligned}$$

7.1.7.3 ถ้าข้อมูล ( $x_i$ ) :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตมีผลต่างร่วม =  $d$  จะได้

สูตร 
$$S^2 = \frac{(n^2 - 1)d^2}{12}$$

7.1.7.4 การหา  $\bar{x}$  และ  $S^2$  ที่ถูกต้อง เมื่อทราบภายหลังว่าจุดข้อมูลผิดบางตัว เราสามารถหาได้จากสูตร

7.1.7.5

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\text{ที่ถูกต้อง}} &= \frac{n\bar{x}_{\text{ผิด}} - \sum x_{\text{ผิด}} + \sum x_{\text{ถูก}}}{n} \\ S_{\text{ที่ถูกต้อง}}^2 &= \frac{n(S_{\text{ผิด}}^2 + \bar{x}_{\text{ผิด}}^2) - \sum x_{\text{ผิด}}^2 + \sum x_{\text{ถูก}}^2}{n} - \bar{x}_{\text{ที่ถูกต้อง}}^2 \end{aligned}$$

โดยที่  $\sum x_{\text{ผิด}}$  แทนผลบวกของข้อมูลที่ผิด  $\sum x_{\text{ผิด}}^2$  แทนผลบวกกำลังสองของข้อมูลที่ผิด  
 $\sum x_{\text{ถูก}}$  แทนผลบวกของข้อมูลที่ถูกต้อง  $\sum x_{\text{ถูก}}^2$  แทนผลบวกกำลังสองของข้อมูลที่ถูกต้อง

## 7.2 การวัดการกระจายสัมพัทธ์

ถ้าเรามีข้อมูลหลายชุด เราจะต้องการเปรียบเทียบว่าข้อมูลชุดใดมีการกระจายมากน้อยกว่ากัน เราจะใช้การวัดการกระจายสัมพัทธ์ ซึ่งเราจะหาค่าการกระจายของแต่ละชุดมาเปรียบเทียบกัน ข้อมูลที่มีคุณภาพดีควรจะเป็นข้อมูลที่มีค่าการกระจายน้อยที่สุด

การวัดการกระจายสัมพัทธ์ มีวิธีการวัด 4 วิธี

1. สัมประสิทธิ์ของพิสัย =  $\frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_{\max} + X_{\min}}$
2. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ =  $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
3. สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย =  $\frac{M.D.}{\bar{X}}$
4. สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน =  $\frac{S.D.}{\bar{X}}$

### หมายเหตุ

การเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลนั้น ข้อมูลทุกชุดที่นำมาหาการกระจายสัมพัทธ์ จะต้องีหน่วยเดียวกัน

## 8. ค่ามาตรฐาน

สมมุติว่านาย ก สูง 6 ฟุต 4 นิ้ว นาย ข สูง 1 หลา 82 เซนติเมตร ถ้าต้องการเปรียบเทียบว่า นาย ก กับนาย ข ว่าใครสูงกว่ากัน การเปรียบเทียบนี้ จะต้องเปลี่ยนหน่วยให้เป็นหน่วยเดียวกัน

ในทางสถิติก็ทำนองเดียวกัน ถ้าต้องการเปรียบเทียบข้อมูลแต่ละตัวว่าข้อมูลตัวใดดีกว่ากัน กล่าวคือ จะต้องเปลี่ยนหน่วยให้เป็นหน่วยเดียวกัน ลักษณะเช่นนี้เรียกว่า ค่ามาตรฐาน (Standard Score) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $z$

สูตร

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S.D.}$$

ค่ามาตรฐานที่ควรสนใจ

8.1 กำหนด  $(x_i) : x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$  มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต =  $\bar{x}$  และ  
เปลี่ยนเป็นค่ามาตรฐาน  $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \dots, \downarrow$  ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน =  $S.D._x$

$(z_i)$  จะได้ :  $z_1, z_2, z_3, z_4, \dots, z_n$  โดยที่  $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S.D.}$

ถ้านำค่ามาตรฐาน  $(z_i)$  ทุกตัวมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจะได้

1.  $\bar{z} = 0$
2.  $S.D._z = 1$

8.2 ค่า  $z$  ตัวใดมีค่ามากที่สุด ข้อมูลตัวนั้นดีกว่าตัวอื่น

8.3 ถ้าข้อมูลชุดที่ 1 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต =  $\bar{x}_1$

มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = S.D.1

ข้อมูลชุดที่ 2 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต =  $\bar{x}_2$

มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = S.D.2

สมมุติว่า  $x_3$  เป็นค่าสังเกตอยู่ในข้อมูลชุดที่ 1 เราเปลี่ยน  $x_3$  เป็นค่ามาตรฐานได้เป็น  $z_3$

$$\text{โดยที่ } z_3 = \frac{x_3 - \bar{x}_1}{S.D.1}$$

และ  $y_5$  เป็นค่าสังเกตอยู่ในข้อมูลชุดที่ 2 เราเปลี่ยน  $y_5$  เป็นค่ามาตรฐานได้เป็น  $z_5$

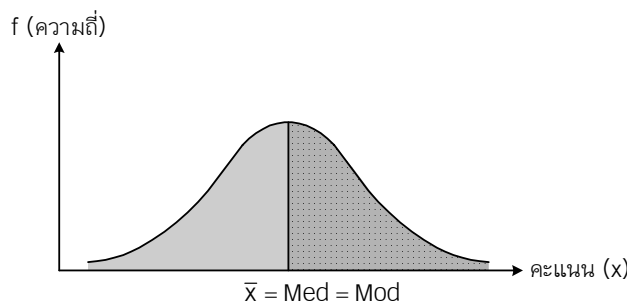
$$\text{โดยที่ } z_5 = \frac{x_5 - \bar{x}_2}{S.D.2}$$

ถ้า  $z_5 > z_3$  เราจะสรุปได้ว่า  $y_5$  ดีกว่า  $x_3$

## 9. พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

กราฟเส้นโค้งแห่งความถี่ เป็นการเขียนกราฟจากรูปหลายเหลี่ยมความถี่ โดยการปรับรูปเหลี่ยมให้เรียบเป็นเส้นโค้ง โดยให้พื้นที่เส้นโค้งที่ปรับให้ใกล้เคียงกับพื้นที่ได้รูปหลายเหลี่ยมความถี่มากที่สุด

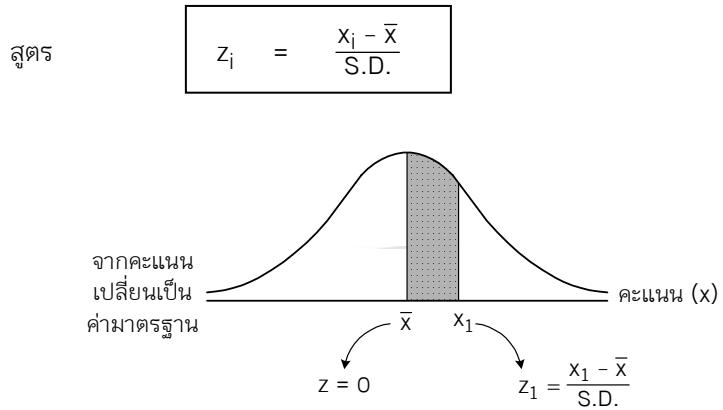
ถ้าเส้นโค้งแห่งความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ แสดงว่าข้อมูลชุดนั้นมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม มีค่าเท่ากับ ซึ่งจะมีลักษณะกราฟดังนี้



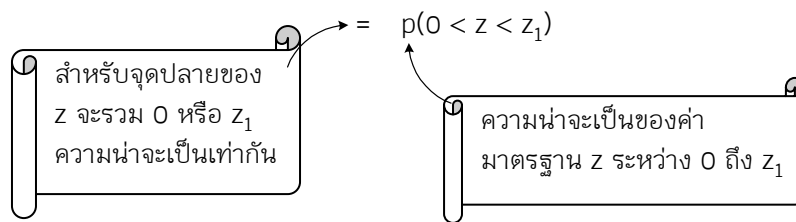
ถ้าเส้นโค้งแห่งความถี่มีการแจกแจงปกติ เรียกสั้นๆ ว่า เส้นโค้งปกติ ซึ่งพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ มีค่าเท่ากับ 1 และกราฟจะสมมาตรกัน ณ คะแนน  $\bar{x}$  (ดังรูปข้างบน)

### 9.1 การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติโดยการเปิดตาราง

พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติบางส่วน สามารถหาค่าได้โดยการเปิดตาราง ซึ่งจะต้องเปลี่ยนคะแนน  $x_i$  เป็นค่ามาตรฐาน ( $z_i$ ) ก่อน มีวิธีการเปิดตารางดังนี้



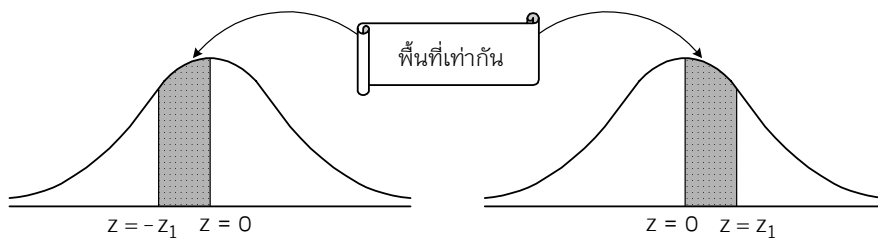
จากรูป A = พื้นที่แรเงา = พื้นที่ใต้เส้นโค้งจาก  $z = 0$  ถึง  $z = z_1$  \_\_\_\_\_ \*



จาก \* เราสามารถหา A ได้ โดยการเปิดตารางพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติที่ค่า  $z = z_1$

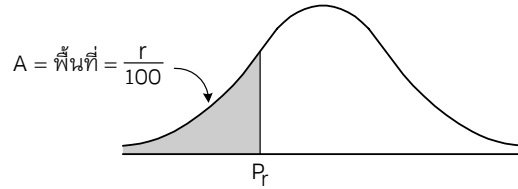
### 9.2 สิ่งที่น่าสนใจเกี่ยวกับเส้นโค้งปกติ

9.2.1 เนื่องจากพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติในตารางจะมีค่า  $z$  เป็นบวกเท่านั้น สำหรับ  $z$  เป็นลบ (ซึ่งหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งทางด้านซ้าย  $z = 0$ ) เราจะหาพื้นที่ใต้โดยใช้หลักการสมมาตร ดังรูป

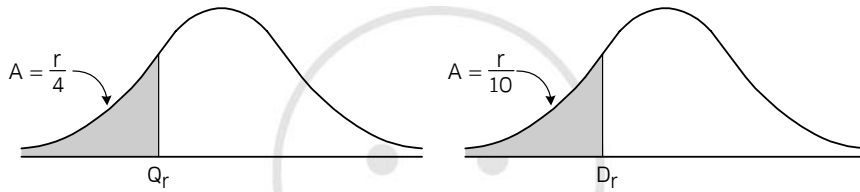


ให้  $z_1 > 0$  จากรูป จะได้  $P(-z_1 < z < 0) = P(0 < z < z_1)$

9.2.2 สัญลักษณ์  $P_r$  แทนเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่  $r$  ซึ่ง  $P_r$  คือ ค่าของข้อมูลที่มีจำนวนข้อมูลมีค่าน้อยกว่าค่าที่อยู่ที่  $r$  ใน 100 ของจำนวนทั้งหมดในเส้นโค้งปกติ คะแนน  $P_r$  สามารถหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งได้ดังรูป



สำหรับ  $Q_r$  และ  $D_r$  สามารถหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติได้เช่นเดียวกับ  $P_r$



9.2.3  $A =$  พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติบางส่วน (จากตาราง)

$z =$  ค่ามาตรฐาน โดยที่  $z = \frac{x - \bar{X}}{S.D.}$

$x =$  คะแนน

การเชื่อมโยงระหว่าง  $x, z, A$  จะมีลักษณะดังนี้

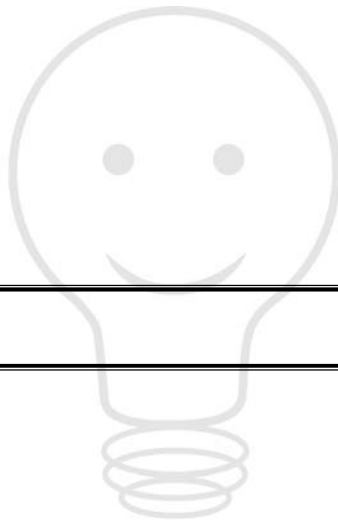
1.  $x \xrightarrow{\text{เปลี่ยนเป็น}} z \xrightarrow{\text{เปลี่ยนเป็น}} A$
2.  $A \xrightarrow{\text{เปลี่ยนเป็น}} z \xrightarrow{\text{เปลี่ยนเป็น}} x$

ตัวอย่างข้อสอบ





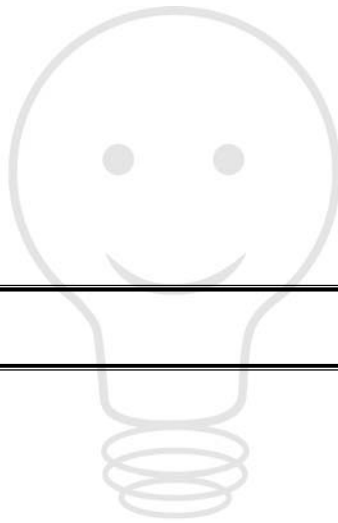
ตัวอย่างข้อสอบ



ตัวอย่างข้อสอบ



ตัวอย่างข้อสอบ



ตัวอย่างข้อสอบ



# BRANDS ซัมเมอร์แคมป์ ปีที่ 27



เอกสารประกอบคำบรรยาย  
วิชา **PAT 1**

## คณิตศาสตร์

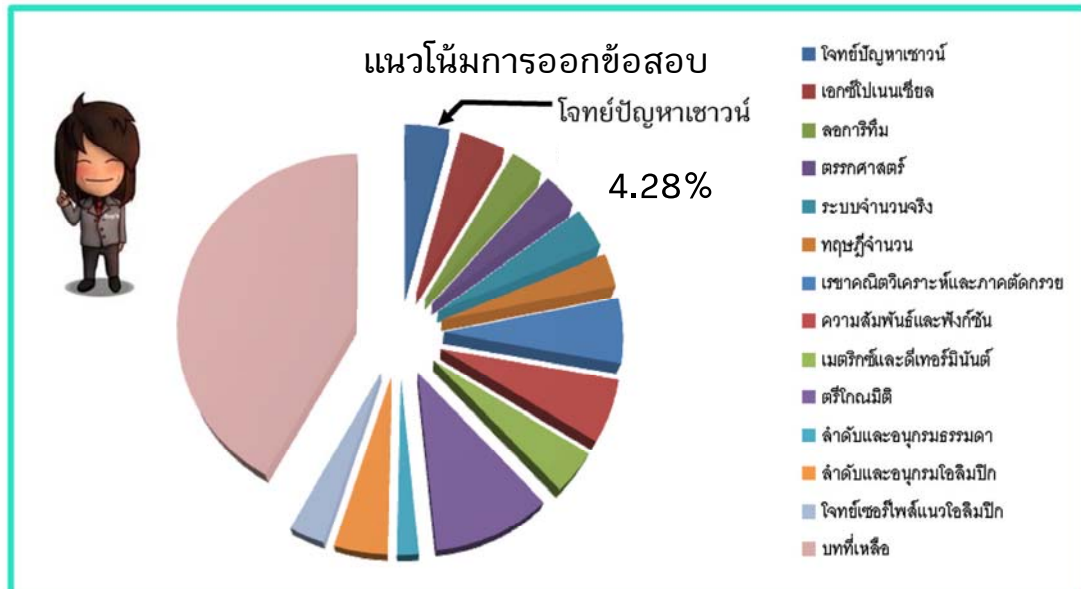
โดย อ.ศุภฤกษ์ สกุลชัยพรเลิศ (ครู Sup'k)  
โรงเรียนกวดวิชาสูงส่งเสริมปัญญา (Sup'k Center)

เนื้อหาในส่วน ที่ครู Sup'k รับผิดชอบ	PAT1 ต.ค.55	PAT1 มี.ค.56	PAT1 มี.ค.57	PAT1 เม.ย.57	PAT1 พ.ย.57	PAT1 มี.ค.58
ระดับข้อสอบ	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก
โจทย์ปัญหาเซต แนวจำนวนกับตัวเลข	1	1	4	1	1	1
โจทย์ปัญหาเซต แนวโอเปอร์เรชั่นใหม่ๆ	-	2	-	-	1	-
เอกซ์โปเนนเชียล	3	3	2	0.5	2.5	1.5
ลอการิทึม	1	2	1	2.5	2.5	3
ตรรกศาสตร์	2	1	2	1.5	2	1.5
ระบบจำนวนจริง	1	2.5	2	2.5	2	4
ทฤษฎีจำนวน	2	1	2	1	1	1
เรขาคณิตวิเคราะห์	-	0.5	-	1	1	0.5
ภาคตัดกรวย	3	3	3	2	2	2.5
ความสัมพันธ์	1	2	1	-	1	1
ฟังก์ชัน	1	2	-	3	3	2
เมทริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์	2	2	2	2	2	2
ตรีโกณพื้นฐานในวงกลม	0.5	-	-	-	-	2
ตรีโกณประยุกต์	2	2	3	2	3.5	1
อินเวอร์สตรีโกณ	2	2	1	1	0.5	1
กฎของ sin, กฎของ cos	1	1	1	2	1	1

เนื้อหาในส่วน ที่ครู Sup'k รับผิดชอบ	PAT1 ต.ค.55	PAT1 มี.ค.56	PAT1 มี.ค.57	PAT1 เม.ย.57	PAT1 พ.ย.57	PAT1 มี.ค.58
ระดับข้อสอบ	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก	ยากมาก
โจทย์เซอร์ไฟล์ แนวโอลิมปิก	2	1	1	2	-	-
รวม	24.5 ข้อ	28 ข้อ	25 ข้อ	24 ข้อ	26 ข้อ	25 ข้อ
ข้อสอบทั้งหมด	50 ข้อ		45 ข้อ			
หมายเหตุ	ข้อย 25 ข้อ ข้อละ 5 คะแนน  เต็มคำ 25 ข้อ ข้อละ 7 คะแนน		ข้อย 30 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน  เต็มคำ 15 ข้อ ข้อละ 8 คะแนน			



# สรุปภาพรวม “โจทย์ปัญหาเซาว์น” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ปัญหาเซาว์น แนวลำดับ – ฟังก์ชัน สองตัวแปร
2. โจทย์ปัญหาเซาว์น แนวเติมตัวเลขในตารางเก้าช่อง
3. โจทย์ปัญหาเซาว์น แนวผลรวมตัวเลขในตาราง
4. โจทย์ปัญหาเซาว์น แนว Sudoku
5. โจทย์ปัญหาเซาว์น แนว Alphabetic Problem
6. โจทย์ปัญหาเซาว์น แนวทฤษฎีจำนวน
7. โจทย์ปัญหาเซาว์น แนวตรรกศาสตร์ ผมไม่ได้พูดโกหก VS นั่งติดกับคนโน้น ตรงข้ามคนนี้
8. โจทย์ปัญหาเซาว์น แนวโอเปอร์เรชันของระบบจำนวนจริง

SiGo-Pb1.1 (PAT1'มี.ค.58)

กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็ม

ที่สอดคล้องกับ  $a^2 + b^2 + 9 = 2(2a - b + 2)$

Tips จากครู Sup'k

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $a < b$

(ข)  $(2a - b)^n = (a + 3b^2)^n$  สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก  $n$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก
- 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
- 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
- 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

แนวคิด & เทคนิค



**โจทย์ปัญหาเซวาร์ แนว ลำดับ-ฟังก์ชัน สองตัวแปร**

**NichTor-Pb1.1 (แนว PAT1'ธ.ค.54)**

กำหนด  $a(n, m)$  เป็นจำนวนเต็มบวก ทุกๆ  $n = 1, 2, 3, 4, m = 1, 2, 3, \dots, n$

และ  $a(n, m) = a(n, m - 1) + a(n - 1, m - 1)$

เมื่อ  $n = 2, 3, 4$  และ  $m = 2, 3, \dots, n$

ถ้า  $a(1, 1) = 10, a(2, 1) = 5$  และ  $a(2, 3) = 18$

จงหาค่าของ  $a(1, 2)$  **ตอบ** .....

**Tips จากครู Sup'k**

**\*NichTor-Pb1.2 (ดักแนวข้อสอบ PAT1)**

กำหนด  $a(n, m)$  เป็นจำนวนเต็มบวก ทุกๆ  $n = 1, 2, 3, 4, m = 1, 2, 3, \dots, n$

และ  $a(n, m) = a(n, m - 1) + a(n - 1, m - 1)$  เมื่อ  $n = 2, 3, 4$  และ  $m = 2, 3, \dots, n$

ถ้า  $a(1, 1) = 10, a(2, 1) = 5$  และ  $a(4, 1) = 4, a(4, 4) = 35$

จงหาค่าของ  $a(3, 1)$  **ตอบ** .....

**NichTor-Pb1.3 (ดักแนวข้อสอบ PAT1) สำหรับจำนวนเต็ม  $n, m$  ที่ไม่ติดลบ**

**นิยาม** กำหนด  $a(n, m)$  ดังนี้

(i)  $a(0, m) = m + 1$

(ii)  $a(n + 1, 0) = a(n, 1)$

(iii)  $a(n + 1, m + 1) = a(n, a(n + 1, m))$

จงหาค่าของ  $a(3, 0)$  **ตอบ** .....

**Sigo-Pb1.3.2 (PAT1'พ.ย.57) ให้  $A = \{0, 1, 2, \dots\}$**

กำหนดให้  $a(n, m) \in A$  ทุก  $n, m \in A$  โดยที่

(ก)  $a(n, 0) = n + 1$  สำหรับทุก  $n \in A$

(ข)  $a(0, m) = a(1, m - 1)$  สำหรับทุก  $m \in A - \{0\}$

(ค)  $a(n + 1, m + 1) = a(a(n, m + 1), m)$  สำหรับทุก  $n, m \in A$

ถ้า  $x \in A$  และ  $a(x, 2) = 2557$  แล้วค่าของ  $x$  เท่ากับเท่าใด **ตอบ** .....

**NaDate-Pb2.48 (PAT1'มี.ค.56) สำหรับ  $x, y \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$**

กำหนดให้  $F(x, y)$  เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$F(x, y) = \begin{cases} F(1, y - 1) & , x = 0, y \neq 0 \\ x + 1 & , y = 0 \\ F(F(x - 1, y), y - 1) & , x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

ค่าของ  $F(1, 2) + F(3, 1)$  เท่ากับเท่าใด

**ตอบ**.....

**โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวเติมตัวเลขในตารางเก้าช่อง**

BRAN-Pb2.50 (PAT1'ต.ค.53) จากตารางที่กำหนดให้ มีช่องว่างทั้งหมด 9 ช่อง ดังรูป

		7
X		
	10	3

**Tips จากครู Sup'k**

ให้เติมจำนวนเต็มบวก ลงในช่องสี่เหลี่ยมช่องละ 1 จำนวน

โดยให้ผลบวกของจำนวนในแต่ละแถว ในแต่ละหลัก และในแต่ละแนวทแยงมุม มีค่าเท่ากัน ถ้าเติมจำนวนเต็มบวก 3, 7, 10 ดังปรากฏในตาราง แล้วจำนวน x ในตาราง เท่ากับเท่าใด

**แนวคิดเร็วๆ**

ขั้นที่ 1

		7
X		
	10	3

ขั้นที่ 2

		7
X		
	10	3

ขั้นที่ 3 (แถม)

		7
	10	3

ขั้นที่ 4 (แถม)

		7
	10	3

ขั้นที่ 5 (แถม)

		7
	10	3



**โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวผลรวมตัวเลขในตาราง**

SheLL2.46 (PAT1'ก.ค.53) ให้เติมจำนวนเต็มบวกลงในช่องสี่เหลี่ยม โดยให้ผลรวมของจำนวนในช่องสี่เหลี่ยมสามช่องที่ติดกัน เท่ากับ 18

			7			x				8		
--	--	--	---	--	--	---	--	--	--	---	--	--

ค่าของ x เท่ากับเท่าใด **ตอบ** .....

SheLL2.47 (PAT1'ก.ค.53) จากตารางที่กำหนดให้ มีช่องว่าง 16 ช่อง ดังรูป

		หลัก (ค)		หลัก (ง)	
แถว (ก)		1		5	
แถว (ข)		x		13	

ให้เติมจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, ..., 16 ลงในช่องสี่เหลี่ยมช่องละ 1 จำนวน โดยให้ผลบวกของจำนวนในแต่ละแถว (แถว (ก) และ แถว (ข)) และแต่ละหลัก (หลัก (ค) และ หลัก (ง)) มีค่าเท่าๆ กัน ถ้าเติมจำนวนเต็มบวก 1, 5, 13 ดังปรากฏในตารางแล้วจำนวน x ในตาราง เท่ากับเท่าใด **ตอบ** .....

**โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนว Sudoku**

SheLL2.4 (PAT1'ก.ค.53) ให้เติมจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4, 5 ลงในช่องว่างของตาราง 5 × 5 ต่อไปนี้

	5	4		
1	3			
		5	3	
2		3	1	
				x

โดยที่แต่ละแถวต้องมีจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4 และ 5 และแต่ละหลักต้องมีจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4 และ 5 จงหาว่าจำนวน x ในตาราง เท่ากับเท่าใด **ตอบ** .....

โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนว Alphabetic Problem

BRAN-Pb1.24 (PAT1'ต.ค.53) พิจารณาการบวกของจำนวนต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} A \ B \\ \underline{C \ D}^+ \\ \underline{E \ F \ G} \end{array}$$

เมื่อ A, B, C, D, E, F, G แทนเลขโดดที่แตกต่างกัน โดยที่  $F = 0$

และ  $\{A, B, C, D, E, G\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ถ้าจำนวนสองหลัก AB เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว  $A + B$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

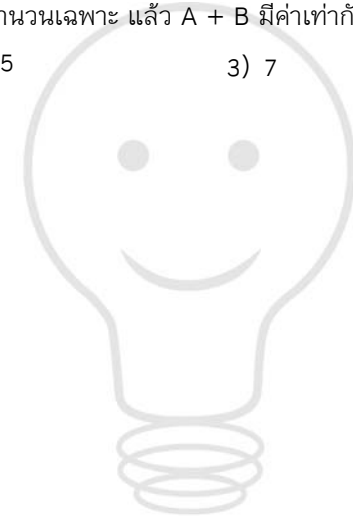
1) 4

2) 5

3) 7

4) 9

แนวคิด



BRANDS®

Summer Camp

SupK-Pb2.28.2 (ตักแนว PAT 1)

ให้ ตัวอักษรภาษาอังกฤษแต่ละตัวที่แตกต่างกัน แทน เลขโดดที่แตกต่างกัน

จงหาตัวเลขมาเติมตัวอักษรอังกฤษต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} S \ E \ N \ D \\ \underline{M \ O \ R \ E}^+ \\ \underline{M \ O \ N \ E \ Y} \end{array}$$

เมื่อตัวอักษร O ในข้อนี้ คือ เลขศูนย์

SupK-Pb2.28.3 (ตักแนว PAT 1)

ให้ ตัวอักษรภาษาอังกฤษแต่ละตัวที่แตกต่างกัน แทน เลขโดดที่แตกต่างกัน

จงหาตัวเลขมาเติมตัวอักษรอังกฤษต่อไปนี้

$$\begin{array}{r} F \ A \ T \ H \ E \ R \\ \underline{M \ O \ T \ H \ E \ R}^+ \\ \underline{P \ A \ R \ E \ N \ T} \end{array}$$

เมื่อตัวอักษร O ในข้อนี้ คือ เลขโดดใดๆ

โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวทฤษฎีจำนวน

BRAN-Pb2.43 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดให้ a, b, c, d, e, f เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้าผลบวกของสองจำนวนที่แตกต่างกัน

ในเซต {a, b, c, d, e, f} มีทั้งหมด 15 จำนวน

โดยที่  $a < b < c < d < e < f$

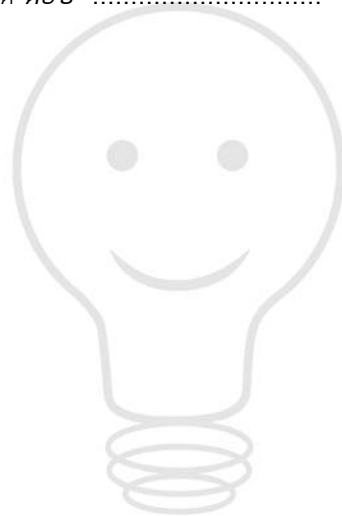
คือ 37, 50, 67, 72, 80, 89, 95, 97,

102, 110, 112, 125, 132, 147 และ 155

แล้วค่าของ  $c + d$  เท่ากับเท่าใด *ตอบ* .....

*แนวคิด*

Tips จากครู Sup'k



BRANDS<sup>®</sup>

Summer Camp

Happy-Pb 1.1 (PAT1'มี.ค.57) ถ้า a, b, c, d, e เป็นจำนวนเต็มบวก

โดยที่  $5a = 4b = 3c = 2d = e$

และ  $a + 2b + 3c + 4d + 5e$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด

แล้วค่าของ  $a + 4b + 3c + 4d + e$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 52

2) 120

3) 262

4) 312

Happy-Pb 1.2 (PAT1'มี.ค.57) คูณรภัยมีรหัสเปิดตู้เป็นจำนวน 10 หลัก คือ ABCDEFGHIJ โดยที่

(ก)  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

และ  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$  เป็นจำนวนที่แตกต่างกันทั้งหมด

(ข)  $A, B, C, D$  เป็นจำนวนคี่ที่เรียงติดกันและ  $A > B > C > D$

(ค)  $E, F, G$  เป็นจำนวนคู่ที่เรียงติดกันและ  $E > F > G$

(ง)  $H > I > J$  และ  $H + I + J = 15$

ค่าของ  $C + F + I$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 10

2) 13

3) 15

4) 17

Happy-Pb 1.3 (PAT1'เม.ย.57) สร้าง ABCDEF เป็นจำนวนเต็มบวก 6 หลัก

โดยที่  $A, B, C, d, E, F \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

และสอดคล้องกับ  $A + B = 14$  และ  $C - D > D - E > E - F > 0$  ได้ทั้งหมดกี่จำนวน

ตอบ .....

Happy-Pb 1.4 (PAT1'เม.ย.57) ให้  $A$  เป็นเซตของ  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  โดยที่  $a, b, c, d$  เป็นจำนวนเต็มบวก  
ที่สอดคล้องกับ

(ก)  $a = b + d$

(ข)  $(a + b + c + d) = (a - c)d$

(ค)  $2 + cd = a(c - 1)$

ถ้า  $M$  เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดใน  $A$  และ  $m$  เป็นสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดใน  $A$  แล้ว  $M - m$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

### โจทย์ปัญหาเชาวน์ แนวทฤษฎีการหารลงตัว

BRAN-Pb1.25 (PAT1'ต.ค.53) สำหรับ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

นิยาม  $a * b$  หมายถึง  $a = kb$  สำหรับบางจำนวนเต็มบวก  $k$

ถ้า  $x, y$  และ  $z$  เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

1) ถ้า  $x * y$  และ  $y * z$  แล้ว  $(x + y) * z$

2) ถ้า  $x * y$  และ  $x * z$  แล้ว  $x * (yz)$

3) ถ้า  $x * y$  และ  $x * z$  แล้ว  $x * (y + z)$

4) ถ้า  $x * y$  แล้ว  $y * x$

**โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวตรรกศาสตร์ ผมไม่ได้พูดโกหก VS นั่งติดกับคนไหน ตรงข้ามคนนี้**

TF-PAT119 (B-PAT1'ต.ค.51) ในการจัดคน 5 คน ยืนเข้าแถวหน้ากระดาน พบว่า

- นาย ก ไม่ยืนข้างนาย ข
- นาย ค ยืนอยู่ริม
- นาย ง ยืนอยู่ข้างนาย จ และไม่ยืนอยู่ตรงกลางแถว

ข้อใดต่อไปนี้เป็นไปได้

- 1) นาย ก ยืนข้างนาย ข
- 2) นาย จ ยืนอยู่ริมด้านหนึ่ง
- 3) นาย ก ยืนอยู่ตรงกลาง
- 4) นาย จ ยืนอยู่ตรงกลาง

Tips จากครู Sup'k

TF-PAT120 (B-PAT1'ต.ค.51) จากโจทย์ ข้อเมื่อกี้ ถ้านาย ข ยืนอยู่ริมด้านหนึ่งแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นไปได้

- 1) นาย ค ยืนติดนาย ก
- 2) นาย ก ยืนอยู่ตรงกลาง
- 3) นาย จ ยืนอยู่ตรงกลาง
- 4) นาย ง ยืนติดกับนาย ข

TF-PAT123 (PAT1'ส.ค.52) ชาย 6 คน นาย ก, ข, ค, ง, จ และ ฉ ยืนเข้าแถวตอน ตามลำดับ โดยมีเงื่อนไขดังนี้

- นาย ฉ ไม่ยืนติดกับนาย ข
  - นาย ฉ ยืนอยู่ในลำดับก่อนนาย ก
  - นาย ก ยืนติดนาย ง
  - นาย จ ยืนอยู่ลำดับที่ 4
- ถ้านาย ฉ ยืนติดและอยู่หลังนาย ค แล้ว คนที่มีโอกาสอยู่ในลำดับที่ 5 ได้แก่ ชายในข้อใดต่อไปนี้เป็นไปได้
- 1) นาย ข
  - 2) นาย ค
  - 3) นาย ง
  - 4) นาย ฉ

TF-PAT124 (PAT1'ส.ค.52) จากเงื่อนไขในโจทย์ข้อที่แล้ว ข้อความใดต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) นาย ง ยืนอยู่ในลำดับที่ 2
- 2) นาย ค ยืนอยู่ในลำดับที่ 3
- 3) นาย ง ยืนอยู่หลังนาย ข
- 4) นาย ข ยืนอยู่หลังนาย จ

โจทย์ปัญหาเขาวงกต แนวการโอเปอร์เรชันระบบจำนวนจริง

BRAN-Pb1.5 (PAT1'ต.ค.53) ให้  $N$  แทนเซตของจำนวนนับ

กำหนดให้  $a * b = \sqrt{a+b}$  สำหรับ  $a, b \in N$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $(a * b) * c = a * (b * c)$  สำหรับ  $a, b, c \in N$

ข.  $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$  สำหรับ  $a, b, c \in N$

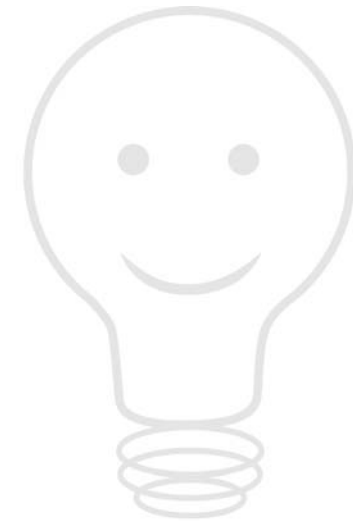
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

แนวคิดเร็วๆ

Tips จากครู Sup'k

สูตรลัด จากครู Sup'k



BRANDS<sup>®</sup>

Summer Camp

วิธีจริง

สำหรับ  $a, b \in N$  เรามีว่า  $a * b = \sqrt{a+b}$

(ก) ผิด ,  $(a * b) * c = (\sqrt{a+b}) * c = \sqrt{\sqrt{a+b} + c}$

$$a * (b * c) = a * \sqrt{b+c} = \sqrt{a + \sqrt{b+c}}$$

$\therefore (a * b) * c \neq a * (b * c)$

(ข) ผิด ,  $a * (b + c) = \sqrt{a+b+c}$  ,  $a * b = \sqrt{a+b}$  ,  $a * c = \sqrt{a+c}$

เพราะว่า  $\sqrt{a+b+c} \neq \sqrt{a+b} + \sqrt{a+c}$

$\therefore a * (b + c) \neq (a * b) + (a * c)$

ดังนั้น ทั้ง (ก) และ (ข) ผิดทั้งคู่

BRAN-Pb1.20 (PAT1'ต.ค.53) ให้  $N$  แทนเซตของจำนวนนับ, สำหรับ  $a, b \in N$

$$a \ominus b = \begin{cases} a, & a > b \\ a, & a = b \\ b, & a < b \end{cases} \quad \text{และ} \quad a \Delta b = \begin{cases} b, & a > b \\ a, & a = b \\ a, & a < b \end{cases}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ สำหรับ  $a, b, c \in N$

- ก.  $a \ominus b = b \ominus a$
- ข.  $a \ominus (b \ominus c) = (a \ominus b) \ominus c$
- ค.  $a \Delta (b \ominus c) = (a \Delta b) \ominus (a \Delta c)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ถูก 1 ข้อ คือ ข้อ ก.
- 2) ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ ก. และ ข.
- 3) ถูก 2 ข้อ คือ ข้อ ก. และ ค.
- 4) ถูกทั้ง 3 ข้อ คือ ข้อ ก., ข. และ ค.

KAI0U-Pb1.24 (PAT1'มี.ค.53) ให้  $N$  แทนเซตของจำนวนนับ

กำหนดให้  $a * b = a^b$  สำหรับ  $a, b \in N$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้ สำหรับ  $a, b, c \in N$

- ก.  $a * b = b * a$
- ข.  $(a * b) * c = a * (b * c)$
- ค.  $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
- ง.  $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ถูก 2 ข้อ คือ ข. และ ค.
- 2) ถูก 2 ข้อ คือ ค. และ ง.
- 3) ถูก 1 ข้อ คือ ค.
- 4) ก., ข., ค. และ ง. ผิดทุกข้อ

SheLL2.49 (PAT1'ก.ค.53) ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

กำหนดให้  $a \otimes b$  เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติต่อไปนี้

- ก.  $a \otimes a = a + 4$
- ข.  $a \otimes b = b \otimes a$
- ค.  $\frac{a \otimes (a+b)}{a \otimes b} = \frac{a+b}{b}$

ค่าของ  $(8 \otimes 5) \otimes 100$  เท่ากับเท่าใด ตอบ .....

NaDate-Pb2.49 (PAT1'มี.ค.56) สำหรับ  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

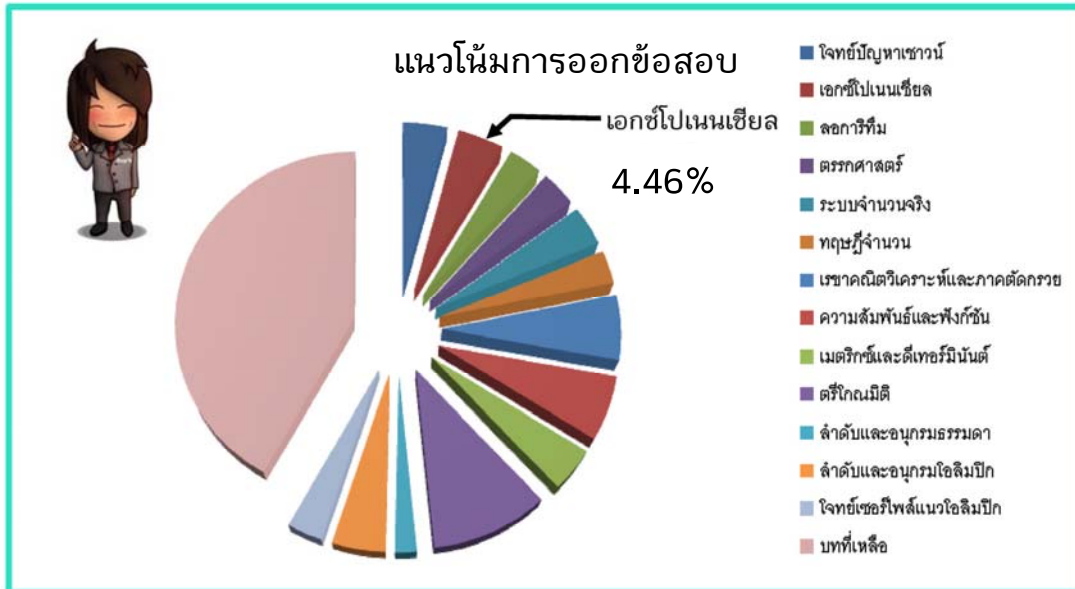
กำหนดให้  $x * y$  เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติต่อไปนี้

- (1)  $x * (xy) = (x * x)y$
- (2)  $x * (1 * x) = 1 * x$
- (3)  $1 * 1 = 1$

ค่าของ  $2 * (5 * (5 * 6))$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

# สรุปภาพรวม “เอกซ์โปเนนเชียล” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเลขยกกำลัง ม.2
2. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเปรียบเทียบความมากน้อยเลขยกกำลัง ม.2
3. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเลขยกกำลังกับรูต์
4. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลัง แบบฐานติดตัวแปร
5. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลัง
6. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลังโอลิมปิก
7. โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการติดรูต์



โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเลขยกกำลัง ม.2

สูตร 2.1  $a^m \times a^n = a^{m+n}$   
 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$  เมื่อ  $a \neq 0$   
 $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$

สูตร 2.2  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$   
 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$   
 $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

สูตร 2.3

FPAT-Pb2 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้า  $ab = 2$  แล้ว  $\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 4                      2) 8                      3) 64                      4) 256

แนวคิดเร็วๆ

ถ้า  $ab = 2 \rightarrow$  วิธีลัด ยกตัวอย่างไปเลย เช่น  $a = 2, b = 1$

จะหา แล้ว  $\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}} = \frac{2^{(2+1)^2}}{2^{(2-1)^2}} = \frac{2^{(3)^2}}{2^{(1)^2}} = \frac{2^9}{2^1} = 2^{9-1} = 2^8 = 256$

---

วิธีจริง จะหา  $\frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}} = 2^{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 2^{(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}$   
 $= 2^{2a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2} = 2^{4 \cdot ab} = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$  ตอบ

QET-G-Pb26.1 ถ้า  $a = 1 - 2^n$  และ  $x = 1 - 2^{-n}$  โดยที่  $a$  และ  $n$  เป็นค่าคงตัว จงหา  $x$

- 1)  $\frac{2-a}{1-a}$                       2)  $\frac{a-2}{1-a}$                       3)  $\frac{a}{1-a}$                       4)  $\frac{a}{a-1}$

QET-G-Pb23.2 จงหารูปอย่างง่ายของ  $\left(\frac{a^{-2}b}{a^3 \cdot b^{-4}}\right)^{-3} \div \left(\frac{a \cdot b^{-1}}{a^{-3} \cdot b^2}\right)^5$

- 1)  $\frac{1}{a^5}$                       2)  $\frac{1}{a^{-9}}$                       3)  $\frac{1}{b^7}$                       4)  $\frac{1}{b^{12}}$

QET-G-Pb23.3 จงหา  $\frac{2^{n+3}}{3^{-n-1}} \times \frac{3^{-n+2}}{5^{-n-1}} \times \frac{2^n - 2^{n-1}}{3 \times 2^n - 4 \times 2^{n-2}} \times \frac{2^{-n+2}}{5^{n+1}}$

- 1) 4  
 2) 864  
 3) 870  
 4) ไม่มีข้อถูก

Tips จากครู Sup'k

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวเปรียบเทียบความมากน้อยเลขยกกำลัง ม.2

สูตร I เมื่อ  $1 < \text{ฐาน}$   
 เจอ  $3.5^x < 3.5^y$   
 $\therefore x < y$

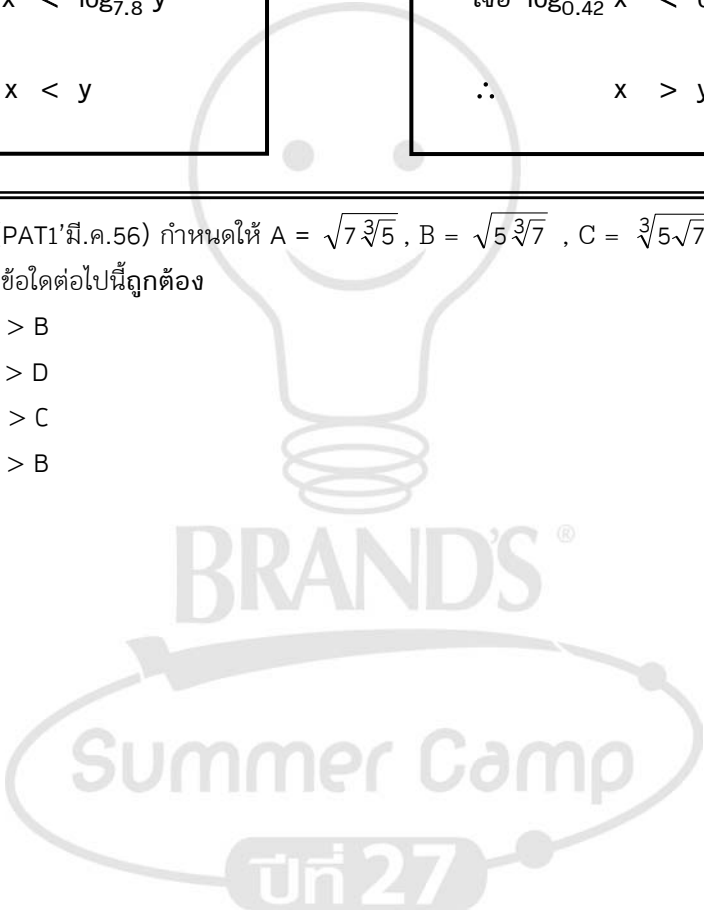
สูตร II เมื่อ  $0 < \text{ฐาน} < 1$   
 เจอ  $0.21^x < 0.21^y$   
 $\therefore x > y$

สูตร III เมื่อ  $1 < \text{ฐาน}$   
 เจอ  $\log_{7.8} x < \log_{7.8} y$   
 $\therefore x < y$

สูตร IV เมื่อ  $0 < \text{ฐาน} < 1$   
 เจอ  $\log_{0.42} x < \log_{0.42} y$   
 $\therefore x > y$

NaDate-Pb1.25 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้  $A = \sqrt{7\sqrt[3]{5}}$ ,  $B = \sqrt{5\sqrt[3]{7}}$ ,  $C = \sqrt[3]{5\sqrt{7}}$   
 และ  $D = \sqrt[3]{7\sqrt{5}}$  ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1)  $D > C > A > B$
- 2)  $A > C > B > D$
- 3)  $A > B > D > C$
- 4)  $C > A > D > B$



VetaNaDate-Pb1.25 (โจทย์ต่างประเทศ) ให้  $A = \sqrt[3]{\sqrt{10}}$ ,  $B = \sqrt{5}$ ,  $C = \sqrt[3]{\sqrt{28}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1)  $A < B < C$
- 2)  $A < C < B$
- 3)  $B < A < C$
- 4)  $B < C < A$
- 5)  $C < A < B$

**โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล : แนวเลขยกกำลังกับรูต**

**สูตร 5.1**

i)  $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

ii)  $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a}$

iii)  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$

**พิสูจน์** ii)  $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot n}} = \sqrt[n^2]{a}$

iii)  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$

**สูตร 5.2**

i)  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

ii)  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

**พิสูจน์** i)  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

ii)  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

**ตัวอย่างที่ 5.2.1** จงหารูปอย่างง่ายของ

i)  $\sqrt{a\sqrt{a}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2}} = a^{\frac{3}{4}}$

ii)  $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^1 \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{1+\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{4}}} = (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7 \cdot 1}{4 \cdot 2}} = a^{\frac{7}{8}}$

iii)  $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^1 \cdot a^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^{1+\frac{7}{8}}} = \sqrt{a^{\frac{15}{8}}} = (a^{\frac{15}{8}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{15 \cdot 1}{8 \cdot 2}} = a^{\frac{15}{16}}$

**ตัวอย่างที่ 5.2.2** จงหารูปอย่างง่ายของ  $\sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt[5]{6a}}$  **ตอบ.....**

**แนวคิด**

$$\sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt[5]{6a}} = \sqrt[3]{a^4 \cdot (6a)^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{a^4 \cdot 6^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{6^{\frac{1}{5}} \cdot a^4 \cdot a^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{6^{\frac{1}{5}} \cdot a^{4+\frac{1}{5}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{6^5} \cdot \frac{21}{6^5}} = \left(\frac{1}{6^5} \cdot a^{\frac{21}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left\{6^{\frac{1}{5}}\right\}^{\frac{1}{3}} \cdot \left\{a^{\frac{21}{5}}\right\}^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 3}} \cdot a^{\frac{21 \cdot 1}{5 \cdot 3}} = 6^{\frac{1}{15}} \cdot a^{\frac{21}{15}} = \sqrt[15]{6^1} \cdot \sqrt[15]{a^{21}}$$

โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลัง แบบฐานติดตัวแปร

BRAN-Pb2.29 (PAT1'ต.ค.53) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง  
 และให้  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2 + 4x + 1)} = 1\}$   
 จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด ตอบ .....

Tips จากครู Sup'k

วิธีจริง

พิจารณาสมการ  $(3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2 + 4x + 1)} = 1$  ออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 เมื่อ  $3x^2 - 11x + 7 > 0$

$$\text{จะได้ } \log(3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2 + 4x + 1)} = 0$$

$$(3x^2 + 4x + 1)\log(3x^2 - 11x + 7) = 0$$

$$\text{ฉะนั้น } 3x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad \log(3x^2 - 11x + 7) = 0$$

$$(3x + 1)(x + 1) = 0 \quad \text{หรือ} \quad 3x^2 - 11x + 7 = 1$$

$$x = -\frac{1}{3}, -1 \quad \text{หรือ} \quad (3x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}, -1 \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{2}{3}, 3$$

กรณีที่ 2 เมื่อ  $3x^2 - 11x + 7 < 0$

เป็นไปได้ทางเดียว คือ  $3x^2 - 11x + 7 = -1$  และ  $3x^2 + 4x + 1$  เป็นเลขคู่

$$3x^2 - 11x + 8 = 0$$

$$(3x - 8)(x - 1) = 0$$

$$x = \frac{8}{3}, -1$$

ถ้า  $x = \frac{8}{3}$  จะได้  $3x^2 + 4x + 1 = 3 \cdot \frac{64}{9} + 4 \cdot \frac{8}{3} + 1 = 33$

ถ้า  $x = 1$  จะได้  $3x^2 + 4x + 1 = 3 + 4 + 1 = 8$

ในกรณีนี้ จึงได้  $x = 1$  เท่านั้น

รวมทั้ง 2 กรณี จะได้  $C = \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 3\}$

$\therefore$  จำนวนสมาชิกของเซต C มีค่าเท่ากับ 5

Sup'k-Pb2.29.1 (ดักแนว PAT1) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

และให้  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)^2 - 8x + 15 = 1\}$  จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

Sup'k-Pb2.29.2 (ดักแนว PAT1) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

และให้  $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^{\frac{\log x + 5}{3}} = 10^{5 + \log x} \right\}$  จงหา  $n(C)$  ตอบ .....

FPAT-Pb14 (PAT1'ก.ค.52) ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่  $x, y > 0$  ซึ่งสอดคล้องกับ  $x^y = y^x$  และ  $y = 5x$  จงหาค่าของ x อยู่ในช่วงใด

1) [0, 1)

2) [1, 2)

3) [3, 4)

4) [5, 6)

Sigo-Pb15.1 (PAT1'พ.ย.57) ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่  $a > 0$  และ  $b > 1$

ถ้า  $ab = b^a$  และ  $b = ab^{3a}$  แล้ว  $20a + 14b$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

**โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลัง**

สูตร 5.1  $a^x = a^y \rightarrow x = y$  เมื่อ  $a \neq -1, 0, 1$   
 สูตร 5.2  $a^x = b^x \rightarrow x = 0$  เมื่อ  $a, b \neq -1, 0, 1$

พิสูจน์ สูตร 5.2 จาก  $a^x = b^x \rightarrow \frac{a^x}{b^x} = 1 \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = 1 \rightarrow \therefore x = 0_{\text{จบ}}$

**Happy-Pb 2.1 (PAT1'มี.ค.57)** กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง  $x \in [0, 2\pi)$  ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$2^{1+3\sin x} - 5 \cdot 2^{2\sin x} + 2^{2+\sin x} = 1$$

จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

แนวคิด  $2^{1+3\sin x} - 5 \cdot 2^{2\sin x} + 2^{2+\sin x} = 1$   
 $2(2^{\sin x})^3 - 5(2^{\sin x})^2 + 4(2^{\sin x}) = 1$   
 $2(2^{\sin x})^3 - 5(2^{\sin x})^2 + 4(2^{\sin x}) - 1 = 0$   
 $(2^{\sin x} - 1)(2(2^{\sin x})^2 - 3(2^{\sin x}) + 1) = 0$   
 $(2^{\sin x} - 1)(2^{\sin x} - 1)(2(2^{\sin x}) - 1) = 0$   
 $2^{\sin x} = 1, \frac{1}{2}$

ถ้า  $2^{\sin x} = 1$  จะได้  $\sin x = 0$  แต่  $x \in [0, 2\pi)$  ดังนั้น  $x = 0, \pi$   
 ถ้า  $2^{\sin x} = \frac{1}{2}$  จะได้  $\sin x = -1$  แต่  $x \in [0, 2\pi)$  ดังนั้น  $x = \frac{3\pi}{2}$

เซตคำตอบของสมการ  $A = \left\{0, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$   
 ดังนั้น จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับ 3 ตัว ตอบ

\*NichTor-Pb2.1 (ตักแนว PAT1) ถ้า  $\theta$  เป็นมุมซึ่ง  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  ที่สอดคล้องกับ

$$3(2^{\sin \theta}) \left(\frac{8}{27}\right)^{\cos^2 \theta} = 2(3^{\sin \theta})$$

แล้ว  $\sin 3\theta$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ **ตอบ** .....  
 วิธีทำ

**Tips จากครู Sup'k**

NichTor-Pb2.2 (แนวข้อสอบ PAT1'ธ.ค.54) ถ้า  $\theta$  เป็นมุมซึ่ง  $180^\circ < \theta < 270^\circ$

ที่สอดคล้องกับ  $3(2\sin\theta)\left(\frac{4}{9}\right)^{\cos^2\theta} = 2(3\sin\theta)$

แล้ว  $3 \tan^2 \theta - 2 \sin 3\theta$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 1                      2) 3                      3) 7                      4) 11

NichTor-Pb2.2 ตอบ 2) 3

$$3(2\sin\theta)\left(\frac{4}{9}\right)^{\cos^2\theta} = 2(3\sin\theta)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin\theta} \left(\frac{2}{3}\right)^{2\cos^2\theta} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin\theta + 2\cos^2\theta} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin\theta + 2\cos^2\theta} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

จะได้  $\sin\theta + 2\cos^2\theta = 1$

$$\sin\theta + 2(1 - \sin^2\theta) = 1$$

$$-2\sin^2\theta + \sin\theta + 1 = 0$$

$$2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$$

$$(\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 1) = 0$$

$$\sin\theta = 1, -\frac{1}{2}$$

เพราะว่า  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  ฉะนั้น  $\sin\theta = -\frac{1}{2}$  ทำให้  $\theta = 210^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore 3 \tan^2 \theta - 2 \sin 3\theta &= 3 \tan^2 210^\circ - 2 \sin 630^\circ \\ &= 3 \tan^2 \frac{7\pi}{6} - 2 \cdot \sin \frac{7\pi}{2} \\ &= 3 \tan^2 \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cdot \sin \frac{7\pi}{2} \\ &\text{ยุบมุมด้วยตรีโกณในวงกลม} \\ &= 3 \tan^2 \left(\frac{\pi}{6}\right) - 2 \cdot \sin \frac{7\pi}{2} \\ &= 3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2(-1) \\ &= 1 + 2 \\ &= 3 \text{ ตอบ} \end{aligned}$$

FPAT-Pb1 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้า  $6^{a+b} = 36$  และ  $5^{a+2b} = 125$  แล้วค่าของ a มีค่าเท่าใด

- 1) 1                                      2) 1.5                                      3) 2                                      4) 2.5

FPAT-Pb3 (PAT1'มี.ค.52) ถ้า  $4^{x-y} = 128$  และ  $3^{2x+y} = 81$  แล้วค่าของ y เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -2                                      2) -1                                      3) 1                                      4) 2

SheLL1.11 (PAT1'ก.ค.53) ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ  $3^{2x+2} - 28(3^x) + 3 = 0$  และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ  $\log x + \log (x - 1) = \log (x + 3)$  แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $A \cup B$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 1                                      2) 2                                      3) 3                                      4) 4

Happy-Pb 2.1.2 (สามัญ'57) จงหาคำตอบของสมการ  $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$

ตอบ .....

AVATAR-Pb5.1 (แนวสอบตรงแพทย์ กสพท) กำหนด  $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} - 2^{4x+5} = 0$

จงหาว่า  $x^2 - 2x$  เท่ากับเท่าใด      **ตอบ** .....

KMK-Pb1.8 (PAT1'ต.ค.52) ถ้า  $x > 0$  และ  $8^x + 8 = 4^x + 2^{x+3}$  แล้วค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

- 1)  $[0, 1)$                                       2)  $[1, 2)$                                       3)  $[2, 3)$                                       4)  $[3, 4)$

\*KaiOU-Pb1.12 (PAT1'มี.ค.53) ถ้าสมการ  $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + a = 0$  มีคำตอบเป็นจำนวนจริงบวก แล้วค่าของ a ที่เป็นไปได้อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

- 1)  $(-\infty, -3)$                                       2)  $(-3, 0)$                                       3)  $(0, 1)$                                       4)  $(1, 3)$

**โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการเลขยกกำลังโอลิมปิก**

\*FPAT-Pb4 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดสมการ  $\left(\frac{4}{25}\right)^x + \left(\frac{9}{25}\right)^x = 1$  จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า a เป็นคำตอบของสมการ แล้ว  $a > 1$       ข. ถ้าสมการมีคำตอบ แล้วคำตอบจะมีเพียงคำตอบเดียว  
ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก      2) ก. ถูก และ ข. ผิด      3) ก. ผิด และ ข. ถูก      4) ก. ผิด และ ข. ผิด

\*NaDate-Pb2.27 (PAT1'มี.ค.56) ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ

$5^{(x-2^A)} 2^y = (16)^{64}$  เมื่อ  $A = \frac{\log y}{\log x}$  แล้วค่าของ  $x + y$  เท่ากับเท่าใด      **ตอบ** .....



โจทย์เอกซ์โปเนนเชียล แนวสมการดีดรู้ด

Tips จากครู Sup'k

Sup'k ระวัง

\* NaDate-Pb 2.30 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ

$$5^{(1+\sqrt{x^2-4x-1})} + 5^{\left(\frac{5+4x-x^2}{2+\sqrt{x^2-4x-1}}\right)} = 126$$

ผลบวกของสมาชิกในเซต A ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด  
ตอบ .....

Tips จากครู Sup'k

วิธีลัด (ฟังครู Sup'k สอนสดในหอประชุม Brand's นะครับ)

---

วิธีจริง  
ขั้นที่ 1

ก่อนอื่นสังเกตว่า

$$\begin{aligned} \frac{5+4x-x^2}{2+\sqrt{x^2-4x-1}} &= \frac{(5+4x-x^2)(2-\sqrt{x^2-4x-1})}{(2+\sqrt{x^2-4x-1})(2-\sqrt{x^2-4x-1})} \\ &= \frac{(5+4x-x^2)(2-\sqrt{x^2-4x-1})}{4-(x^2-4x-1)} \\ &= 2-\sqrt{x^2-4x-1} \end{aligned}$$


ขั้นที่ 2 จากนั้นเพื่อความสะดวกให้  $y = \sqrt{x^2 - 4x - 1}$  (จะเห็น  $y \geq 0$ )

ขั้นที่ 3 แก้สมการ  $5\left(1 + \sqrt{x^2 - 4x - 1}\right) + 5\left(\frac{5 + 4x - x^2}{2 + \sqrt{x^2 - 4x - 1}}\right) = 126$

$$5\left(1 + \sqrt{x^2 - 4x - 1}\right) + 5\left(2 - \sqrt{x^2 - 4x - 1}\right) = 126$$

$$5^{1+y} + 5^{2-y} = 126$$

$$5^y \cdot (5^{1+y} + 5^{2-y}) = 126 \cdot 5^y$$

$$5(5^{2y}) + 25 = 126 \cdot 5^y$$

$$5(5^{2y}) - 126 \cdot 5^y + 25 = 0$$

$$(5 \cdot 5^y - 1)(5^y - 25) = 0$$

$$5^y = \frac{1}{5}, 25$$

$$5^y = 5^{-1}, 5^2$$

$$y = -1, 2$$

แต่  $y \geq 0$  จึงได้  $y = 2$  เท่านั้น

ขั้นที่ 4 ทำให้  $y = \sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$x^2 - 4x - 1 = 4$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x = 5, -1$$

จะได้ เซตคำตอบ  $A = \{-1, 5\}$

$\therefore$  ผลบวกของสมาชิกใน  $A$  ทั้งหมด  $= -1 + 5 = 4$  ตอบ

BRAN-Pb2.27 (PAT1'ต.ค.53) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 2x + 9 - 2\sqrt{x^2 - x + 3} = 15\}$$

แล้วผลบวกของกำลังสองของสมาชิกในเซต A เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

KAIU-Pb2.2 (PAT1'มี.ค.53) ถ้า  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{7x+1}\}$

เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง แล้วผลบวกของสมาชิกใน S เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

SheLL2.27 (PAT1'ก.ค.53) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } S = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{7x-1}\}$$

และ  $T = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 3x + 1, x \in S\}$  แล้วผลบวกของสมาชิกใน T เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

Happy-Pb2.2 (PAT1'มี.ค.57) ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุดที่เป็นคำตอบของสมการ

$$\sqrt{14 + 3x - x^2} - \sqrt{9 + 5x - x^2} = 1$$

แล้วค่าของ  $\left| \frac{4 - 12x^{-1} + 9x^{-2}}{3x^{-2} - 2x^{-1}} \right|$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

Sigo-Pb2.3 (PAT1'พ.ย.57) ให้ S แทนเซตคำตอบของสมการ

$$3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$$

ถ้าผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน S มีค่าเท่ากับ  $\frac{a}{b}$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1

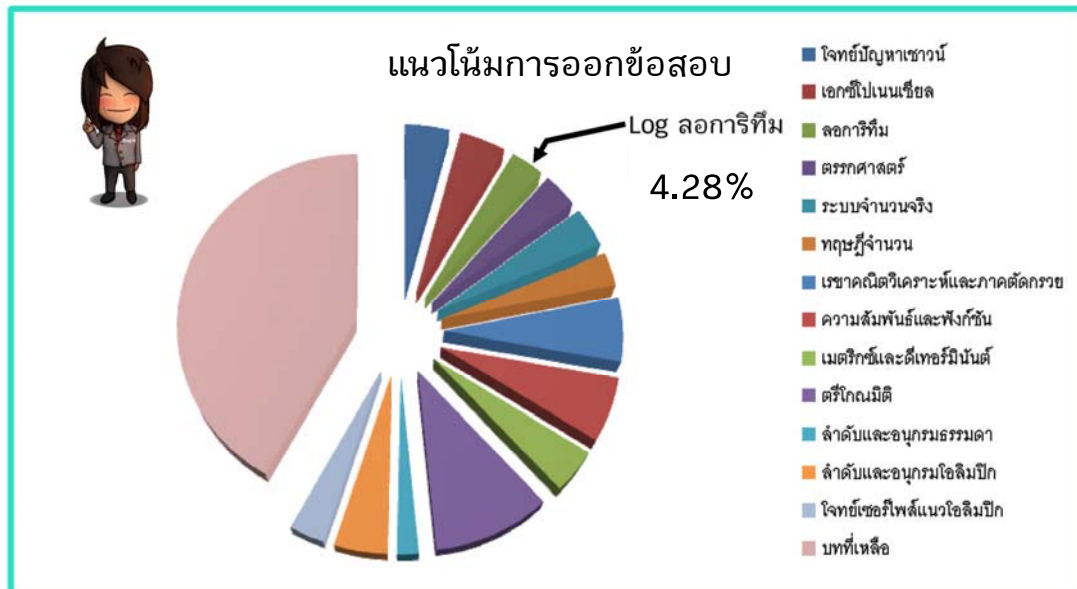
แล้ว a + b เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....



# สรุปภาพรวม “log ลอกการิทึม”

## เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ลอกการิทึม แนวสูตรพื้นฐาน  $\log$
2. โจทย์ลอกการิทึม แนวแก้สมการ  $\log$
3. โจทย์ลอกการิทึม แนวแก้สมการ  $\log$



## สูตรของ log

$\log_a x$   
เงื่อนไข : หลัง  $\log > 0$   
ฐาน  $\log > 0$  และ  $\neq 1$

สูตร 10.1!  $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$   
สูตร 10.2!  $\log_z x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

สูตร 10.3!  $\log_a a = 1$   
สูตร 10.4!  $\log_a 1 = 0$

สูตร 10.5!  $\log_a x^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a x$   
สูตร 10.6!  $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$   
สูตร 10.7!  $\log_a x^n = \log_a 1/n \cdot x$

สูตร 10.8!  $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$   
สูตร 10.9!  $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

สูตร 10.10!  $x^{\log_b a} = a^{\log_b x}$   
เอ็กซ์กำลังล็อก  $a$  นั้นยากอยู่  
🎵 ผากหัวใจให้กันเอาไว้ก่อน  
เปลี่ยนสูตรโดยสลับ  $x$  และ  $a$   
🎵 ที่เราจะต้องหำเห็นไป

ระวัง 10.1!  $\log(x+y) \neq \log x + \log y$   
ระวัง 10.2!  $\log(x-y) \neq \log x - \log y$   
ระวัง 10.3!  $(x \pm y)^n \neq x^n \pm y^n$

$e \approx 2.7182$

$\log_{10} x = \log x$   
 $\log_e x = \ln x$

สูตร 10.11!  $b^{\log_b a} = a$   
ต่อด้วยสูตร ฐาน  $\log$  และ  $\exp$   
🎵 เชื่อว่าเราลำบากอยู่หนใด  
เหมือนกันให้เอาหลัง  $\log$  มาตอบ  
🎵 หัวใจก็ยังมีคนดูแล

### ตัวอย่าง 10.1

- จำ  $\log 2 \approx 0.30103$
- $\log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot (\log 2) \approx 2 \cdot (0.30103) = 0.60206$
- $\log 5 = 1 - \log 2 \approx 1 - 0.30103 = 0.69897$
- $\log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot (\log 2) \approx 3 \cdot (0.30103) = 0.90309$

สูตร 10.12!  $\log 2 = 1 - \log 5$

🎵 อาจจะมีบางคราว เราพบใครใหม่

สูตร 10.13! และ  $\log 5$  ก็  $= 1 - \log 2$

🎵 เกิดวันไหน ไปตามประสาคนไกล

### ตัวอย่าง 10.3

- จำ  $\log 3 \approx 0.4771$
- $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 \approx 0.30103 + 0.4771 = 0.77813$
- $\log 9 = \log 3^2 = 2 \cdot (\log 3) \approx 2 \cdot (0.4771) = 0.9542$

ตัวอย่าง 10.5 จงหาค่าของ  $\log_3 15 + \log_3 12 + \log_3 5 - \log_3 9$   
วิธีทำ  $= \log_3 \left( \frac{15 \times 2 \times 5}{9} \right) = \log_3 100 = \log_3 10^2 = 2 \cdot (\log_3 10)$   
 $= 2 \cdot \left( \frac{1}{\log_{10} 3} \right) = 2 \cdot \left( \frac{1}{\log 3} \right) \approx 2 \cdot \left( \frac{1}{0.4771} \right)$

- จำ  $\log 1 = 0$
- จำ  $\log 7 \approx 0.84509$
- $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$

**โจทย์ลอการิทึม แนวสูตรพื้นฐาน**

**BRAN-Pb2.35 (PAT1'ต.ค.53)** กำหนดให้  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1

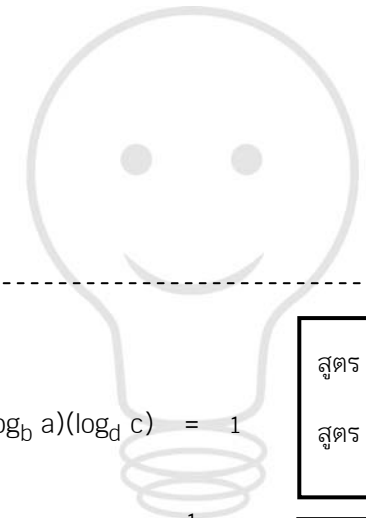
ถ้า  $(\log_b a)(\log_d c) = 1$

แล้วจงหาค่าของ  $a^{(\log_b c-1)} b^{(\log_c d-1)} c^{(\log_d a-1)} d^{(\log_a b-1)}$  **ตอบ** ..... สูตร 10.3!  $\log_m m = 1$

**วิธีเร็วๆ**

ถ้า  $(\log_b a)(\log_d c) = 1$

จะหาค่าของ  $a^{(\log_b c-1)} b^{(\log_c d-1)} c^{(\log_d a-1)} d^{(\log_a b-1)}$



**วิธีจริง**

**BRAN-Pb2.35** **ตอบ 1**

เพราะว่า

$$(\log_b a)(\log_d c) = 1$$

$$\frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log c}{\log d}$$

$$= 1$$

จะได้

$$(\log_d a)(\log_b c) = 1$$

ฉะนั้น  $\log_b c = \frac{1}{\log_d a} = \log_a d$  ,  $\log_c d = \frac{1}{\log_d c} = \log_b a$

$$\log_d a = \frac{1}{\log_b c} = \log_c b$$
 ,  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} = \log_d c$

$$\begin{aligned} \therefore a^{(\log_b c-1)} b^{(\log_c d-1)} c^{(\log_d a-1)} d^{(\log_a b-1)} &= \frac{a^{\log_b c} \cdot b^{\log_c d} \cdot c^{\log_d a} \cdot d^{\log_a b}}{abcd} \\ &= \frac{a^{\log_a d} \cdot b^{\log_b a} \cdot c^{\log_c b} \cdot d^{\log_d c}}{abcd} \\ &= \frac{d \cdot a \cdot b \cdot c}{abcd} = 1 \end{aligned}$$

สูตร 10.8!  $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$   
 สูตร 10.9!  $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

สูตร 10.11!  $b^{\log_b a} = a$   
 \*ด้วยสูตรฐาน log และ expo  
 \*เพื่อความลำบากอยู่ไหน  
 \*เหมือนกันให้เอา.....  
 \*หัวใจก็ยังมีคนดูแล

**โจทย์เพิ่มเติมลอการิทึม แนวสูตรพื้นฐาน**

SheLL1.14 (PAT1'ก.ค.53) ให้  $x$  เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ  $3^{5x} \cdot 9^{x^2} = 27$

และ  $y = \frac{(\log_2 3)(\log_4 5)(\log_6 7)}{(\log_4 3)(\log_6 5)(\log_8 7)}$  จงหาค่าของ  $x^y$  เท่ากับข้อใด

- 1)  $-\frac{1}{8}$
- 2)  $\frac{1}{8}$
- 3)  $-27$
- 4)  $27$

FPAT-Pb9 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดให้  $a, b, c, d$  เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 โดยที่  $\log_a d = 30, \log_b d = 50$  และ  $\log_{abc} d = 15$  จงหาค่าของ  $\log_c d$  เท่ากับเท่าใด

- 1) 75
- 2) 120
- 3) 150
- 4) 180

FPAT-Pb8 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า  $m \cdot \log_{50} 5 + n \cdot \log_{50} 2 = 1$  แล้ว  $m + n$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 2
- 2) 3
- 3) 4
- 4) 6

KAIU-Pb1.10 (PAT1'มี.ค.53) กำหนดให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงบวก และ  $y \neq 1$  ถ้า  $\log_y 2x = a$  และ  $2^y = b$  แล้ว  $x$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\frac{1}{2} (\log_2 b)^a$
- 2)  $2(\log_2 b)^a$
- 3)  $\frac{a}{2} (\log_2 b)$
- 4)  $2a(\log_2 b)$

FPAT-Pb7 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้า  $4(\log a)^2 + 9(\log b)^2 = 12(\log a)(\log b)$  แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1)  $b^2 = a$
- 2)  $a^2 = b$
- 3)  $a^3 = b^2$
- 4)  $a^2 = b^3$

**โจทย์ลอการิทึม แนวสูตรพื้นฐาน VS ผลบวกราก, ผลคูณราก**

BRAN-Pb1.10 (PAT1'ต.ค.53) ถ้า  $a, b$  และ  $c$  เป็นรากของสมการ  $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$  แล้วจงหา

$\log_{27} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนจริง

- 1)  $\frac{1}{9}$
- 2)  $\frac{1}{3}$
- 3)  $\frac{2}{3}$
- 4) 1

โจทย์ลอการิทึม แนวแก้สมการ log

สูตร I  
 เจอ  $\log_m \heartsuit = \log_m \square \rightarrow \dots\dots\dots$

สูตร II  
 เจอ  $\log_5 \heartsuit = 7 \rightarrow \dots\dots\dots$

Happy-Pb 3.1 (PAT1'เม.ย.57) ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\log_2(x + 7)^2 + 4\log_4(x - 3) = 3\log_8(64x^2 - 256x + 256)$$

จงหาผลบวกของสมาชิกทุกตัวในเซต A

ตอบ 0005.00

ข้อควรระวัง จากครู Sup'k

แนวคิด

$$\log_2(x + 7)^2 + 4\log_4(x - 3) = 3\log_8(64x^2 - 256x + 256)$$

$$\log_2(x + 7)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\log_2(x - 3)\right) = 3\left(\frac{1}{3}\log_2(8x - 16)^2\right)$$

$$\log_2(x + 7)^2 + 2\log_2(x - 3) = \log_2(8x + 16)^2$$

$$\log_2(x + 7)^2 + \log_2(x - 3)^2 = \log_2(8x + 16)^2$$

$$\log_2[(x + 7)(x - 3)]^2 = \log_2(8x - 16)^2$$

ฉะนั้น

$$[(x + 7)(x - 3)]^2 = (8x - 16)^2$$

$$(x^2 + 4x - 21)^2 - (8x - 16)^2 = 0$$

จะได้

$$(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 12x - 37) = 0 \quad [a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$$

$$(x + 1)(x - 5)(x^2 + 12x - 37) = 0$$

$\therefore (x + 1) = 0, (x - 5) = 0, (x^2 + 12x - 37) = 0$

$\therefore x = -1, x = 5, x = \frac{-12 \pm \sqrt{292}}{2}$

ตรวจคำตอบเงื่อนไขของ log จะได้  $\therefore x = 5$   
 จะได้เซตคำตอบของสมการ  $A = \{5\}$   
 ดังนั้น ผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน A เท่ากับ 5



**BRAN-Pb1.11 (PAT1'ต.ค.53)** เซตคำตอบของสมการ  $\log_3^2 x - \log_{27} x^3 = 6$  ตรงกับเซตคำตอบของสมการในข้อใดต่อไปนี้

1)  $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = 0$

2)  $2 \log_2 (x + 1) - \log_2 (x^2 - 14x + 41) = 1$

3)  $3^{(1+\sqrt{x^2 - 8x + 5})} + 3^{(2-\sqrt{x^2 - 8x - 5})} = 28$

4)  $\log_{3x} 3 + \log_{27} 3x + \frac{4}{3} = 0$

ตอบ ข้อ 1.

แนวคิด

เนื่องจาก  $\log_{27} x^3 = \frac{\log_3 x^3}{\log_3 27} = \frac{3 \log_3 x}{3} = \log_3 x$

สมการ  $\log_3^2 x - \log_{27} x^3 = 6$  ที่ต้องการแก้

จึงเปลี่ยนรูปเป็น  $(\log_3 x)^2 - \log_3 x = 6$

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6 = 0$$

$$(\log_3 x - 3)(\log_3 x + 2) = 0$$

$$\log_3 x = 3, -2$$

$$x = 3^3, 3^{-2} \rightarrow x = 27, \frac{1}{9}$$

$\therefore$  เซตคำตอบ คือ  $\{\frac{1}{9}, 27\}$ , ต่อไปดูว่าเซตคำตอบนี้ตรงกับเซตคำตอบในตัวเลือกใด

(1)  $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = 0$

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9x^2 - 244x + 29}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{9x^2 - 244x + 29} = \frac{1}{2}$$

$$9x^2 - 244x + 27 = 0$$

$$(9x - 1)(x - 27) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{9}, 27$$

เซตคำตอบของตัวเลือก 1. คือ  $\{\frac{1}{9}, 27\}$  ตัวเลือก 1. จึงเป็นคำตอบ

เพื่อประโยชน์ของน้องๆ จะหาเซตคำตอบของตัวเลือกอื่นๆ ที่เหลือด้วย

$$(2) \quad 2 \log_2 (x + 1) - \log_2 (x^2 - 14x + 41) = 1 \quad (\text{เงื่อนไข : หลัง } \log > 0 \rightarrow \therefore x > -1)$$

$$\log_2 (x + 1)^2 = \log_2 2 + \log_2 (x^2 - 14x + 41)$$

$$\log_2 (x^2 + 2x + 1) = \log_2 2(x^2 - 14x + 41)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 - 14x + 41)$$

$$x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$(x - 27)(x - 3) = 0 \rightarrow x = 3, 27$$

เซตคำตอบของตัวเลือก 2. คือ  $\{3, 27\}$

$$(3) \quad 3 \left( 1 + \sqrt{x^2 - 8x - 5} \right) + 3 \left( 2 - \sqrt{x^2 - 8x - 5} \right) = 28$$

เพื่อความสะดวก ให้  $y = \sqrt{x^2 - 8x - 5}$  ฉะนั้น  $y \geq 0$

และได้ว่า  $3^{1+y} + 3^{2-y} = 28$

$$3 \cdot 3^{2y} + 9 = 28 \cdot 3^y$$

$$3 \cdot 3^{2y} - 28 \cdot 3^y + 9 = 0$$

$$(3 \cdot 3^{2y} - 1)(3^y - 9) = 0$$

$$3^y = \frac{1}{3}, 9 \rightarrow y = -1, 2$$

จะได้  $y = 2$  เท่านั้น  $\Rightarrow \sqrt{x^2 - 8x - 5} = 2$

$$x^2 - 8x - 5 = 4$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$(x - 9)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 9, -1$$

เซตคำตอบของตัวเลือก 3. คือ  $\{-1, 9\}$

$$(4) \quad \log_{3x} 3 + \log_{27} 3x + \frac{4}{3} = 0$$

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 3x} + \frac{\log_3 3x}{\log_3 27} + \frac{4}{3} = 0$$

$$\frac{1}{\log_3 3x} + \frac{\log_3 3x}{3} + \frac{4}{3} = 0$$

$$(\log_3 3x)^2 + 4(\log_3 3x) + 3 = 0$$

$$(\log_3 3x + 3)(\log_3 3x + 1) = 0$$

$$\log_3 3x = -3, -1$$

$$3x = \frac{1}{27}, \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{81}, \frac{1}{9}$$

เซตคำตอบของตัวเลือก 4. คือ  $\left\{ \frac{1}{81}, \frac{1}{9} \right\}$

FPAT-Pb11 (PAT1'ก.ค.52) เซตคำตอบของสมการ  $\log\sqrt{2}(4-x) = \log_2(9-4x) + 1$  เป็นสับเซตของช่วงใด

- 1) [-9, -7)                      2) [-7, -2)                      3) [-2, 2)                      4) [2, 7)

NaDate-Pb2.29 (PAT1'มี.ค.56) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } A = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_{\sqrt{3}}(x-1) - \log_{\sqrt[3]{3}}(x-1) = 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\}$$

แล้วสามเท่าของผลคูณของสมาชิกในเซต  $A \cup B$  ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด *ตอบ*.....

KMK-Pb2.10 (PAT1'ต.ค.52) รากที่มีค่าน้อยที่สุดของสมการ  $2^{\log(x-2)} \cdot 2^{\log(x-3)} = 2^{\log 2}$

มีค่าเท่าใด *ตอบ*.....

FPAT-Pb12 (PAT1'มี.ค.52) ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ  $\log_3 x = 1 + \log_x 9$  อยู่ในช่วงใด

- 1) [0, 4)                      2) [4, 8)                      3) [8, 12)                      4) [12, 16)

KMK-Pb2.9 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้  $\log_y x + 4 \log_x y = 4$  แล้ว  $\log_y x^3$  เท่ากับเท่าใด

*ตอบ*.....

Happy-Pb 3.2 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\log_3(3^{2x^2+2x} + 9) = x^2 + x + \frac{1}{\log 3}$$

$$\text{และให้ } B = \{x^2 \mid x \in A\}$$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด *ตอบ*.....

Happy-Pb 3.3 (PAT1'เม.ย.57)

$$\text{ให้ } A \text{ เป็นเซตคำตอบของสมการ } \log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + \log_6 5$$

$$\text{และ } B \text{ เป็นเซตคำตอบของสมการ } x + \sqrt{1-x^2} = 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

จงหาจำนวนสมาชิกของ  $A \cup B$  *ตอบ*.....

Sigo-Pb 3.4 (PAT1'มี.ค.58) ให้ A แทนเซตของคู่อันดับ  $(x, y)$  ทั้งหมดที่สอดคล้องกับระบบสมการ

$$2^{2x} \log_{\frac{1}{4}} y = 1 + 2^{4x-1}$$

$$9(2^{2x}) \log_{\frac{1}{8}} y = 9 + \log_{\frac{1}{2}} y$$

$$\text{และ } B = \left\{ \frac{x}{y} \mid (x, y) \in A \right\}$$

ค่าน้อยสุดของสมาชิกในเซต B เท่ากับเท่าใด *ตอบ*.....

โจทย์เพิ่มเติมลอการิทึม แนวแก้อสมการ log

NaDate-Pb1.12 (PAT1'มี.ค.56) ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ  $\log_x \left( \frac{2}{x-1} \right) \geq 1$

แล้ว A เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\{x \in R \mid |x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2\}$
- 2)  $\{x \in R \mid |2x + 5| > 9\}$
- 3)  $\{x \in R \mid 0 \leq |x + 3| \leq 5\}$
- 4)  $\{x \in R \mid x^3 > 3x^2\}$

วิธีลัด (ฟังครู Sup'k สอนสดในหอประชุม Brand's นะครับ)



วิธีจริง

เงื่อนไข : หลัง log > 0

$$\therefore \text{จะได้ } \frac{2}{x-1} > 0 \rightarrow x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \rightarrow \therefore x \in (1, \infty) \quad \dots(1)$$

ต่อไปแก้อสมการ,  $\log_x \left( \frac{2}{x-1} \right) \geq 1$

$$\frac{2}{x-1} \geq 1 \quad (\text{เพราะ } x > 1, \text{ ไม่ต้องกลับทิศอสมการ})$$

$$2 \geq x(x-1)$$

$$0 \geq x^2 - x - 2$$

$$0 \geq (x-2)(x+1)$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2$$

$$\therefore x \in [-1, 2] \quad \dots(2)$$

นำ  $(1) \cap (2)$  ; จะได้เซตคำตอบของอสมการ คือ  $(1, \infty) \cap [-1, 2]$

คือ  $(1, 2]$

$$\therefore A = (1, 2]$$

ต่อไปตรวจสอบตัวเลือก

ตัวเลือก 1.  $|x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2$

จะได้  $x^2 + 2x - 3 \leq 0 \rightarrow (x + 3)(x - 1) \leq 0 \rightarrow \therefore x \in [-3, 1]$   
 $\therefore A \not\subset [-3, 1]$

ตัวเลือก 2.  $|2x + 5| > 9$

จะได้  $2x + 5 > 9$  หรือ  $2x + 5 < -9$   
 $x > 2$  หรือ  $x < -7$   
 $\therefore x \in (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$   
 $\therefore A \not\subset (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$

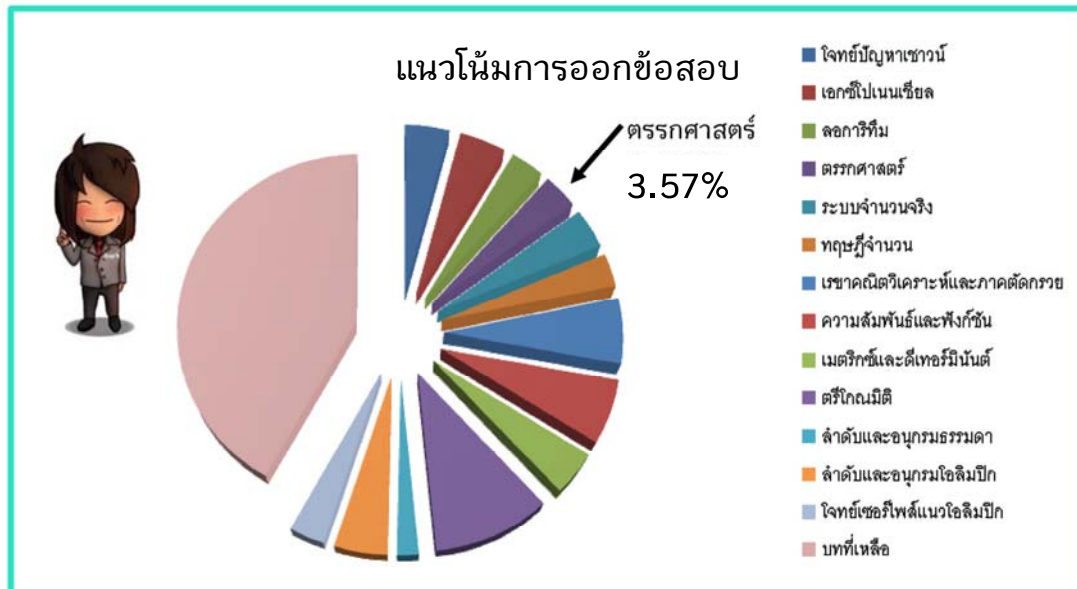
ตัวเลือก 3.  $0 \leq |x + 3| \leq 5$

จะได้  $-5 \leq x + 3 \leq 5$   
 $-8 \leq x \leq 2$   
 $\therefore x \in [-8, 2]$   
 $\therefore A \subset [-8, 2] \quad \therefore$  ตอบตัวเลือก 3.

ตัวเลือก 4.  $x^3 > 3x^2$

จะได้  $x^2(x - 3) > 0$   
 $x - 3 > 0$   
 $x > 3$   
 $\therefore x \in (3, \infty)$   
 $\therefore A \not\subset (3, \infty)$

# สรุปภาพรวม “ตรรกศาสตร์” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวลำดับการทำแบบตรง VS ลำดับการทำแบบย้อนกลับ
2. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวสมมูล VS ลัจฉิรันดร์
3. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวลึบปริมาณตัวแปรเดียว
4. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวลึบปริมาณสองตัวแปร
5. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวสมเหตุผล
6. โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวอื่นๆ

ทบทวนสูตรตรรกศาสตร์

นิเสธ

P	$\sim P$
T	$\sim T \equiv F$
F	$\sim F \equiv T$

และ

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	$T \wedge T \equiv T$
T	F	$T \wedge F \equiv F$
F	T	$F \wedge T \equiv F$
F	F	$F \wedge F \equiv F$

หรือ

P	Q	$P \vee Q$
T	T	$T \vee T \equiv T$
T	F	$T \vee F \equiv T$
F	T	$F \vee T \equiv T$
F	F	$F \vee F \equiv F$

ถ้า...แล้ว...

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	$T \rightarrow T \equiv T$
T	F	$T \rightarrow F \equiv F$
F	T	$F \rightarrow T \equiv T$
F	F	$F \rightarrow F \equiv T$

...ก็ต่อเมื่อ...

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	$T \leftrightarrow T \equiv T$
T	F	$T \leftrightarrow F \equiv F$
F	T	$F \leftrightarrow T \equiv F$
F	F	$F \leftrightarrow F \equiv T$

⊕ ประพจน์ที่ **สมมูลกัน** คือ ประพจน์สองประพจน์ที่มีค่าความจริง **เหมือนกัน** ทุกกรณี กรณีต่อกรณี สมมูลใช้สัญลักษณ์ คือ  $\equiv$   
เช่น  $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
T	T	T	$(T \wedge T) \equiv T$	$T \rightarrow T \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$
T	T	F	$(T \wedge T) \equiv T$	$T \rightarrow F \equiv F$	F	F	$F \vee F \equiv F$
T	F	T	$(T \wedge F) \equiv F$	$F \rightarrow T \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$
T	F	F	$(T \wedge F) \equiv F$	$F \rightarrow F \equiv T$	F	T	$F \vee T \equiv T$
F	T	T	$(F \wedge T) \equiv F$	$F \rightarrow T \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$
F	T	F	$(F \wedge T) \equiv F$	$F \rightarrow F \equiv T$	T	F	$T \vee F \equiv T$
F	F	T	$(F \wedge F) \equiv F$	$F \rightarrow T \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$
F	F	F	$(F \wedge F) \equiv F$	$F \rightarrow F \equiv T$	T	T	$T \vee T \equiv T$

สูตร

กฎการสลับที่  $p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

กฎการเปลี่ยนกลุ่ม  $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

กฎการคูณกระจาย  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

กฎเดอมอร์แกน  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

กฎนิเสธ  $\sim(\sim p) \equiv p$

โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวพื้นฐาน ลำดับการทำแบบตรง

Happy-Pb 4.1 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่  $ab > 0$

ให้ p แทนประพจน์ “ถ้า  $a < b$  แล้ว  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”

q แทนประพจน์ “ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$ ”

หลัก I ลำดับการทำแบบตรง

ขั้นที่ 1 ทำในวงเล็บก่อน

ขั้นที่ 2 ทำ นิเสธ

ขั้นที่ 3 ทำ  $\wedge, \vee$

ขั้นที่ 4 ทำ  $\rightarrow$

ขั้นที่ 5 ทำ  $\leftrightarrow$

ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1.  $(p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim p)$

2.  $(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$

3.  $(p \wedge \sim q) \wedge (q \rightarrow p)$

4.  $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$



Happy-Pb 4.2 (PAT1'เม.ย.57) กำหนดให้  $p, q, r, s$  เป็นประพจน์

โดยที่  $p \rightarrow (q \wedge r)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

และ  $p \leftrightarrow (s \vee t)$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1.  $(q \wedge s) \rightarrow (p \wedge q)$

หลัก II ลำดับการทำแบบย้อนกลับ

ขั้นที่ 1 ทำ  $\leftrightarrow$

ขั้นที่ 2 ทำ  $\rightarrow$

ขั้นที่ 3 ทำ  $\wedge, \vee$

ขั้นที่ 4 ทำ นิเสธ

ขั้นที่ 5 ทำในวงเล็บ

2.  $(s \wedge t) \rightarrow \sim q$

3.  $(q \vee s) \leftrightarrow p$

4.  $(p \rightarrow r) \rightarrow s$

โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวสมมูล VS ลัจฉนิรันดร์

BRAN-Pb1.1 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดให้ A, B และ C เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

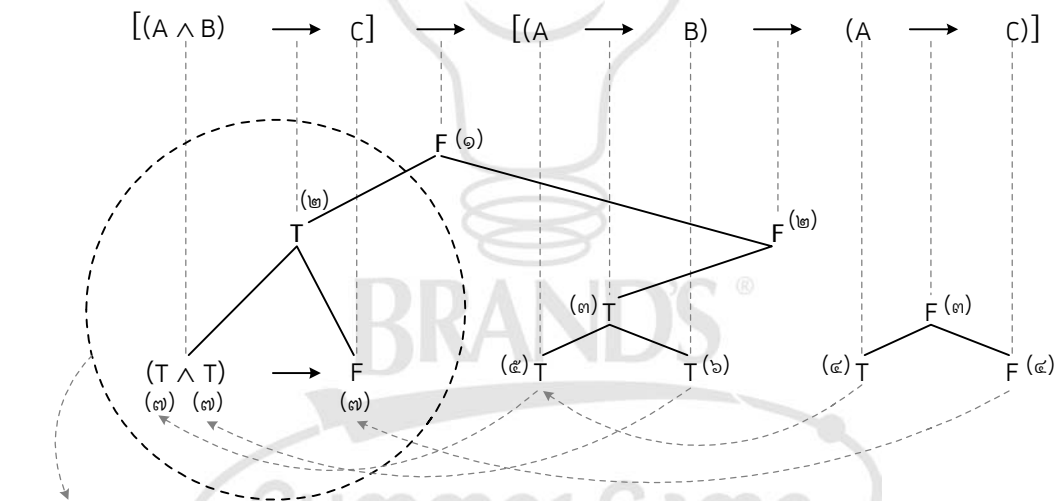
- 1) ถ้า  $A \leftrightarrow B$  มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว  $(B \wedge C) \rightarrow (\sim A \rightarrow C)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ
- 2) ประพจน์  $A \rightarrow [(A \wedge B) \vee (B \vee C)]$  เป็นลัจฉนิรันดร์
- 3) ประพจน์  $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$  เป็นลัจฉนิรันดร์
- 4) ประพจน์  $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$  สมมูลกับประพจน์  $(A \wedge B) \rightarrow C$

Tips สูตรลัด จากครู Sup'k

ตอบ ข้อ 3)

แนวคิด

ข้อ 3) ประพจน์  $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$  เป็นลัจฉนิรันดร์



เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะว่าจากชั้นที่ (๓)

$$\begin{aligned}
 & (T \wedge T) \rightarrow F \\
 \equiv & (T) \rightarrow F \\
 \equiv & F \quad \text{ซึ่งไม่ตรงกับการแตกกิ่งในชั้นที่ (๒)}
 \end{aligned}$$

การเกิดข้อขัดแย้ง หมายถึง การจับเท็จ **ไม่สำเร็จ**

แสดงว่า ประพจน์ในข้อนี้ เป็นลัจฉนิรันดร์

SheLL1.1 (PAT1'ก.ค.53) ให้  $p, q, r$  และ  $s$  เป็นประพจน์

ถ้าประพจน์  $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

และประพจน์  $p \leftrightarrow r$  มีค่าความจริงเป็นจริง ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

- |  |  |
|--|--|
| 1) $(q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r)$              | 2) $q \rightarrow [p \vee (q \wedge \sim r)]$                  |
| 3) $(p \rightarrow s) \leftrightarrow (r \leftrightarrow q)$ | 4) $(r \leftrightarrow s) \wedge [q \rightarrow (p \wedge r)]$ |

Peach-Pb2.44 (แนวPAT1'ต.ค.55) จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า  $p, q, r$  เป็นประพจน์ ซึ่ง  $p \Rightarrow (q \wedge r)$  มีค่าความจริงเป็นจริง  
แล้วประพจน์  $r \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์ คือ  $\{x | x^2 \leq 2x + 3\}$   
แล้ว ประพจน์  $\exists x [3^x + 6 = 3^{3-x}]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) ก. ถูก และ ข. ถูก | 2) ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3) ก. ผิด และ ข. ถูก | 4) ก. ผิด และ ข. ผิด |

KMK-Pb1.2 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้  $p, q, r$  เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า  $q \wedge r$  มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว  $p$  และ  $p \vee [(q \wedge r) \rightarrow p]$  มีค่าความจริงเหมือนกัน

ข. ถ้า  $p$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว  $r$  และ  $(p \rightarrow q) \wedge r$  มีค่าความจริงเหมือนกัน

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) ก. ถูก และ ข. ถูก | 2) ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3) ก. ผิด และ ข. ถูก | 4) ก. ผิด และ ข. ผิด |

FPAT-Pb17 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้  $p, q, r$  เป็นประพจน์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ประพจน์  $p \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$  สมมูลกับประพจน์  $p \rightarrow (q \vee r)$

ข. ประพจน์  $p \wedge (q \rightarrow r)$  สมมูลกับประพจน์  $(q \rightarrow p) \vee \sim(p \rightarrow \sim r)$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) ก. ถูก และ ข. ถูก | 2) ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3) ก. ผิด และ ข. ถูก | 4) ก. ผิด และ ข. ผิด |

FPAT-Pb18 (B-PAT1'ต.ค.51) กำหนดให้ P, Q, R, S เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(i) ประพจน์  $(\sim P \vee Q) \rightarrow (R \wedge \sim S)$  สมมูลกับ  $(S \vee \sim R) \rightarrow (P \wedge \sim Q)$

(ii) ประพจน์  $(P \vee R) \wedge [(P \wedge R) \rightarrow (Q \vee R \vee \sim S)]$  เป็นสัจนิรันดร์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) ข้อ (i) ถูก และ ข้อ (ii) ถูก | 2) ข้อ (i) ถูก และ ข้อ (ii) ผิด |
| 3) ข้อ (i) ผิด และ ข้อ (ii) ถูก | 4) ข้อ (i) ผิด และ ข้อ (ii) ผิด |

Peach-Pb2.43 (แนว PAT1'ต.ค.55) สำหรับประพจน์ p, q, r ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์

- |   |   |
|---|---|
| 1) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$                      | 2) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \leftrightarrow p)$     |
| 3) $((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ | 4) $((p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ |

KAIU-Pb1.1 (PAT1'มี.ค.53) ให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

- |   |  |
|---|--|
| 1) $(p \rightarrow q) \vee p$                   | 2) $(\sim p \wedge q) \rightarrow q$                               |
| 3) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ | 4) $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ |

Happy-Pb 4.3 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใดๆ

พิจารณาคำข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้าประพจน์  $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$  และประพจน์ p มีค่าความจริงเป็นจริง แล้วสรุปได้ว่าประพจน์ s มีค่าความจริงเป็นจริง

(ข) ประพจน์  $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$  สมมูลกับประพจน์  $[q \rightarrow (p \rightarrow r)] \wedge [p \rightarrow (q \rightarrow s)]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

Sigo-Pb 4.4 (PAT1'มี.ค.58) ให้ p, q และ r เป็นประพจน์

พิจารณาคำข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า  $p \rightarrow (q \wedge r)$  มีค่าความจริงเป็นจริง

แล้ว  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$  มีค่าความจริงเป็นจริง

(ข) ถ้า  $p \rightarrow (q \wedge r)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แล้ว  $[(\sim p \rightarrow q) \wedge r] \vee (p \vee \sim r)$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

**โจทย์ตรรกศาสตร์ แนววลีบ่งปริมาณตัวแปรเดียว**

**BRAN-Pb1.2 (PAT1'ต.ค.53)** กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง

และ  $P(x)$  แทน  $\sqrt{(x+1)^2} = x + 1$

$Q(x)$  แทน  $\sqrt{x+1} > 2$

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์  $\exists x[P(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\exists x[\sim P(x)] \rightarrow \forall x[\sim Q(x)]$   | 2) $\exists x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$           |
| 3) $\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)]$ | 4) $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]$ |

**NaDate-Pb1.3 (PAT'มี.ค.56)** กำหนดให้  $P(x)$  แทน  $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| < 2$

และให้  $Q(x)$  แทน  $|2x + 1| > x - 1$

เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใด

ที่ทำให้ข้อความ  $\forall x[Q(x)] \rightarrow \exists x[P(x)]$  มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

- 1)  $(-\infty, -4)$
- 2)  $(-5, -1)$
- 3)  $(-3, 2)$
- 4)  $(-1, \infty)$

**Happy-Pb4.4 (PAT'เม.ย.57)** กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริงบวก พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $\forall x[|x^2 - 5x + 4| < x^2 + 6x + 5]$  มีค่าความจริงเป็น**จริง**

(ข)  $\forall x[|x^2 - 1| \geq 2x - 2]$  มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

ข้อใดต่อไปนี้มี**ถูกต้อง**

- 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก
- 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
- 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
- 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

โจทย์ตรรกศาสตร์ แนววลีบ่งปริมาณ 2 ตัวแปร

SheLL1.2 (PAT1'ก.ค.53) กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ  $\{-1, 0, 1\}$  ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1)  $\forall x \forall y [x + y + 2 > 0]$  มีค่าความจริงเป็นจริง
- 2)  $\forall x \exists y [x + y \geq 0]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ
- 3)  $\exists x \forall y [x + y = 1]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ
- 4)  $\exists x \exists y [x + y > 1]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แนวคิด

เรามีเอกภพสัมพัทธ์ คือ  $\{-1, 0, 1\}$  ซึ่งจะใช้พิจารณาค่าความจริงของแต่ละตัวเลือก

- (1) ผิด, เนื่องจาก  $\forall x \forall y [x + y + 2 > 0]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ  
เพราะว่ามี  $x = y = -1$   
ที่ทำให้  $(-1) + (-1) + 2 > 0$   
 $2 > 0$  เป็นเท็จ
- (2) ผิด, เนื่องจาก  $\forall x \exists y [x + y \geq 0]$  มีค่าความจริงเป็นจริง  
ให้  $x$  เป็นสมาชิกใดๆ ใน  $\{-1, 0, 1\}$   
เลือก  $y = -x$  จะได้  $x + y = 0 \geq 0$   
ดังนั้น  $\forall x \exists y [x + y \geq 0] \equiv T$
- (3) ถูก, เนื่องจาก  $\exists x \forall y [x + y = 1]$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ  
- เมื่อ  $x = -1$  จะมี  $y = 1$   
ที่ทำให้  $(-1) + 1 = 1 \Rightarrow 0 = 1$  (เป็นเท็จ)  
- เมื่อ  $x = 0$  จะมี  $y = 0$   
ที่ทำให้  $0 + 0 = 1 \Rightarrow 0 = 1$  (เป็นเท็จ)  
- เมื่อ  $x = 1$  จะมี  $y = -1$   
ที่ทำให้  $1 + (-1) = 1 \Rightarrow 0 = 1$  (เป็นเท็จ)
- (4) ผิด, เนื่องจาก  $\exists x \exists y [x + y > 1]$  มีค่าความจริงเป็นจริง  
เพราะว่ามี  $x = y = 1$

**Sigo-Pb1.2** (PAT1'พ.ย.57) ให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง

กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ  $\{x \in R \mid 0 < x < 1\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $\exists x \forall y [x^2 - y^2 < y - x]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

(ข)  $\forall x \forall y [|x - y| < 1 - xy]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

**KAiOU-Pb1.2** (PAT1'มี.ค.53) ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ  $\{-1, 0, 1\}$  ค่าความจริงของ  $\forall x \exists y [x^2 + x = y^2 + y]$  เป็นเท็จ

2) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง ค่าความจริงของ  $\exists x [3^x = \log_3 x]$  เป็นจริง

3) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง

นิเสธของข้อความ  $\forall x \exists y [(x > 0 \wedge y \leq 0) \wedge (xy < 0)]$

คือ  $\exists x \forall y [(xy < 0) \rightarrow (x \leq 0 \vee y > 0)]$

4) ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็ม

นิเสธของข้อความ  $\forall x [(x > 0) \rightarrow (x^3 \geq x^2)]$  คือ  $\exists x [(x \leq 0) \wedge (x^3 < x^2)]$

**FPAT-Pb21** (PAT1'ก.ค.52) กำหนดเอกภพสัมพัทธ์  $U = \{n \in I^+ \mid n \leq 10\}$

ข้อใดต่อไปนี้ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

1)  $\exists x \forall y [xy \leq x + y]$

2)  $\forall x \forall y [(x^2 = y^2) \rightarrow (x = y)]$

3)  $\forall x \exists y [(x \neq 1) \rightarrow (x > y^2)]$

4)  $\exists x \exists y [(x - y)^2 \geq y^2 + 9xy]$

**KMK-Pb1.1** (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ  $\{-2, -1, 1, 2\}$

ประโยคในข้อใดต่อไปนี้ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

1)  $\exists x \exists y [x \leq 0 \wedge |x| = y + 1]$

2)  $\exists x \forall y [x \leq y \wedge -(x + y) \geq 0]$

3)  $\forall x \exists y [x + y = 0 \vee x - y = 0]$

4)  $\forall x \forall y [|x| < |y| \vee |x| > |y|]$

**FPAT-Pb22** (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ  $U = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1)  $\forall x \forall y [x \cap y \neq \emptyset]$

2)  $\forall x \forall y [x \cup y = U]$

3)  $\forall x \exists y [y \neq x \wedge y \subset x]$

4)  $\exists x \forall y [y \neq x \wedge y \subset x]$

**โจทย์ตรรกศาสตร์ แนวสมเหตุสมผล**

ทฤษฎี สมมติ ถ้ามีเหตุ :  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$   
 ผล :  $P$

ข้อความดังกล่าวจะสมเหตุสมผล ก็ต่อเมื่อ  $[S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \dots \wedge S_n] \rightarrow P$  เป็น **สัจนิรันดร์**

**พูดง่าย ๆ ว่า** ตรวจสอบสมเหตุสมผล ให้เอา “(เหตุ ทั้งหมด มา  $\wedge$  กัน)  $\rightarrow$  ผล” มาเช็คว่าเป็น **สัจนิรันดร์**

FPAT-Pb23 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ P, Q, R เป็นประพจน์ พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

เหตุ 1.  $P \rightarrow (\sim Q \vee R)$

2.  $Q \vee R$

3.  $\sim R$

ผล S

S เป็นประพจน์ในข้อใด จึงจะทำให้การอ้างเหตุผลข้างต้น สมเหตุสมผล

1)  $\sim P$

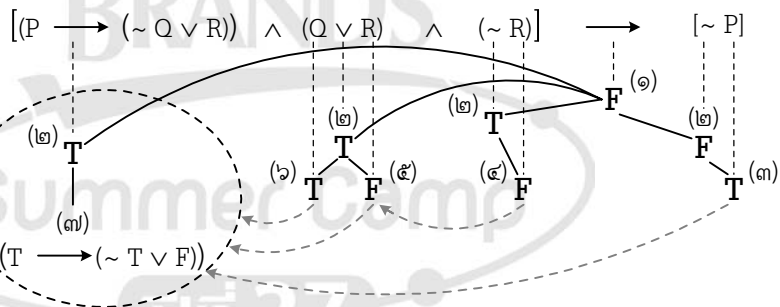
2)  $\sim Q$

3)  $P \vee \sim Q$

4)  $P \vee R$

วิธีจริง

ข้อ 1) ;



เกิดข้อขัดแย้งเพราะว่า

จากขั้นที่ (๗)  $(T \rightarrow (\sim T \vee F))$

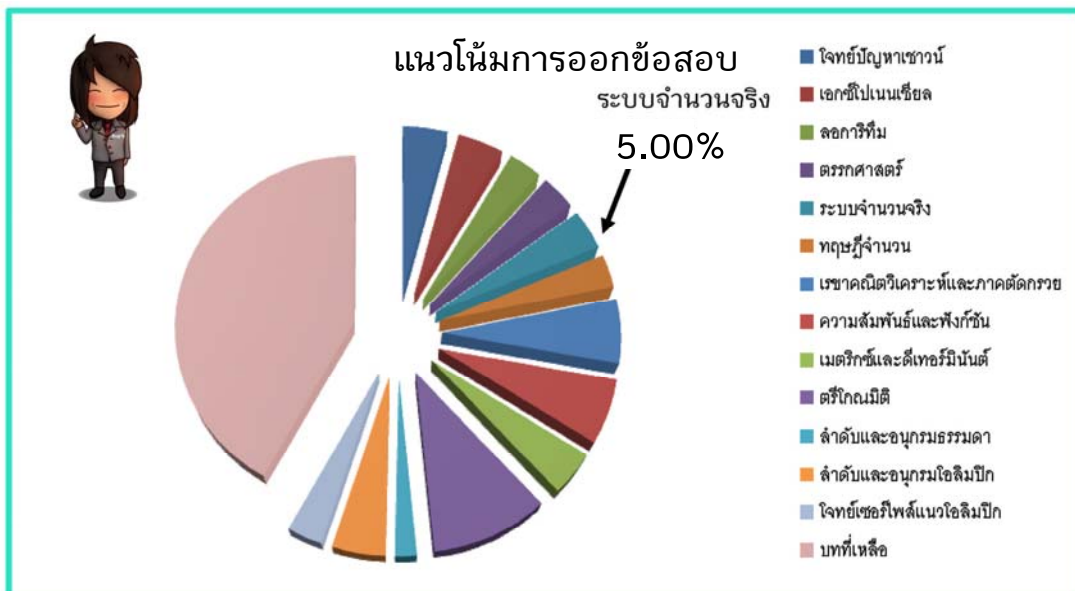
$\equiv (T \rightarrow (F \vee F)) \equiv (T \rightarrow (F)) \equiv F$  ซึ่งไม่ตรงกับการตกกิ่งในขั้นที่ (๒)

การเกิดข้อขัดแย้ง หมายถึง การจับเท็จ **ไม่สำเร็จ** แสดงว่า ประพจน์ในข้อนี้ เป็น **สัจนิรันดร์**

$\therefore$  โจทย์ข้อนี้ เป็น ข้อความที่สมเหตุสมผล ด้วย ตอบ



# สรุปภาพรวม “ระบบจำนวนจริง” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวทฤษฎีบทเศษเหลือ
2. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการพหุนาม
3. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการ
4. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการค่าสมบูรณ์
5. โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการค่าสมบูรณ์

**โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวทฤษฎีบทเศษเหลือ**

FPAT-Pb32 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้  $c$  เป็นค่าคงตัว และ  $P(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{c}{2}x + 5$

ถ้า  $P(x)$  หารด้วย  $x - 2$  เหลือเศษเท่ากับ 7 แล้ว  $P\left(\frac{c}{3} + 2\right)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 31                                      2) 33                                      3) 35                                      4) 37

Sigo-Pb 1.20 (PAT1'มี.ค.58) กำหนดให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง ให้  $f, g$  และ  $h$  เป็นฟังก์ชันพหุนามจาก  $R$  ไป  $R$  โดยที่  $f(x) = 2x - 5$ ,  $(f^{-1}og)(x) = 4x$

และ  $(goh)(x)$  หารด้วย  $x - 1$  แล้วเหลือเศษ เท่ากับ  $-21$

ให้  $c$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับ  $h(x - c) = x^3 - 3x^2 - 2$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $(foh)(c) = 23$

(ข)  $(h + g)(c) = 35$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก    2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด    3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก    4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

**โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการพหุนาม**

FPAT-Pb34 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้  $A = \{x \mid x \in I \text{ และ } x^3 - x = 0\}$  เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับ  $A$

- 1)  $\{x \mid x \in R \text{ และ } x^2 - x^4 = 0\}$                                       2)  $\{x \mid x \in R \text{ และ } x^3 + x = -2x\}$   
3)  $\{x \mid x \in I \text{ และ } x^2 - 1 = 0\}$                                       4)  $\{x \mid x \in I \text{ และ } x^2 + 1 = -2x\}$

FPAT-Pb35 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้  $S = \{x \mid |x|^3 = 1\}$  เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต  $S$

- 1)  $\{x \mid x^3 = 1\}$                                       2)  $\{x \mid x^2 = 1\}$   
3)  $\{x \mid x^3 = -1\}$                                       4)  $\{x \mid x^4 = x\}$

FPAT-Pb36 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้  $A$  เป็นเซตคำตอบของสมการ  $x^4 - 5\sqrt{2}x^2 + 8 = 0$

ผลบวกของสมาชิกที่เป็นจำนวนจริงบวกของ  $A$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\sqrt{18}$                                       2)  $\sqrt{24}$   
3)  $\sqrt[4]{242}$                                       4)  $\sqrt[4]{162}$

FPAT-Pb37 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้  $S$  เป็นเซตคำตอบของสมการ  $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ  $S$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 2.1                                      2) 2.2                                      3) 3.3                                      4) 3.5

KMK-Pb1.4 (PAT1'ต.ค.52) ให้  $A$  เป็นเซตคำตอบของสมการ  $x^3 + x^2 - 27x - 27 = 0$

และ  $B$  เป็นเซตคำตอบของสมการ  $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (36 + \sqrt{3})x - 36 = 0$

$A \cap B$  เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $[-3\sqrt{5}, -0.9]$                                       2)  $[-1.1, 0]$   
3)  $[0, 3\sqrt{5}]$                                       4)  $[1, 5\sqrt{3}]$

**โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการ**

FPAT-Pb39 (PAT1'ก.ค.52) ถ้า  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3) \leq 15\}$  มี  $a$  เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุดใน  $S$  และมี  $b$  เป็นจำนวนที่มีค่ามากที่สุดใน  $S$  แล้ว  $(b - a)^2$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) 24                      2) 12                      3) 6                      4) 3

Happy-Pb 5.1 (PAT1'มี.ค.57) ให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 4} > 3x + 2\right\}$$

แล้วเซต  $A$  เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

1.  $(-\infty, 2) \cup (3, 4)$                       2.  $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

3.  $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$                       4.  $(-1, \infty)$

วิธีลัด

---

วิธีจริง

ให้  $y = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$  จะได้  $y \geq 0$  และ  $x^2 - 3x - 2 = y^2 - 6$

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 4} > 3x + 2$$

$$(x^2 - 3x - 2) + \sqrt{x^2 - 3x + 4} > 0$$

$$(y^2 - 6) + y > 0$$

$$(y + 3)(y - 2) > 0$$

เพราะว่า  $y \geq 0 \rightarrow y + 3 > 0$  จึงกล้า นำ  $(y + 3)$  ไปหารทั้งสองข้าง

$$y - 2 > 0$$

$$y > 2$$

$$y^2 > 4$$

$$x^2 - 3x + 4 > 4$$

$$x^2 - 3x > 0$$

$$x(x - 3) > 0$$

จะได้  $(x < 0$  หรือ  $x > 3)$  ทำให้  $A = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

ดังนั้น  $A \subset (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการ ดัดเศษส่วน ด้านใดด้านหนึ่ง เท่ากับ 0

FPAT-Pb41 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้  $X = \left\{ x \mid \frac{(x-2)(x+3)}{(x+4)(2x-1)} \leq 0 \right\}$  และ  $Y = \{x \mid x \in X \text{ และ } x < 0\}$

ถ้า p เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของ X และ q เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของ Y แล้ว  $|pq|$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 6
- 2) 8
- 3) 10
- 4) 12

FPAT-Pb43 (PAT1'ก.ค.52) ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ  $\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$

ถ้า a เป็นสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดในเซต  $A \cap (2, \infty)$  และ b เป็นจำนวนจริงลบที่มีค่ามากที่สุด โดยที่  $b \notin A$  แล้ว  $a^2 - b^2$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

- |       |       |
|-------|-------|
| 1) -5 | 2) -9 |
| 3) 5  | 4) 9  |

FPAT-Pb42 (PAT1'ก.ค.52) ให้ X คือ เซตคำตอบของอสมการ  $\frac{(2x+1)(x-1)}{2-x} \geq 0$

Y คือ เซตคำตอบของอสมการ  $2x^2 - 7x + 3 < 0$  ค่าของ  $6a - b$  มีค่าเท่าใด เมื่อ  $X \cap Y = [a, b)$

- |      |       |
|------|-------|
| 1) 4 | 2) 6  |
| 3) 8 | 4) 10 |

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการ ดัดเศษส่วน ด้านใดด้านหนึ่ง ไม่เท่ากับ 0

KMK-Pb1.5 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้  $S = \left\{ x \mid \frac{x}{x^2 - 3x - 2} \geq \frac{x+2}{x^2 - 1} \right\}$

ช่วงในข้อใดต่อไปนี้ เป็นสับเซตของ S

- 1)  $(-\infty, -3)$
- 2)  $(-1, 0.5)$
- 3)  $(-0.5, 2)$
- 4)  $(1, \infty)$

โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้สมการค่าสัมบูรณ์

Happy-Pb 5.2 (PAT1'เม.ย.57) ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ  $|2 - 2x| + |x + 2| = 4 - x$   
แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

- |            |            |
|------------|------------|
| 1) (-4, 0) | 2) (-1, 1) |
| 3) (0, 4)  | 4) (-3, 2) |

วิธีลัด 1

วิธีลัด 2

วิธีจริง

$$|2 - 2x| + |x + 2| = 4 - x$$

$$2|x - 1| + |x + 2| = 4 - x$$

แยกกรณีคิด

กรณีที่ 1  $x < -2$

$$2(1 - x) + (-x - 2) = 4 - x$$

$$-3x = 4 - x$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

ใช้เป็นคำตอบไม่ได้

$\therefore$  เซตคำตอบกรณีที่ 1 =  $\emptyset$

กรณีที่ 2  $-2 \leq x < 1$

$$2(1 - x) + (x + 2) = 4 - x$$

$$4 - x = 4 - x \text{ เป็นจริงเสมอ}$$

$$\therefore x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{เซตคำตอบกรณีที่ 2} &= x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 1 \\ &= [-2, 1) \end{aligned}$$

กรณีที่ 3  $x \geq 1$

$$2(x - 1) + (x + 2) = 4 - x$$

$$3x = 4 - x$$

$$4x = 4$$

$$\therefore \text{เซตคำตอบกรณีที่ 3} = \{1\}$$

ทำให้ เซตคำตอบของสมการ คือ เซตคำตอบกรณีที่ 1  $\cup$  กรณีที่ 2  $\cup$  กรณีที่ 3

$$\text{คือ } \emptyset \cup [-2, 1) \cup \{1\}$$

$$\text{คือ } [-2, 1]$$

$$\therefore A = [-2, 1) \cup \{1\} = [-2, 1]$$

$\therefore A = C(-3, 2)$  ตอบ ข้อ 4.

Happy-Pb 5.3 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงบวก และ  $a < b$

เซตคำตอบของสมการ  $|x - a| - |x - b| = b - a$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\{b\}$
- 2)  $(a, b]$
- 3)  $[b, \infty)$
- 4)  $\left(\frac{a+b}{2}, \infty\right)$

**โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการค่าสัมบูรณ์ แบบมีแอบข้างเดียวอีกข้างเป็นค่าคงที่**

**KAIU-Pb1.4** (PAT1'มี.ค.53) กำหนดให้  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 4\}$  เมื่อ  $\mathbb{R}$  คือ เซตของจำนวนจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1)  $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid |3 - x| > 4\}$
- 2)  $A' \subset (-1, \infty)$
- 3)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\}$
- 4)  $A \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| < 7\}$

**BRAN-Pb1.3** (PAT1'ต.ค.53) ให้  $I$  แทนเซตของจำนวนเต็ม และ  $P(S)$  แทนเพาเวอร์เซตของเซต  $S$

ให้  $A = \{x \in I \mid |x^2 - 1| < 8\}$  และ  $B = \{x \in I \mid 3x^2 + x - 2 \geq 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) จำนวนสมาชิกของ  $P(A - B)$  เท่ากับ 4
- 2) จำนวนสมาชิกของ  $P(I - (A \cup B))$  เท่ากับ 2
- 3)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- 4)  $P(A - B) - P(A \cap B) = \{\emptyset\}$

**โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการค่าสัมบูรณ์ แบบมีแอบข้างเดียวอีกข้างเป็นตัวแปร**

**FPAT-Pb46** (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้  $A = \{x \mid |x - 1| \leq 3 - x\}$  และ  $a$  เป็นสมาชิกค่ามากที่สุดของ  $A$  ค่าของ  $a$  อยู่ในช่วงใด

- 1)  $(0, 0.5]$
- 2)  $(0.5, 1]$
- 3)  $(1, 1.5]$
- 4)  $(1.5, 2]$

**Happy-Pb 5.4** (PAT1'เม.ย.57)

กำหนดให้  $A$  เป็นเซตของจำนวนจริง  $x$  ทั้งหมดที่เป็นคำตอบของสมการ

$$\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$$

และ  $B$  เป็นเซตของจำนวนจริง  $x$  ทั้งหมดที่เป็นคำตอบของสมการ

$$|x^2 - 2x| + x^2 > 4$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (ก)  $A \subset B$
- (ข) จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ  $A \cap B$  เท่ากับ 2

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก
- 2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
- 3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
- 4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

**โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการค่าสัมบูรณ์ แบบมีแอมป์สองข้าง**

FPAT-Pb45 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้าช่วง (a, b) เป็นเซตคำตอบของอสมการ  $2|x + 3| > 3|x - 2|$  แล้ว  $b - a$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 11
- 2) 12
- 3) 13
- 4) 14

**โจทย์ระบบจำนวนจริง แนวแก้อสมการค่าสัมบูรณ์ แบบปลดแอมป์โดยนิยาม**

SheLL1.4 (PAT1'ก.ค.53) ถ้า  $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{|1-x|-2|}{x+|x|-3} > 1\right\}$  แล้ว  $A \cap [0, 1)$  เท่ากับข้อใด

- 1)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
- 2)  $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
- 3)  $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$
- 4)  $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

NaDate-Pb1.4 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ให้  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 5| + |x| \leq 7\}$

และ  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 12 + |x|\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $A \cap B \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$

ข.  $A - B$  เป็นเซตจำกัด (finite set)

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด

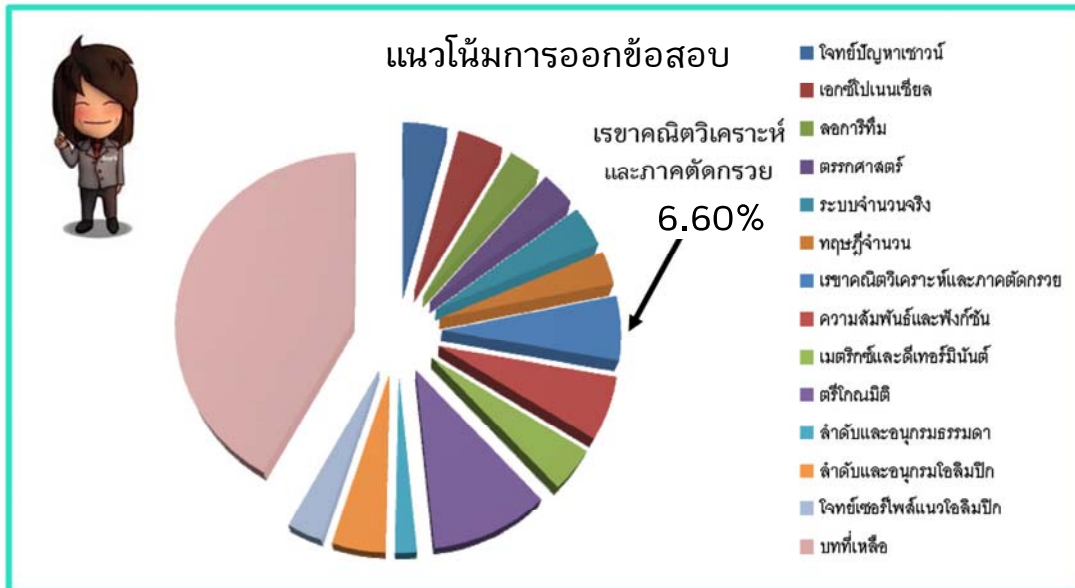
Sigo-Pb1.5 (PAT1'มี.ค.58) ให้ a เป็นจำนวนจริง โดยที่  $0 < a < 1$

เซตคำตอบของอสมการ  $\frac{|x|+1}{x} > 1$  เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\left(-\infty, -\frac{1}{a}\right)$
- 2)  $\left(-1, \frac{1}{1-a}\right)$
- 3)  $\left(1, \frac{1}{a}\right)$
- 4)  $\left(\frac{1}{1-a}, \infty\right)$



## สรุปภาพรวม “เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์เรขาคณิตวิเคราะห์
2. โจทย์ภาคตัดกรวย แนววงกลม
3. โจทย์ภาคตัดกรวย แนวพาราโบลา
4. โจทย์ภาคตัดกรวย แนววงรี
5. โจทย์ภาคตัดกรวย แนวไฮเพอร์โบลา

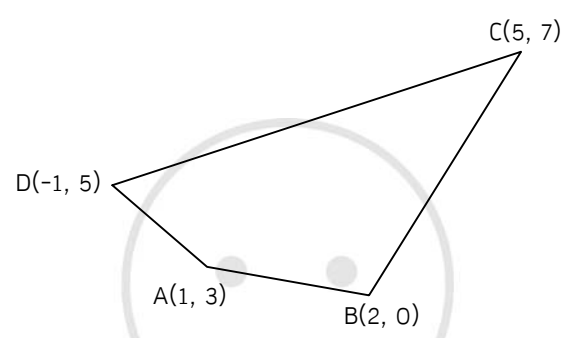
**เรขาคณิตวิเคราะห์**

◆ **สูตร 1.11! พื้นที่รูป  $n$  เหลี่ยม**

ในกรณีที่มีจุดยอด  $n$  จุดของรูป  $n$  เหลี่ยมใดๆ :  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$

เช่น จงหาพื้นที่ของรูป  $\square$  ABCD เมื่อ  $A(1, 3), B(2, 0), C(5, 7), D(-1, 5)$

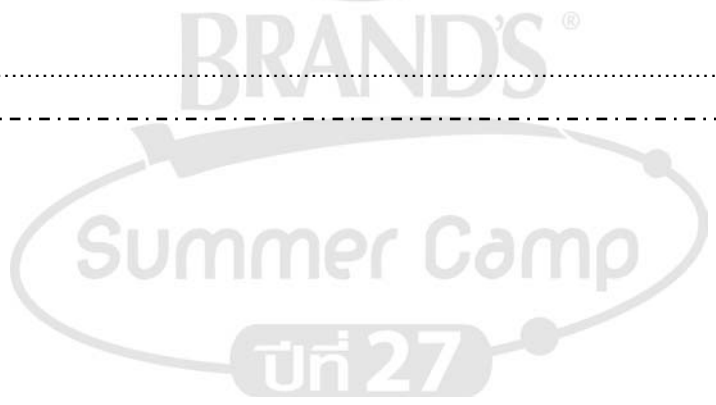
แนวคิด



หลักการใช้สูตร

1. เริ่มต้นจากจุดใด ต้องลงท้ายด้วยจุดนั้น
2. วนในทิศใดทิศหนึ่ง
3. ....
4. ....
5. ....

ข้อควรระวัง .....



โจทย์เรขาคณิตวิเคราะห์ แนวหาพื้นที่รูป n เหลี่ยม

BRAN-Pb1.9 (PAT1'ต.ค.53) ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอด เป็น A(-2, 3), B(2, 8), C(4, 4) และ D(0, -3) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) 16 ตารางหน่วย            | 2) 32 ตารางหน่วย            |
| 3) $10\sqrt{13}$ ตารางหน่วย | 4) $26\sqrt{10}$ ตารางหน่วย |

วิธีคิดเร็วๆ

Tips จากครู Sup'k

วิธีจริง BRAN-Pb1.9 ตอบ 2)

ขั้นที่ 1 จากรูป

$$\text{พื้นที่ [PQRS]} = PQ \cdot QR = |-2 - 4| \cdot |-3 - 8| = 66$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ [ABP]} &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP = \frac{1}{2} |8 - 3| \cdot |-2 - 2| \\ &= 10 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

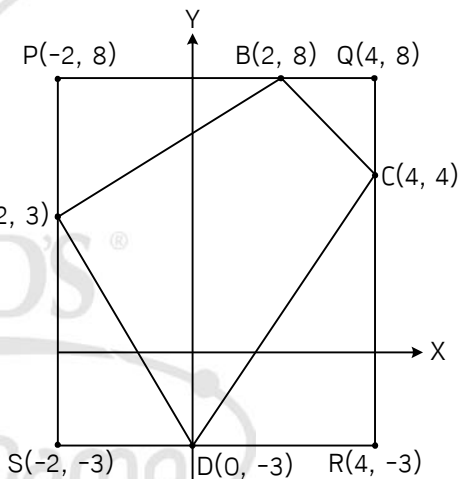
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ [BCQ]} &= \frac{1}{2} \cdot CQ \cdot BQ = \frac{1}{2} |8 - 4| \cdot |4 - 2| \\ &= 4 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ [CDR]} &= \frac{1}{2} \cdot CR \cdot DR = \frac{1}{2} |-3 - 4| \cdot |4 - 0| \\ &= 14 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

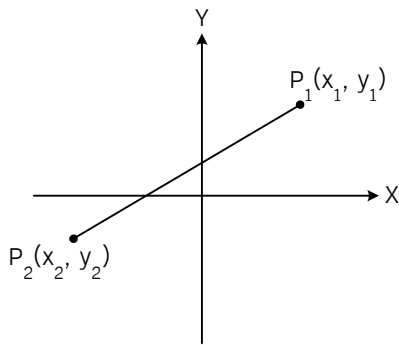
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ [ADS]} &= \frac{1}{2} \cdot AS \cdot DS = \frac{1}{2} |-3 - 3| \cdot |-2 - 0| \\ &= 6 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 จะหา พื้นที่ [ABCD] = [PQRS] - [ABP] - [BCQ] - [CDR] - [ADS]

$$\therefore \text{พื้นที่ [ABCD]} = 66 - 10 - 4 - 14 - 6 = 32 \text{ ตารางหน่วย}$$



◆ สูตร 1.1! สูตรระยะระหว่างจุดสองจุด



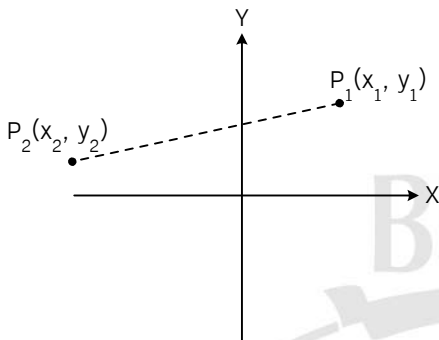
$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

เช่น จงหาระยะห่างระหว่างจุด A(5, -4), B(7, 8)

วิธีทำ

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5 - 7)^2 + ((-4) - 8)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{4 + 144} = \sqrt{148} \end{aligned}$$

◆ สูตร 1.2! สูตรจุดกึ่งกลางห่างระหว่างจุดสองจุด



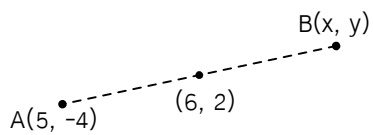
$$\text{จุดกึ่งกลางระหว่าง } \overline{P_1P_2} = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

เช่น จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A(5, -4), B(7, 8)

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จุดกึ่งกลาง} &= \left( \frac{5+7}{2}, \frac{(-4)+8}{2} \right) \\ &= (6, 2) \end{aligned}$$

◆ สูตร 1.3! สูตรหาจุดปลาย เมื่อให้จุดกึ่งกลาง และจุดปลายอีกด้านหนึ่ง

Tips จากครู Sup'k



เช่น ให้จุด (6, 2) เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A(5, -4), B จงหาจุด B

วิธีทำ สมมติว่า จุด B(x, y)

$$(6, 2) = \text{จุดกึ่งกลาง} = \left( \frac{5+x}{2}, \frac{-4+y}{2} \right)$$

$$6 = \frac{5+x}{2}, \quad 2 = \frac{-4+y}{2}$$

$$7 = x, \quad 8 = y$$

$$\therefore B(x, y) = B(7, 8)$$

NichTor-Pb3.1 (แนว PAT1'ธ.ค.54) กำหนดให้ A(1, 3) เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\overline{OP}$  เมื่อ O(-1, 2)

จงหาพิกัดจุด P ตอบ .....

วิธีทำ

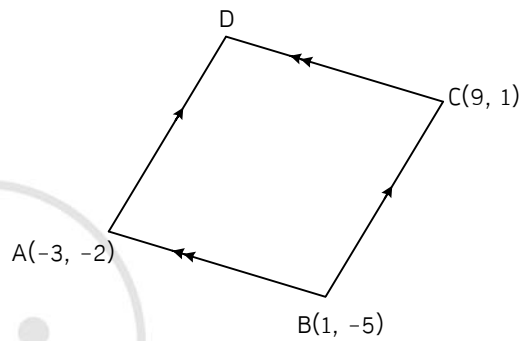
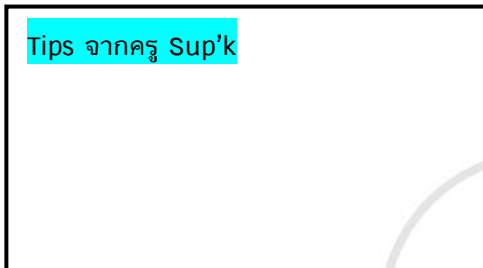


FPAT-Pb48 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่อยู่ในระนาบ XY

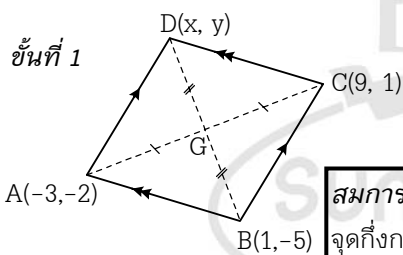
ถ้า  $A = (-3, -2)$ ,  $B = (1, -5)$ ,  $C = (9, 1)$  แล้ว  $|\overline{BD}|$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\sqrt{91}$                       2) 10                      3)  $\sqrt{97}$                       4)  $10\sqrt{2}$

วิธีคิดเร็วๆ



วิธีจริง & พิสูจน์สูตรลัด



**ทฤษฎีเรขาคณิต**  
เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน  
จะตัดกันและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

**สมการ**  
จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุม AC = จุด G = จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุม BD

$$\left(\frac{[-3]+9}{2}, \frac{[-2]+1}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+[-5]}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{[-3]+9}{2} = \frac{x+1}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{[-2]+1}{2} = \frac{y+[-5]}{2}$$

$$\therefore 5 = x \quad \text{และ} \quad 4 = y$$

$$\therefore D(x, y) = D(5, 4)$$

ขั้นที่ 2 จะหา  $|\overline{BD}|$  = ระยะ BD =  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-[-5])^2} = \sqrt{97}$  ตอบ

**โจทย์เพิ่มเติมเรขาคณิตวิเคราะห์**

**KAI0U-Pb1.15** (PAT1'มี.ค.53) ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี A(0, 0) และ B(2, 2) เป็นจุดยอด และ C(x, y) เป็นจุดยอดในจุดภาค (quadrant) ที่ 2 ที่ทำให้ด้าน AC ยาวเท่ากับด้าน BC ถ้าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ 4 ตารางหน่วย แล้วจุด C อยู่บนเส้นตรงในข้อใด

- 1)  $x - y + 4 = 0$
- 2)  $4x + 3y - 1 = 0$
- 3)  $2x - y - 3 = 0$
- 4)  $x + y - 5 = 0$

**KAI0U-Pb1.9** (PAT1'มี.ค.53) จุด A(-3, 1), B(1, 5), C(8, 3) และ D(2, -3) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม ABCD ข้อใดต่อไปนี้ผิด

- 1) ด้าน AB ขนานกับด้าน DC
- 2) ผลบวกความยาวของด้าน AB กับ DC เท่ากับ  $10\sqrt{2}$  หน่วย
- 3) ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D มีค่าเท่ากับ  $\frac{9\sqrt{2}}{2}$  หน่วย
- 4) ระยะตั้งฉากจากจุด B ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D มีค่าเท่ากับ  $\frac{9}{2}$  หน่วย

**FPAT-Pb49** (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ A(-1, -1) และ B(1, c) เป็นจุดในระนาบ XY ถ้า L เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด A, B และมีความชันเท่ากับ 3 แล้วเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -2 และผ่านจุด B จะมีสมการดังข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $y = -2x + 7$
- 2)  $y = -2x + 5$
- 3)  $y = -2x + 3$
- 4)  $y = -2x + 1$

**SheLL1.9** (PAT1'ก.ค.53) รูปสามเหลี่ยม ABC มี  $\hat{A}BC$  เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ถ้าพิกัดของจุด A และจุด B คือ (-4, 3) และ (-1, 2) ตามลำดับ แล้วสมการเส้นตรงในข้อใดผ่านจุด C

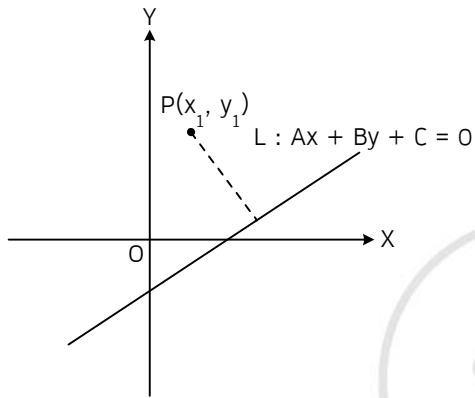
- 1)  $x + 8y - 27 = 0$
- 2)  $8x + y - 27 = 0$
- 3)  $4x - 5y + 3 = 0$
- 4)  $-5x + 4y + 3 = 0$

**Sigo-Pb 1.17** (PAT1'พ.ย.57) เส้นตรง  $L_1$  ผ่านจุด (-2, -4) มีความชันเป็นจำนวนเต็มบวก และตัดแกน X และ Y ที่จุด A และ B ตามลำดับ โดยที่ผลบวกของระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y เท่ากับ 3 หน่วย เส้นตรง  $L_2$  ขนาน กับเส้นตรง  $L_1$  และผ่านจุด (0, -13)

ถ้า C เป็นจุดบนเส้นตรง  $L_2$  โดยที่  $CA = CB$  แล้วพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับกี่ตารางหน่วย

- 1) 8.5
- 2) 7.5
- 3) 6.5
- 4) 5.5

◆ สูตร 1.20! โปรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง L



สูตร ระยะห่างระหว่างจุด  $P(x_1, y_1)$  กับเส้นตรง L คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ระวัง 1.20!

NichTor-Pb3.2 (แนว PAT1'ธ.ค.54) จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด  $P(3, 4)$  ไปยังเส้นตรง  $3y - 4x = 15$

ตอบ .....

วิธีทำ

Happy-Pb 6.1 (PAT1'เม.ย.57) เส้นตรง L มีความชันเท่ากับ m โดยที่  $m < 0$

และผ่านจุด A ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นตรง  $x - 3y + 1 = 0$  และ  $2x + 5y - 9 = 0$

ถ้าระยะทางจากเส้นตรง L ไปยังจุด  $(0, 0)$  เท่ากับ k หน่วย และ  $k^2 + 2m = 1$

แล้วสมการของเส้นตรง L ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1)  $2x + y - 5 = 0$

2)  $3x + y - 7 = 0$

3)  $x + 2y - 4 = 0$

4)  $x + 3y - 5 = 0$



Happy-Pb 6.1 ตอบ 1.

แนวคิด

ขั้นที่ 1

แก้ระบบสมการ  $x - 3y + 1 = 0$  และ  $2x + 5y - 9 = 0$

จะได้จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเส้น คือ จุด  $A(2, 1)$

ขั้นที่ 2

เส้นตรง  $L$  มีความชันเท่ากับ  $m < 0$  จึงสมมติ สมการของ  $L$  เป็น  $y = mx + c$

ขั้นที่ 3

แต่  $L$  ผ่านจุด  $A(2, 1)$  ด้วย จะได้  $2m + c = 1$  หรือ  $c = 1 - 2m$

ขั้นที่ 4

เพราะว่า  $k$  เป็นระยะทางจากเส้นตรง  $L$  ไปยังจุด  $(0, 0)$

$$\text{ฉะนั้น } k = \frac{|m(0) - 1(0) + c|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

ขั้นที่ 5

$$\text{จาก } k^2 + 2m = 1 \text{ จะได้ } \frac{c^2}{m^2 + 1} + 2m = 1$$

$$\frac{(1 - 2m)^2}{m^2 + 1} + 2m = 1$$

$$(1 - 2m)^2 + 2m(m^2 + 1) = m^2 + 1$$

$$(1 - 2m)^2 - (1 - 2m)(m^2 + 1) = 0$$

$$(1 - 2m)(1 - 2m - (m^2 + 1)) = 0$$

$$(1 - 2m)(-2 - m)m = 0$$

$$m = \frac{1}{2}, -2, 0$$

ขั้นที่ 6 แต่  $m < 0$  จึงได้  $m = -2$  ทำให้  $c = 1 - 2m = 1 - 2(-2) = 5$

ดังนั้น สมการของเส้นตรง  $L$  อยู่ในรูป  $y = -2x + 5$  หรือ  $2x + y - 5 = 0$  นั่นเอง

ภาคตัดกรวย : วงกลม .

◆ สูตร 2.1! วงกลม

ระวัง! ก่อนใช้สูตร ล้มประสิทธิ์ หน้า  $x^2, y^2$  ต้องเท่ากับ .....

	สมการรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	สมการมาตรฐาน $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
จุดศูนย์กลาง		
รัศมี		

🎵 เทคนิคสั้นล้ากับครู Sup'k ร้องเพลงกับพี่ Sup'k แล้วจำได้เลย

วงกลมนั้นมีสองสิ่งสำคัญ คือจุดศูนย์กลาง กับ รัศมี ไง ศูนย์กลางอยู่ที่  $(h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

ก่อนเคยเชื่อในลิขิตฟ้าดิน ปลอยชีวิตไปตามโชคชะตา แต่ฝันไม่เคยถึงฝั่ง ผิดหวังในใจเรื่อยมาเพราะไม่มีหัวใจ

รัศมี คือ รูดผลบวกของ กำลังสองของ..... แล้ว.....

จะดีหรือเลวมันอยู่ที่คน จะมีหรือจนมันอยู่ที่ใจ ดินฟ้าไม่เคยลิขิต

.....ตัวเลขใดๆ .....

ชีวิตจะเป็นเช่นไร อย่าเลยอย่าไปถามฟ้า

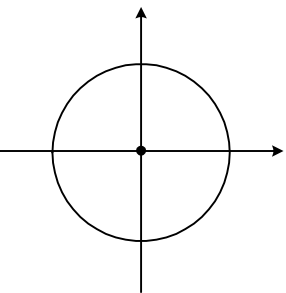
NichTor-Pb3.3 (แนว PAT1'5.ค.54) จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของ  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$

ตอบ.....

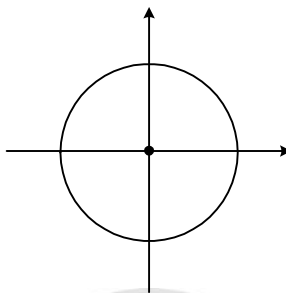
วิธีทำ

ปีที่ 27

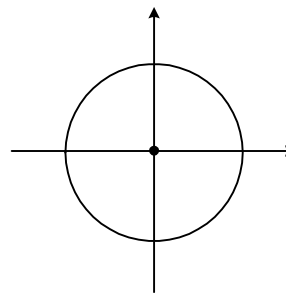
**วิธีการตรวจสอบว่า จุดใดอยู่ใน หรืออยู่บน หรืออยู่นอกวงกลม**



$x^2 + y^2 = 25$  กับ  $P(1, 0)$   
 $1^2 + 0^2 < 25$



$x^2 + y^2 = 25$  กับ  $P(3, 4)$   
 $3^2 + 4^2 = 25$



$x^2 + y^2 = 25$  กับ  $P(7, 10)$   
 $7^2 + 10^2 > 25$

ควรจัดสมการให้อยู่รูป  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

หลังแทนค่า จุด  $P(x_1, y_1)$  ที่สนใจแล้ว

กรณีที่ 1  $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 < r^2$  แสดงว่า จุด P อยู่ในวงกลม

กรณีที่ 2  $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2$  แสดงว่า จุด P อยู่บนเส้นรอบวงกลม

กรณีที่ 3  $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 > r^2$  แสดงว่า จุด P อยู่นอกวงกลม

หรือหากจัดในรูป  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

หลังแทนค่า จุด  $P(x_1, y_1)$  ที่สนใจแล้ว

กรณีที่ 1  $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$  แสดงว่า จุด P อยู่ในวงกลม

กรณีที่ 2  $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$  แสดงว่า จุด P อยู่บนเส้นรอบวงกลม

กรณีที่ 3  $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$  แสดงว่า จุด P อยู่นอกวงกลม

**NichTor-Pb3.4** (แนว PAT1 5.ค.54) จงตรวจสอบว่า จุด  $A(1, 3)$  อยู่ด้านใน หรือด้านนอก

หรืออยู่บนเส้นรอบวงของ  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$

ตอบ .....

โจทย์ภาคตัดกรวย แนวนวงกลม

PTOR-Pb3.5 (แนวข้อสอบจริง PAT1'๕.ค.54) ถ้า P เป็นจุดบนวงกลม  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$  ที่อยู่ใกล้จุด A(1, 3) มากที่สุด แล้วระยะทางจาก P ไปยังเส้นตรง  $3y - 4x = 15$  มีค่าเท่าใด

ตอบ .....

วิธีลัด ให้ฟังครู Sup'k สอนในหอประชุม Brand's Summer Camp

วิธีจริง

ขั้นที่ 1  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$

จัดรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 20$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{20}^2$$

∴ วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ O(-1, 2) รัศมี  $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$  หน่วย

Tips จากครู Sup'k

ขั้นที่ 2 จุด P(a, b) บนวงกลมที่อยู่ใกล้ A(1, 3) มากที่สุด คือ จุด P ที่ทำให้ O, A, P อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (ดูรูป)

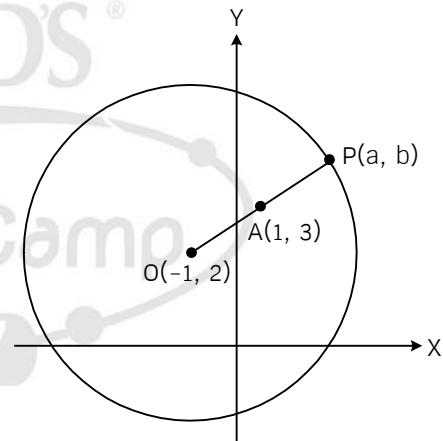
สังเกตว่า  $OA = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{5} = \frac{r}{2}$

ฉะนั้น A เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\overline{OP}$

จะได้  $\frac{a-1}{2} = 1$  และ  $\frac{b+2}{2} = 3$

$a = 3$  และ  $b = 4$

ฉะนั้น พิกัดของจุด P คือ P(3, 4)



ขั้นที่ 3 จะหาระยะห่างจาก P กับเส้นตรง  $3y - 4x = 15$

คือ ระยะห่างจาก P กับเส้นตรง  $3y - 4x - 15 = 0$

$$d = \frac{|3(4) - 4(3) - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \text{ หน่วย} = 3 \text{ หน่วย}$$

**BRAN-Pb1.8** (PAT1'ต.ค.53) พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$  เป็นสมการวงกลมที่สัมผัสกับเส้นตรง

ซึ่งมีสมการเป็น  $21x + 20y + 168 = 0$

ข.  $y^2 + 16x - 6y = 71$  เป็นสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่  $(-5, 3)$

และจุดโฟกัสที่  $(-1, 3)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก และ ข. ผิด    3) ก. ผิด และ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

**NaDate-Pb1.8** (PAT1'มี.ค.56) ให้พาราโบลา P มีสมการเป็น  $y^2 - 2y + 6x + 4 = 0$

ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา P และสัมผัสกับเส้นตรง  $3x - 2y - 6 = 0$

ณ จุด  $(4, 3)$  แล้วสมการของวงกลมตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1)  $7x^2 + 7y^2 - 4x - 82y - 55 = 0$

2)  $7x^2 + 7y^2 + 4x + 82y + 55 = 0$

3)  $7x^2 + 7y^2 - 4x + 82y - 55 = 0$

4)  $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$

**KMK-Pb1.9** (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

และ  $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0\}$

ถ้า  $p \in A$  และ  $q \in B$  แล้ว ระยะทางมากที่สุดที่เป็นไปได้ระหว่างจุด p และ q เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1)  $5\sqrt{2}$  หน่วย

2)  $2 + 5\sqrt{2}$  หน่วย

3)  $2\sqrt{5}$  หน่วย

4)  $5 + 2\sqrt{5}$  หน่วย

**BRAN-Pb2.34** (PAT1'ต.ค.53) จุด  $A(1, 0)$  และจุด  $B(b, 0)$  เมื่อ  $b > 1$  เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง

ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด  $(-1, 0)$  และสัมผัสกับวงกลมวงนี้ มีความชันเท่ากับ  $\frac{4}{3}$  แล้ว b เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

**FPAT-Pb50** (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ วงกลมรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(2, 1)$

ถ้าเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด  $x = 1$

เส้นหนึ่งมีความชันเท่ากับ  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงกลมที่กำหนด

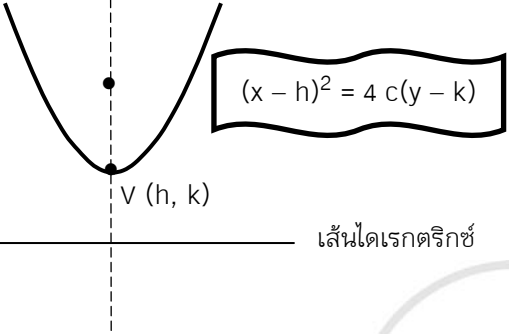
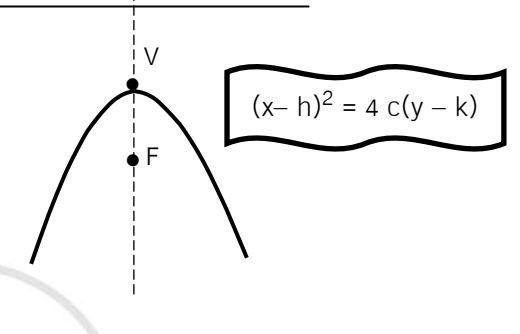
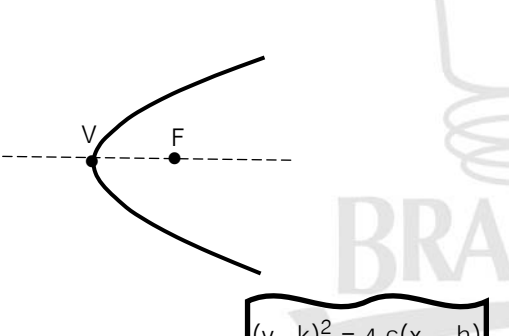
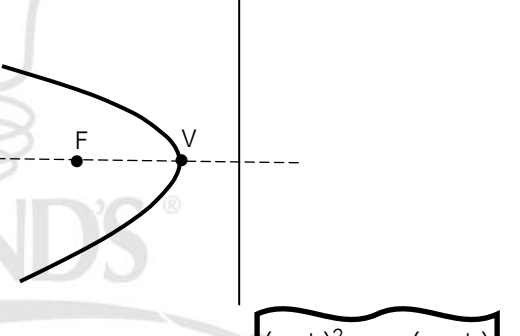
1)  $(0, 1)$

2)  $(0, 2)$

3)  $(1, 0)$

4)  $(3, 0)$

โจทย์ภาคตัดกรวย แนวพาราโบลา

<p>เมื่อ <math>c &gt; 0</math></p>  <p>เส้นไดเรกตริกซ์</p> <p>จุดยอด คือ <math>V(h, k)</math> จุดโฟกัส คือ <math>F(h, k + c)</math> เส้นไดเรกตริกซ์ คือ <math>y = k - c</math></p>	<p>เส้นไดเรกตริกซ์ เมื่อ <math>c &lt; 0</math></p>  <p>จุดยอด คือ <math>V(h, k)</math> จุดโฟกัส คือ <math>F(h, k + c)</math> เส้นไดเรกตริกซ์ คือ <math>y = k - c</math></p>
<p>เส้นไดเรกตริกซ์ เมื่อ <math>c &gt; 0</math></p>  <p>จุดยอด คือ <math>V(h, k)</math> จุดโฟกัส คือ <math>F(h + c, k)</math> เส้นไดเรกตริกซ์ คือ <math>x = h - c</math></p>	<p>เส้นไดเรกตริกซ์ เมื่อ <math>c &lt; 0</math></p>  <p>จุดยอด คือ <math>V(h, k)</math> จุดโฟกัส คือ <math>F(h + c, k)</math> เส้นไดเรกตริกซ์ คือ <math>x = h - c</math></p>

หมายเหตุ : สูตรที่พิมพ์ไว้ในซีทนี้ นั้น พิมพ์ถูกต้องแล้ว

เพราะ พาราโบลา หาย กับ คว่า จะใช้สูตรเดียวกัน แต่ว่า ตอนแทนค่า จะแทนค่า  $c$  ต่างกัน

ในทำนองเดียวกัน พาราโบลา ตะแคงขวา กับ ซ้าย จะใช้สูตรเดียวกัน แต่ว่า ตอนแทนค่า จะแทนค่า  $c$  ต่างกัน

ตัวอย่าง-ST-Pb 1 จงอธิบายลักษณะของกราฟพาราโบลาที่มีสมการ  $x^2 - 8x + 12y + 28 = 0$

ตอบ .....

แนวคิด

$$x^2 - 8x + 12y + 28 = 0$$

$$x^2 - 8x = -12y - 28$$

$$x^2 - 8x + 4^2 = -12y - 28 + 4^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = -12y - 28 + 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = -12y - 12$$

$$(x - 4)^2 = -12(y + 1)$$

$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

เทียบกับสูตร

$$\therefore -h = -4, -k = +1, 4c = -12$$

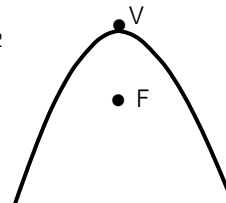
$$\therefore h = 4, k = -1, c = -3$$

จุดยอด คือ  $V(h, k)$  คือ  $V(4, -1)$  คือ  $V(4, -1)$  คือ  $V(4, -1)$

จุดโฟกัส คือ  $F(h, k + c)$  คือ  $F(4, -1 + \{-3\})$  คือ  $F(4, -1 - 3)$  คือ  $F(4, -4)$

เส้นไดเรกทริกซ์ คือ  $y = k - c$  คือ  $y = -1 - \{-3\}$  คือ  $y = -1 + 3$  คือ  $y = 2$

เส้นไดเรกทริกซ์



ตัวอย่าง-ST-Pb 2 สมการของพาราโบลา  $y^2 - 4y - 4x - 12 = 0$  มีจุดยอดและจุดโฟกัสตามข้อใด

ก.  $V(2, 4), F(2, 3)$

ข.  $V(4, 2), F(3, 2)$

ค.  $V(2, -4), F(2, 3)$

ง.  $V(-4, 2), F(-3, 2)$

แนวคิด

$$y^2 - 4y - 4x - 12 = 0$$

$$y^2 - 4y = 4x + 12$$

$$y^2 - 4y + 2^2 = 4x + 12 + 2^2$$

$$y^2 - 4y + 4 = 4x + 16$$

$$(y - 2)^2 = 4 \cdot (x + 4)$$

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

เทียบกับสูตร

$$\therefore -h = +4, -k = -2, 4c = 4$$

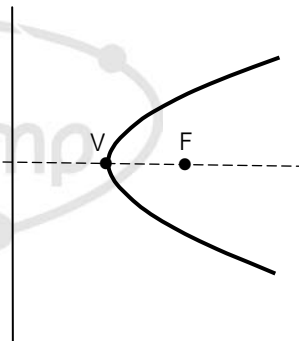
$$\therefore h = -4, k = 2, c = 1$$

จุดยอด คือ  $V(h, k)$  คือ  $V(-4, 2)$

จุดโฟกัส คือ  $F(h + c, k)$  คือ  $F(-4 + 1, 2)$  คือ  $F(-3, 2)$

เส้นไดเรกทริกซ์ คือ  $x = h - c$  คือ  $x = -4 - 1$  คือ  $x = -5$

เส้นไดเรกทริกซ์



FPAT-Pb56 (PAT1'มี.ค.52) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา

$y^2 - 4y + 4x = 0$  และเส้นไดเรกทริกซ์ที่จุด  $(a, b)$  แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4

2. 5

3. 6

4. 7

แนวคิด

ขั้นที่ 1

$$y^2 - 4y + 4x = 0$$

$$y^2 - 4y + 4x = -4x + 4$$

$$(y - 2)^2 = -4(x - 1)$$

เทียบกับสูตร

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$$\therefore -h = -1, -k = -2, 4c = -4$$

$$\therefore h = 1, k = 2, c = -1$$

จุดยอด คือ  $V(h, k)$

คือ  $V(1, 2)$

จุดโฟกัส คือ  $F(h + c, k)$

คือ  $F(1 + \{-1\}, 2)$

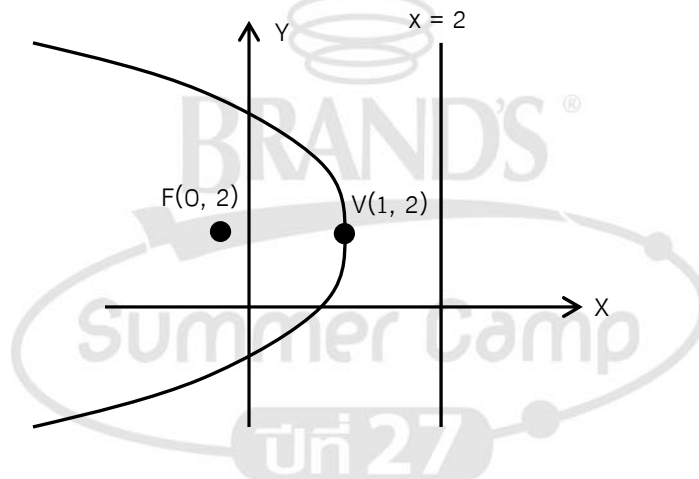
คือ  $F(0, 2)$

เส้นไดเรกทริกซ์ คือ  $x = h - c$

คือ  $x = 1 - \{-1\}$

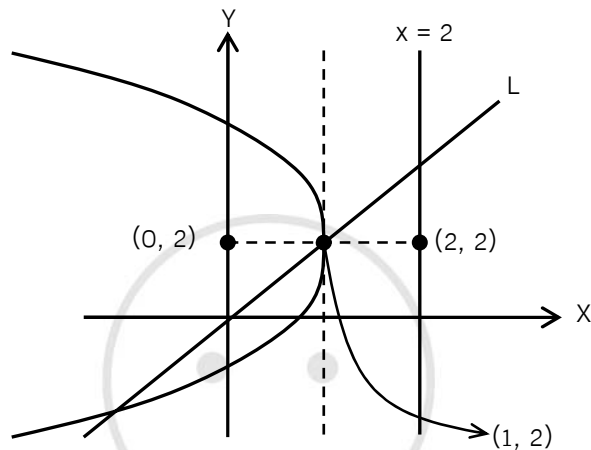
คือ  $x = 2$

ขั้นที่ 2 วาดรูปได้ดังนี้





ขั้นที่ 3 จากโจทย์ บอกให้ลากเส้นตรงผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา จึงได้รูปดังนี้



เส้นตรง L คือ เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด (0, 0) และ จุดยอดของพาราโบลา จุด V(1, 2)

$$\begin{aligned} \therefore \text{สมการเส้นตรง L} & \text{ คือ } (y - y_1) = m \cdot (x - x_1) \\ & \text{ คือ } (y - 0) = m \cdot (x - 0) \\ & \text{ คือ } (y - 0) = \frac{2-0}{1-0} \cdot (x - 0) \\ & \text{ คือ } y = 2x \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4

แก้สมการหาจุดตัด ระหว่างเส้นตรง L กับเส้นไดเรกทริกซ์

$$\begin{cases} \text{L : } y = 2x \rightarrow (๑) \\ \text{เส้นไดเรกทริกซ์ : } x = 2 \rightarrow (๒) \end{cases}$$

แก้สมการ (๑), (๒) ;  $\therefore$  ตัดกันที่จุด (2, 4)

โจทย์ให้ว่า ตัดกันที่จุด (a, b)

$$\therefore a = 2, b = 4 \rightarrow \text{ดังนั้น } a + b = 6 \text{ ตอบ ข้อ 3.}$$

FPAT-Pb54 (PAT1'ก.ค.52) จงหาระยะทางระหว่างจุดโฟกัสของพาราโบลา  $y^2 = -8x$  กับเส้นตรง  $2x + y = 6$

- 1)  $2\sqrt{5}$  หน่วย      2)  $3\sqrt{5}$  หน่วย      3)  $4\sqrt{5}$  หน่วย      4)  $5\sqrt{5}$  หน่วย

FPAT-Pb55 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ P เป็นจุดตัดของเส้นตรง  $x - 2y = 0$  และเส้นไคเรกตริกซ์ของพาราโบลา  $x^2 = 8y$  ระยะระหว่างจุด P และเส้นตรง  $2x - y = 1$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\frac{6}{\sqrt{5}}$  หน่วย      2)  $\frac{7}{5}$  หน่วย      3) 7 หน่วย      4)  $\frac{7}{\sqrt{5}}$  หน่วย

FPAT-Pb56 (PAT1'มี.ค.52) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา  $y^2 - 4y + 4x = 0$  และเส้นไคเรกตริกซ์ที่จุด (a, b) แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 4      2) 5      3) 6      4) 7

KMK-Pb2.8 (PAT1'ต.ค.52) พาราโบลามีจุดยอดที่ (-1, 0) และมีจุดกำเนิดเป็นจุดโฟกัส ถ้าเส้นตรง  $y = x$  ตัดพาราโบลาที่จุด P และจุด Q แล้ว ระยะทางระหว่างจุด P กับจุด Q เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

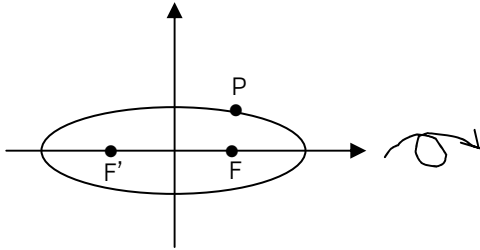
Happy-Pb 6.2 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น  $x^2 - y^2 - 2x = 0$

ถ้าพาราโบลามีโฟกัสเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดตัดของเส้นตรง  $y = 2x$  กับเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลามีเส้นไคเรกตริกซ์เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบล่าแล้วสมการของพาราโบลาคือข้อใด

- 1)  $9x^2 + 12x + 12y - 3 = 0$   
2)  $9x^2 + 12x + 12y + 8 = 0$   
3)  $9x^2 + 6x + 12y - 3 = 0$   
4)  $9x^2 + 6x + 12y + 5 = 0$

**โจทย์ภาคตัดกรวย แนวนวงรี**

นิยาม วงรี คือ เซตของจุดใดๆ บนระนาบที่ผลบวกของระยะจากจุดใดๆ ไปยังจุดคงที่ทั้งสองมีค่าคงที่เท่ากับ  $2a$



สูตร 4.2!  $|PF + PF'| = 2a$

จุดคงที่ทั้งสองเรียกว่า จุด F, จุด F'

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
<p>จุดยอด <math>V = (h + a, k)</math> <math>V' = (h - a, k)</math></p>	<p>จุดยอด <math>V = (h, k + a)</math> <math>V' = (h, k - a)</math></p>
<p>จุดปลายแกนโท <math>B = (h, k + b)</math> <math>B' = (h, k - b)</math></p>	<p>จุดปลายแกนโท <math>B = (h + b, k)</math> <math>B' = (h - b, k)</math></p>
<p>จุดโฟกัส <math>F = (h + c, k)</math> <math>F' = (h - c, k)</math></p>	<p>จุดโฟกัส <math>F = (h, k + c)</math> <math>F' = (h, k - c)</math></p>
<p>ความยาวแกนเอก = <math>2a \rightarrow</math> ขนานกับแกน X ความยาวแกนโท = <math>2b</math></p>	<p>ความยาวแกนเอก = <math>2a \rightarrow</math> ขนานกับแกน Y ความยาวแกนโท = <math>2b</math></p>

สูตร 4.3!  $a^2 = b^2 + c^2$

- เมื่อ a คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางวงรี จนถึง จุดปลายแกนเอก  
 b คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางวงรี จนถึง จุดปลายแกนโท  
 c คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางวงรี จนถึง จุดโฟกัส

Happy-Pb 6.3 (PAT1'ไม.ย.57) วงรีมีสมการเป็น  $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$

เมื่อ A, B, C เป็นจำนวนจริง

โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (2, 1)

และแกนเอกยาวเป็นสองเท่าของแกนโท

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1.  $A + B + C = 0$

2. ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี เท่ากับ  $\frac{\sqrt{3}}{5}$

3. วงรีมีศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลม  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$   
และแกนเอกของวงรียาวเท่ากับรัศมีของวงกลม

4. ผลบวกของระยะทางจากจุด (2, 6) ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองของวงรีเท่ากับ 20 หน่วย

แนวคิด

ขั้นที่ 1 วงรีมีสมการเป็น  $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$  มีจุดศูนย์กลางที่จุด (2, 1)

$$\therefore \text{สมการวงรี คือ } \frac{(x-2)^2}{(a)^2} + \frac{(y-1)^2}{(b)^2} = 1$$

ขั้นที่ 2 โจทย์ให้ แกนเอกยาวเป็นสองเท่าของแกนโท (นั่นคือ  $a = 2b$ )

วงรีจึงต้องมีสมการในรูปมาตรฐานเป็น  $\frac{(x-2)^2}{(2b)^2} + \frac{(y-1)^2}{(b)^2} = 1$

คูณกระจาย จัดรูป

$$(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = 4b^2$$

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + (8 + 4b^2) = 0 \rightarrow (*)$$

ขั้นที่ 3 โจทย์ให้  $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$

เทียบกับ(\*) ;  $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + (8 - 4b^2) = 0$

$$\therefore 8 - 4b^2 = -92$$

$$\therefore b^2 = 25$$

ขั้นที่ 4 แทน  $b^2 = 25$  ลงใน สมการ (\*)

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + (8 - 4b^2) = 0$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + (8 - 4 \cdot 25) = 0$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$$

เทียบกับโจทย์ให้  $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$

$$\therefore A = 4, B = -4, C = -8$$

จัดรูปกำลังสองสัมบูรณ์ต่อเนื่อง

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

เทียบกับรูปมาตรฐาน  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$\therefore a^2 = 100, b^2 = 25$$

$$\therefore a = 10, b = 5$$

(1) ผิด :  $A + B + C = 4 - 4 - 8 = -8 \neq 0$

(2) ผิด : วงรีมี  $b = 5$  และ  $a = 2b = 10$

$$\text{ทำให้ } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$\text{ดังนั้น ความเยื้องศูนย์กลาง} = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{5}$$

(3) ผิด : วงกลม  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

$$\text{มีรัศมียาว } \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 - 4(-20)}}{2} \text{ หน่วย} = 5 \text{ หน่วย}$$

แต่แกนเอกของวงรียาว  $2a = 20$  หน่วย

ดังนั้น แกนเอกของวงรียาวกว่ารัศมีของวงกลม

(4) ถูก : เนื่องจาก  $(2, 6)$  แทนค่าลงใน  $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$  แล้วเป็นจริง

$\therefore$  จุด  $P(2, 6)$  จึงเป็นจุดบนวงรี ให้  $F_1, F_2$  เป็นจุดโฟกัสของวงรี

โดยนิยามของวงรี จะได้  $PF_1 + PF_2 = 2a = 2(10) = 20$  หน่วย ตอบ ข้อ 4.

**KMK-Pb1.6** (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้  $S = [-2, 2]$  และ  $r = \{(x, y) \in S \times S \mid x^2 + 2y^2 = 2\}$

ช่วงในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ  $D_r - R_r$

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| 1) (-1.4, -1.3) | 2) (-1.3, -1.2) |
| 3) (1.2, 1.4)   | 4) (1.4, 1.5)   |

**FPAT-Pb57** (B-PAT1'ต.ค.51) วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (1, 2) แกนเอกขนานกับแกน X และยาว 6 หน่วย แกนโทยาว 4 หน่วย ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้เป็น

- |           |           |
|-----------|-----------|
| 1) (0, 1) | 2) (2, 0) |
| 3) (1, 4) | 4) (4, 1) |

**FPAT-Pb58** (PAT1'ก.ค.52) ให้ E เป็นวงรีที่มีจุดโฟกัสทั้งสองอยู่บนวงกลม C ที่มีสมการเป็น  $x^2 + y^2 = 1$  ถ้าวงรี E สัมผัสกับวงกลม C ที่จุด (1, 0) แล้วจุดใดต่อไปนี้อยู่บนวงรี E

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ | 2) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ |
| 3) $(\frac{1}{3}, 1)$           | 4) $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ |

**FPAT-Pb59** (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้ วงรีรูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด  $(\pm 3, 0)$  และผ่านจุด  $(2, \frac{\sqrt{21}}{2})$  จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงรีที่กำหนด

- |            |                               |
|------------|-------------------------------|
| 1) (-4, 0) | 2) $(0, \frac{5\sqrt{2}}{2})$ |
| 3) (6, 0)  | 4) $(0, -3\sqrt{2})$          |

**NaDate-Pb2.31** (PAT1'มี.ค.56) ให้วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0, 0) และมีโฟกัส  $F_1$  และ  $F_2$  อยู่บนแกน X จุด  $A(4, 1)$  เป็นจุดบนวงรีโดยที่ผลบวกระยะทางจากจุด  $A(4, 1)$  ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองมีค่าเท่ากับ  $6\sqrt{2}$  ให้เส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุด (4.5, 0) และสัมผัสกับวงรีที่จุด  $A(4, 1)$  ถ้า d เป็นระยะห่างระหว่างจุด (0, 0) กับเส้นตรง L แล้วค่าของ  $d^2|AF_1||AF_2|$  เท่ากับเท่าใด  
ตอบ.....

**Sigo-Pb1.19** (PAT1'มี.ค.58) กำหนดให้ วงรีรูปหนึ่ง ผ่านจุด (8, 0) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (4, -1) และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (1, -1)

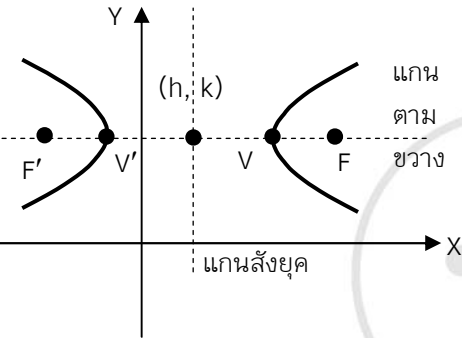
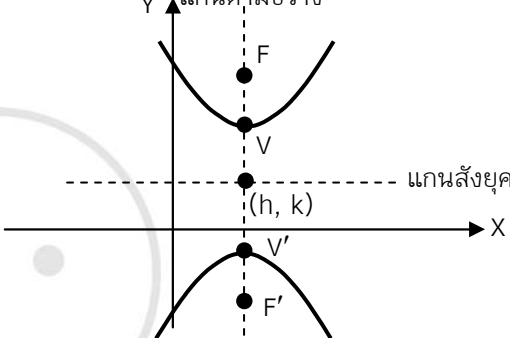
ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุดปลายของแกนโทของวงรีในควอดรันต์ (quadrant) ที่ 1 และมีเส้นไดเรกทริกซ์ทับแกนเอกของวงรี แล้วสมการของพาราโบลารูปนี้ตรงกับสมการในข้อใดต่อไปนี้เป็น

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $x^2 - 8x + 4y + 13 = 0$ | 2) $x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$ |
| 3) $x^2 - 8x + 6y - 12 = 0$ | 4) $x^2 - 8x - 6y + 19 = 0$ |

### โจทย์ภาคตัดกรวย แนวไฮเพอร์โบลา

นิยาม ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดบนระนาบที่ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุดคงที่ทั้งสองมีค่าที่เท่ากับ  $2a$

สูตร  $|PF - PF'| = 2a$   
 เมื่อจุด P คือ จุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลา

 $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	 $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จุดยอด $V = (h + a, k)$ $V' = (h - a, k)$	จุดยอด $V = (h, k + a)$ $V' = (h, k - a)$
จุดปลายลึงยุค $B = (h, k + b)$ $B' = (h, k - b)$	จุดปลายลึงยุค $B = (h + b, k)$ $B' = (h - b, k)$
จุดโฟกัส $F = (h + c, k)$ $F' = (h - c, k)$	จุดโฟกัส $F = (h, k + c)$ $F' = (h, k - c)$
ความยาวแกนตามขวาง = $2a \rightarrow$ อยู่ในแกน X ความยาวแกนลึงยุค = $2b$	ความยาวแกนตามขวาง = $2a \rightarrow$ อยู่ในแกน Y ความยาวแกนลึงยุค = $2b$

สูตร!  $c^2 = a^2 + b^2$

- เมื่อ  $a$  คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลา จนถึง จุดยอด
- $b$  คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลา จนถึง จุดปลายแกนลึงยุค
- $c$  คือ ระยะ ที่วัดจาก จุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลา จนถึง จุดโฟกัส

Happy-Pb 6.4 (PAT1'เม.ย.57) ให้ F เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา  $4y = x^2 - 6x + 13$

ไฮเพอร์โบลาที่มีสมบัติต่างๆ ดังนี้

(ก) แกนตามขวางขนานกับแกน Y

(ข) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด F

(ค) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $(3, 2 + 2\sqrt{13})$

(ง) แกนสังยุคยาว 12 หน่วย

ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา

1.  $4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y + 144 = 0$

2.  $4x^2 - 9y^2 - 24x - 36y - 36 = 0$

3.  $9y^2 - 4x^2 - 24x + 36y - 144 = 0$

4.  $9y^2 - 4x^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

แนวคิด

ขั้นที่ 1 จัดรูปสมการพาราโบลา  $4y = x^2 - 6x + 13 \rightarrow (x - 3)^2 = 4(y - 1)$

พาราโบลานี้จึงเป็นพาราโบลาหงาย ที่มีจุดยอด  $(3, 1)$  และ  $c = 1$

ทำให้จุดโฟกัสของพาราโบลา คือ จุด  $F(3, 1 + 1) = F(3, 2)$

ขั้นที่ 2

ไฮเพอร์โบลา มีแกนตามขวางขนานกับแกน Y และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $F(3, 2)$

ทำให้สมการของไฮเพอร์โบลา ต้องอยู่ในรูป  $\frac{(y - 2)^2}{a^2} - \frac{(x - 3)^2}{b^2} = 1$

จากที่จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่  $(3, 2 + 2\sqrt{13})$  ทำให้ได้  $c = (2 + 2\sqrt{13}) - 2 = 2\sqrt{13}$

และจากที่แกนสังยุคยาว 12 หน่วย จะได้  $b = \frac{12}{2} = 6$

เรารู้ว่า  $a^2 + b^2 = c^2$  ฉะนั้น  $a^2 + 6^2 = (2\sqrt{13})^2$  จะได้  $a^2 = 16$

ทำให้ได้สมการของไฮเพอร์โบลา  $\frac{(y - 2)^2}{16} - \frac{(x - 3)^2}{36} = 1$

คูณด้วย -144 ;  $-9(y^2 - 4y + 4) + 4(x^2 - 6x + 9) = -144$

$\therefore 4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y + 144 = 0$  ตอบ ข้อ 1.

KMK-Pb1.10 (PAT1'ต.ค.52) ให้ E เป็นวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุดยอดของไฮเพอร์โบลา  $x^2 - y^2 = 1$

ถ้า E ผ่านจุด  $(0, 1)$  แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บน E

1)  $(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

2)  $(1, \sqrt{2})$

3)  $(1, -\frac{1}{2})$

4)  $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$



**FPAT-Pb62 (B-PAT1'ต.ค.51)** ให้  $F_1, F_2$  เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา  $2(x-1)^2 - (y-2)^2 = 8$  โดยที่  $F_2$  อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 วงกลมที่มี  $F_2$  เป็นจุดศูนย์กลางและผ่านจุด  $(2\sqrt{3}, 3)$  คือวงกลมที่มีสมการดังข้อใด

- 1)  $(x + (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 + 2$       2)  $(x - (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 + 2$   
 3)  $(x + (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 - 2$       4)  $(x - (1 + 2\sqrt{3}))^2 = 4y - y^2 - 2$

**FPAT-Pb63 (PAT1'ก.ค.52)** กำหนด  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 17\}$

$P = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$        $Q = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 = 1\}$

ถ้า  $a \in S \cap P$  และ  $b \in S \cap Q$  แล้วระยะทางที่น้อยที่สุดระหว่าง  $a$  และ  $b$  เท่ากับเท่าใด

- 1)  $3\sqrt{2} - 4$       2)  $2\sqrt{3} - 2$       3)  $3\sqrt{2} - 2$       4)  $2\sqrt{3} - 4$

**FPAT-Pb64 (PAT1'มี.ค.52)** กำหนดให้  $A = \{a \mid \text{เส้นตรง } y = ax \text{ ไม่ตัดกราฟ } y^2 = 1 + x^2\}$

และ  $B = \{b \mid \text{เส้นตรง } y = x + b \text{ ตัดกราฟ } y^2 = 1 - x^2 \text{ สองจุด}\}$

เซต  $\{d \mid d = c^2, c \in B - A\}$  เท่ากับช่วงใดต่อไปนี้

- 1)  $(0, 1)$       2)  $(0, 2)$       3)  $(1, 2)$       4)  $(0, 4)$

**KAI0U-Pb1.8 (PAT1'มี.ค.53)** กำหนดให้วงรี  $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$  แล้วไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรีและผ่านจุด  $(-3, 1 + \sqrt{8})$  มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $5y^2 - 4x^2 - 10\sqrt{8}y - 32x - 25 = 0$       2)  $3y^2 - 2x^2 - 6\sqrt{8}y - 8x + 15 = 0$   
 3)  $y^2 - 4x^2 - 2y - 16x - 19 = 0$       4)  $y^2 - 7x^2 - 2y - 28x - 28 = 0$

**SheLL1.8 (PAT1'ก.ค.53)** กำหนดวงกลมรูปหนึ่งที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนจุดศูนย์กลาง และจุดโฟกัสด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลา  $9x^2 - 16y^2 - 90x + 64y + 17 = 0$  แล้ววงกลมดังกล่าวนี้มีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\frac{25\pi}{4}$  ตารางหน่วย      2)  $\frac{25\pi}{2}$  ตารางหน่วย      3)  $4\pi$  ตารางหน่วย      4)  $5\pi$  ตารางหน่วย

**NaDate-Pb1.17 (PAT1'มี.ค.56)** ให้  $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$  เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา

ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีแกนสมมาตรขนานแกน  $Y$  ตัดแกน  $X$  ที่จุด  $(1, 0)$  และผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้ไม่อยู่บนพาราโบลา

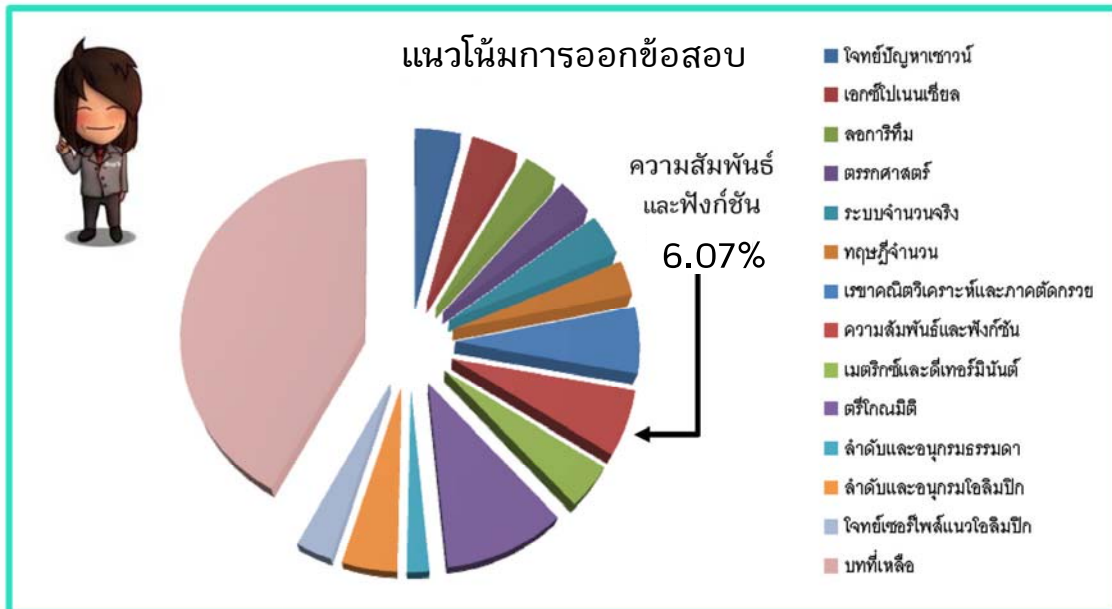
- 1)  $(2, \frac{1}{8})$       2)  $(-1, \frac{1}{2})$       3)  $(3, \frac{1}{2})$       4)  $(4, \frac{1}{4})$

**Happy-Pb 6.4.2 (สามัญ'57)** ให้  $F$  เป็นจุดโฟกัสที่อยู่จุดภาคที่ 1 ของ  $\frac{x^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

แล้ววงกลมที่มีศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $F$  และสัมผัสกับเส้นกำกับทั้งสองของไฮเพอร์โบลามีรัศมียาวกี่หน่วย

ตอบ .....

# สรุปภาพรวม “ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ความสัมพันธ์ แนวอินเวอร์สของความสัมพันธ์
2. โจทย์ความสัมพันธ์ แนวโดเมนและเรนจ์
3. โจทย์ฟังก์ชัน แนวคำนวณฟังก์ชันธรรมดา VS อินเวอร์ส
4. โจทย์ฟังก์ชัน แนวคอมโพสิต
5. โจทย์ฟังก์ชัน แนวพีชคณิต
6. โจทย์ฟังก์ชัน แนวสมการเชิงฟังก์ชันโอลิมปิก

โจทย์ความสัมพันธ์ แนวอินเวอร์สของความสัมพันธ์

FPAT-Pb77 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้  $r = \{(x, y) \mid 2y = 3x - 4\}$   
 ถ้า  $a, b$  เป็นค่าคงตัว และ  $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$  แล้ว  $3a - \frac{b}{4}$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1)  $\frac{5}{3}$                       2)  $\frac{3}{4}$                       3)  $\frac{4}{5}$                       4)  $\frac{4}{3}$

แนวคิด

ตอบ 1)  $\frac{5}{3}$

แนวคิด

ขั้นที่ 1

จากโจทย์  $r = \{(x, y) \mid 2y = 3x - 4\}$

$\therefore r^{-1} = \{(x, y) \mid 2x = 3y - 4\}$

$\therefore r^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\}$

ขั้นที่ 2

จากขั้นเมื่อก็  $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\}$

จากที่โจทย์กำหนดให้  $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$

เทียบสัมประสิทธิ์  $\therefore a = \frac{2}{3}$  และ  $b = \frac{4}{3}$

ขั้นที่ 3

$\therefore$  จะหา  $3a - \frac{b}{4} = 3\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)$

$= 2 - \frac{1}{3}$

$= \frac{5}{3}$

**หลักการ** จากครู Sup'k

หลักการหา "อินเวอร์ส"

ให้เปลี่ยน  $x \rightarrow$  ไปเป็น  $y$

ให้เปลี่ยน  $y \rightarrow$  ไปเป็น  $x$

FPAT-Pb78 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดความสัมพันธ์  $r = \{(x, y) \mid x \in [-1, 1] \text{ และ } y = x^2\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก.  $r^{-1} = \{(x, y) \mid x \in [0, 1] \text{ และ } y = \pm\sqrt{|x|}\}$
- ข. กราฟของ  $r$  ตัดกับกราฟของ  $r^{-1}$  เพียง 2 จุด เท่านั้น

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด



โจทย์ฟังก์ชัน แนวคำนวณฟังก์ชันคอมโพสิต VS อินเวอร์ส

Happy-Pb7.3 (PAT1'เม.ย.57) ให้  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  และ  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

สูตร

โดยที่  $f(x) = ax + 2$  และ  $g(x) = x^3 - 3x(x - 1)$

ถ้า  $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 1$  แล้ว  $(g \circ f)(a)$  มีค่าเท่าใด

ตอบ .....

วิธีลัด

วิธีจริง

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  และ  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $f(x) = ax + 2$  และ  $g(x) = x^3 - 3x(x - 1)$

ให้  $g^{-1}(1) = k$  จะได้  $g(k) = 1$

ฉะนั้น  $k^3 - 3k(k - 1) = 1$

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$$

$$(k - 1)^3 = 0$$

$$k = 1$$

ดังนั้น  $g^{-1}(1) = 1$

จาก  $f(x) = ax + 2$  จะได้  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{a}$

เพราะว่า  $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 1$  และ  $g^{-1}(1) = 1$

ฉะนั้น  $f^{-1}(1) = 1$

$$\frac{1-2}{a} = 1$$

$$a = -1$$

จะได้  $f(x) = -x + 2$  ทำให้  $f(a) = f(-1) = -(-1) + 2 = 3$

ดังนั้น  $(g \circ f)(a) = g(f(-1)) = g(3) = 3^3 - 3(3)(3 - 1) = 9$

**Peach-Pb2.32** (แนว PAT1'ต.ค.55)

ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันซึ่ง  $f(x + 5) = x^3 - x^2 + 2x$  และ  $g^{-1}(2x - 1) = x + 4$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อ  $I$  แทน เซตของจำนวนเต็ม

ก.  $(f - g)(0) < -169$

ข.  $\{x \in I \mid (g \circ f)(x) + 5 = 0\}$  เป็นเซตว่าง

ข้อใดต่อไปนี้สรุปถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก และ ข. ผิด    3) ก. ผิด และ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

**KMK-Pb2.3** (PAT1'ต.ค.52) ถ้า  $f(x) = \frac{1}{x}$  และ  $g(x) = 2f(x)$  แล้ว จงหา  $g \circ f(3) + f \circ g^{-1}(3)$

ตอบ.....

**FPAT-Pb66** (B-PAT1'ต.ค.51) ให้  $f(x) = \frac{x}{2} + 1$  และ  $g(x) = x^3$ ,  $(f^{-1} \circ g)(3)$  มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 16                      2) 20                      3) 50                      4) 52

**FPAT-Pb66.1** ให้  $f(x) = \frac{x+3}{x+6}$  และ  $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{-6x}{x-1}$  ถ้า  $g(a) = 2$  แล้ว  $a$  อยู่ในช่วงใด

- 1)  $[-1, 1)$                       2)  $[1, 3)$                       3)  $[3, 5)$                       4)  $[5, 7)$

**FPAT-Pb67** (PAT1'ก.ค.52) กำหนดฟังก์ชัน  $f(x) = x - 5$  และ  $g(x) = x^2$

ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริงที่ทำให้  $f \circ g(a) = g \circ f(a)$  แล้ว  $(f \cdot g)(a)$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) 18                      2) -18                      3) 25                      4) -25

**Happy-Pb7.2** (PAT1'เม.ย.57) ให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า  $f : R \rightarrow R$  และ  $g : R \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

โดยที่  $(f \circ g)(x) = 4x - 5$  และ  $g^{-1}(x) = 2x + 1$  ทุกจำนวนจริง  $x$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $4(f^{-1} \circ g)(2x + 1) = g(x) + 1$  ทุกจำนวนจริง  $x$     ข.  $(g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g))(x) = f^{-1}(x) + 1$  ทุกจำนวนจริง  $x$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก และ ข. ผิด    3) ก. ผิด และ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

**SiGo-Pb2.42** (PAT1'เม.ย.57) กำหนดให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง

ให้  $f : R \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

และ  $g : R \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชัน โดยที่  $g(x) = 2f(x) + 5$  สำหรับทุก  $x \in R$

ถ้า  $a$  เป็นจำนวนจริง ที่ทำให้  $(f \circ g^{-1})(1 + a) = (g \circ f^{-1})(1 + a)$

แล้ว  $a^2$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

โจทย์ฟังก์ชัน แนวสมการเชิงฟังก์ชันโอลิมปิก

\*NaDate-Pb2.50 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง  
 ถ้า  $f : R \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสอดคล้องกับ  $(f \circ f)(x) = 4 + x(4 - f(x))$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $x$   
 แล้วค่าของ  $f(4)$  เท่ากับเท่าใด  
 ตอบ .....

แนวคิด

ขั้นที่ 1 จากโจทย์  $f(f(x)) = 4 + x(4 - f(x)) \dots (*)$

ขั้นที่ 2 แทน  $x = 0$  ลงใน (\*)  
 จะได้  $f(f(0)) = 4 + 0(4 - f(0))$   
 $f(f(0)) = 4 \dots (#)$

ขั้นที่ 3 แทน  $x = f(0)$  ลงใน (\*)  
 จะได้  $f(f(f(0))) = 4 + f(0)(4 - f(f(0)))$   
 จาก (#) ;  $f(4) = 4 + f(0)(4 - 4)$   
 $f(4) = 4 + f(0)(0)$   
 $\therefore f(4) = 4$  ตอบ

\* Happy-Pb7.4 (PAT'เม.ย.57) กำหนดให้  $f : R \rightarrow R$  และ  $g : R \rightarrow R$   
 และ  $f(x + g(y)) = 2x + y + 15$  ทุกจำนวนจริง  $x$  และ  $y$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

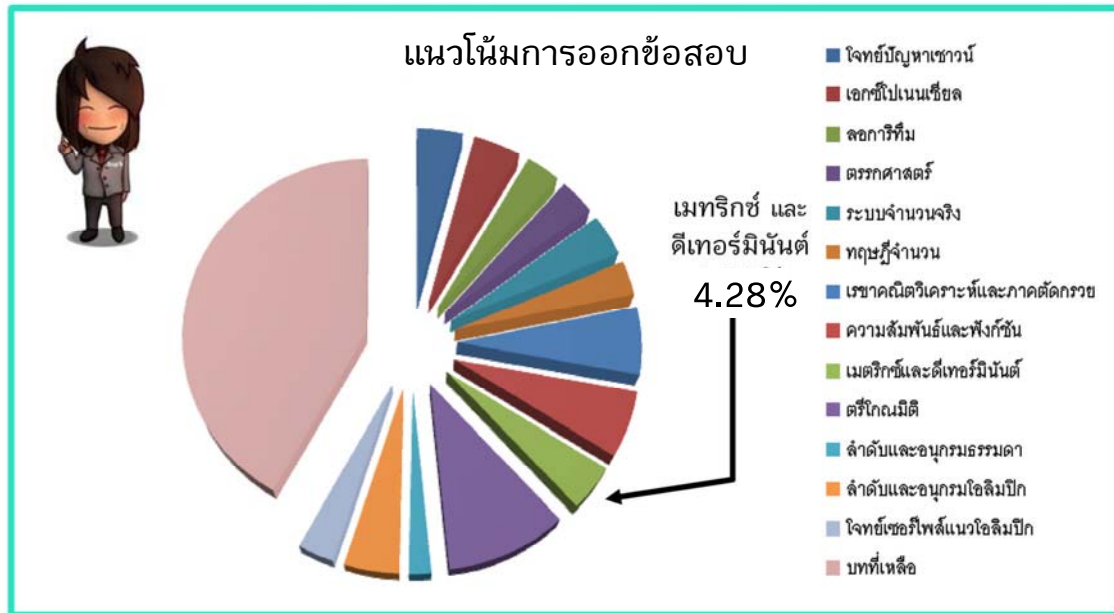
ก.  $(g \circ f)(x) = 2x + 15$  ทุกจำนวนจริง  $x$

ข.  $g(25 + f(57)) = 75$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) ก. ถูก และ ข. ถูก | 2) ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3) ก. ผิด และ ข. ถูก | 4) ก. ผิด และ ข. ผิด |

# สรุปภาพรวม “เมทริกซ์ และดีเทอร์มิแนนต์” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์เมทริกซ์ แนวพื้นฐานและการหาอินเวอร์ส และสมการเมทริกซ์
2. โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ แนวทฤษฎีของ det ดีเทอร์มิแนนต์, ไมเนอร์, โคแฟกเตอร์
3. โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ แนวสูตรของ det ดีเทอร์มิแนนต์
4. โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ แนวสูตรของ det (adj A)
5. โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ แนว det ของเมทริกซ์บวกกัน
6. โจทย์เมทริกซ์ แนวแก้สมการหลายตัวแปร

เมทริกซ์ : อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ (ตัวผกผันของเมทริกซ์)

$$\text{นิยาม 1.1!! } AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

เมทริกซ์  $B_{n \times n}$  เป็นอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์  $A_{n \times n}$

ก็ต่อเมื่อ  $AB = I = BA$  เขียนแทนด้วย  $B = A^{-1}$

สูตร 1.2!! ตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์  $A$ , อินเวอร์สของเมทริกซ์  $A$ ,  $A^{-1}$  สำหรับมิติ  $n \times n$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

สูตร 1.3!! ถ้า  $A = [n] \rightarrow \therefore A^{-1} = \left[ \frac{1}{n} \right]$  เมื่อ  $n \neq 0$

สูตร 1.4!! ถ้า  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \therefore A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

นิยาม 1.6!! สำหรับเมทริกซ์  $A_{n \times n}$  ขนาดมิติใดๆ

ถ้า  $\det A = 0$  แล้ว จะเรียก เมทริกซ์  $A$  ว่า “เมทริกซ์เอกฐาน”, “Singular Matrix”, “ซิงกูลาร์เมทริกซ์”

จะหา  $A^{-1}$  ไม่ได้

นิยาม 1.7!! สำหรับเมทริกซ์  $A_{n \times n}$  ขนาดมิติใดๆ

ถ้า  $\det A \neq 0$  แล้ว จะเรียก เมทริกซ์  $A$  ว่า “ไม่ใช่เมทริกซ์เอกฐาน”, “Non-singular Matrix”, “นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์”

จะหา  $A^{-1}$  ได้



Pb3 ให้  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  จงหา  $(A - 2B)^{-1}$

ตอบ .....

แนวคิด

ขั้นที่ 1 จาก  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow A = \frac{1}{(-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 จาก  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow B = \frac{1}{2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore B = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ขั้นที่ 3 จะหา } (A - 2B)^{-1} &= \left( \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{11}{3}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{9}{57} \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Sup'k ระวัง!!**  
 ~~$(A - 2B)^{-1} = A^{-1} - 2 \cdot B^{-1}$~~

**โจทย์เมทริกซ์ แนวหาอินเวอร์สของ  $2 \times 2$**

TF-PAT4 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับ  $2A - B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

และ  $A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$  จงหาว่า  $(AB)^{-1}$  คือ เมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$       2)  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$       3)  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$       4)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

**โจทย์เมทริกซ์ แนวแก้สมการเมทริกซ์**

SheLL2.30 (PAT1'ก.ค.53) ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

ถ้า  $3 \begin{bmatrix} 5^a & b \\ 2^c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^a & 6 \\ d-1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5^a + b \\ 2^c & 2d \end{bmatrix}$  แล้วค่าของ b + c เท่ากับเท่าใด **ตอบ.....**

SiGo-2.36 (PAT1'พ.ย.57) ให้ X และ y เป็นจำนวนจริง ที่สอดคล้องกับ

$$\begin{bmatrix} |x| & 1 \\ 2 & x - |y| \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} y & 3 \\ -1 & |y| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+x & 0 \\ 7 & 7-y \end{bmatrix}^t$$

ค่าของ x + y เท่ากับเท่าใด

**ตอบ.....**

KAiOU-Pb2.7 (PAT1'มี.ค.53) ให้ x, y, z และ w สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -1 \\ z & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix}$$

ค่าของ 4w - 3z + 2y - x เท่ากับเท่าใด

**ตอบ.....**

BRAN-Pb1.12 (PAT1'ต.ค.53) กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$

ถ้า  $A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  แล้วค่าของ xyz เท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

- 1) -3                      2) -1                      3) 0                      4) 1

KMK-Pb1.11 (PAT1'ต.ค.52) กำหนดให้  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  สอดคล้องกับสมการ  $AX = C$

เมื่อ  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$  และ  $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ถ้า  $(2A + B)X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  แล้ว a + b + c มีค่าเท่าใดต่อไปนี้

- 1) 3                      2) 6                      3) 9                      4) 12

**โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ : ทฤษฎีของ det ดีเทอร์มิแนนต์**

สูตร 3.1!! ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ของเมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$

$$A = [5] \rightarrow \therefore \det A = |[5]| = 5$$

$$B = [-7] \rightarrow \therefore \det B = |[-7]| = -7$$

Sup'k ระวัง!!

สูตร 3.2!! ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ของเมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \det C = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 9 \times 2 - 4 \times 5 = 18 - 20 = -2$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore \det D = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \times 7 - (-4) \times 5 = -14 + 20 = 6$$

สูตร 3.3!! กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  จะได้  $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$$\therefore \det A = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

ระวัง! สูตรคุณลงตอบเลย คุณขึ้นใส่ลบซ้อน ใช้ได้เฉพาะ  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$

TF-PAT1 (B-PAT1'ต.ค.51) ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & b & 2 \end{bmatrix} \text{ และ } Y = \begin{bmatrix} 2 & a & 3 \\ 2 & b & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

โดยที่ X และ Y ไม่มีตัวผกผัน แล้ว a + b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -1

2) -2

3) -3

4) -4

**โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ : สูตรของไมเนอร์, โคแฟกเตอร์**

นิยาม 4.1 กำหนดให้เมทริกซ์  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  โดยที่  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 2 ไมเนอร์ของ  $a_{ij}$  คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่  $i$  และหลักที่  $j$  ออกไป เขียนแทน ไมเนอร์ของ  $a_{ij}$  ด้วย  $M(a_{ij}), M_{ij}(A)$

นิยาม 4.2 กำหนดให้  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  โดยที่  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 2 โคแฟกเตอร์ของ  $a_{ij}$  คือ  $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}(A)$  เขียนแทน โคแฟกเตอร์ของ  $a_{ij}$  ด้วย  $C(a_{ij}), C_{ij}(A)$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \therefore M_{13}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$\rightarrow \therefore C_{13}(A) = (-1)^{1+3}M_{13}(A) = (-1)^4M_{13}(A) = (-1)^4(-5) = -5$$

TF-PAT2 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 1 & y \end{bmatrix}$  โดยที่  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริง

ถ้า  $C_{11}(A) = 13$  และ  $C_{21}(A) = 9$  แล้ว  $\det(A)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -33
- 2) -30
- 3) 30
- 4) 33

**โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ : สูตรของ det ดีเทอร์มิแนนต์**

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ  $n \times n$  และ k เป็นค่าคงที่ใดๆ

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det(cA) = c^n \cdot (\det A)$
- $\det I = 1, \det O = 0$

- $\det(A^t) = \det A$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- $\det(A^n) = (\det A)^n$

- $\det(-A) = \det A, n = \text{คู่}$
- $\det(-A) = -\det A, n = \text{คี่}$
- $\det(A \pm B) \neq \det A \pm \det B$

**Happy-Pb8.1** (PAT1'เม.ย.57) กำหนดเมทริกซ์  $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$  และ  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง โดยที่  $ab \neq 0$

ถ้า  $2(A - I)^{-1} = 4I - A$  แล้วพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $ab = 2$

ข.  $\det(3A^2A^tA^{-1}) = 324$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

แนวคิด

กำหนด  $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$  และ  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  โดยที่  $ab \neq 0$

จะได้  $A - I = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 3 \end{bmatrix}$  ทำให้  $(A - I)^{-1} = \frac{1}{0(3) - ab} \begin{bmatrix} 3 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{ab} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$

ก. ผิด : เพราะถ้า  $2(A - I)^{-1} = 4I - A$  จะได้ว่า  $\begin{bmatrix} -\frac{6}{ab} & \frac{2}{b} \\ \frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$

จะได้  $-\frac{6}{ab} = 3$  และ  $\frac{2}{b} = -a$  และ  $\frac{2}{b} = -b$

ดังนั้น  $a = -2$

ข. ถูก : เมื่อ  $ab = -2$  จะได้

NaDate-Pb2.33 (PAT1'มี.ค.56) ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ x & -1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix} \text{ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน}$$

และให้ y เท่ากับผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S

ถ้า  $A = \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$  แล้วค่าของ  $\det \left( \left( (A^t)^{-1} \right)^t \right)^{-1}$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

DJton-Pb15.1 (แนว PAT1'ต.ค.55) ให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์ ซึ่ง  $\det B \neq 0$

ถ้า  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$  และ  $\det (B^{-1}CB^t) = -4$  จงหาค่าของ  $\det (C^tAC)$  ตอบ .....

KAI OU-Pb2.6 (PAT1'มี.ค.53) ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด  $2 \times 2$

โดยที่  $2A - B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$  และ  $A - 2B = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  ค่าของ  $\det (A^4B^{-1})$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

KMK-Pb 1.12 (PAT1'ต.ค.52) ถ้า  $\det \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x-1}$  แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ แนว det (adj A)

AVATAR-Pb14.1 (แนวข้อสอบตรงเข้าแพทย์ กสพท) กำหนด A เป็นเมทริกซ์  $3 \times 3$  ที่มี  $\det(A) = 2$   
จงหา  $\det(\text{adj}(\text{adj}(A)))$       ตอบ.....  
แนวคิด & เทคนิค

Tips จากครู Sup'k

Peach-Pb2.34 (แนว PAT1'ต.ค.55) กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ  $3 \times 3$  โดยที่  $\det(A) \neq 0$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่า ถูก หรือผิด

ก.  $\det(A^3) = \det(\text{adj } A)$

ข. ถ้า  $A^2 = 2A$  แล้ว  $\det A = 2$

ข้อใดต่อไปนี้สรุปถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก และ ข. ผิด    3) ก. ผิด และ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

\* RaChiNee-Pb11.7 (สามัญ'57) ให้  $A = [a_{ij}]$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  และ  $\det(A) > 0$

ถ้า  $[M_{ij}(A)] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  และ  $A^{-1} = [b_{ij}]$  แล้ว  $b_{11} + b_{12} + b_{13}$  มีค่าเท่าใด      ตอบ

Sigo-Pb1.21 (PAT1'มี.ค.58) กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ  $3 \times 3$

โดยที่  $\det(A) > 0$ ,  $\det(A \text{adj} A) - 2(\det(A))^2 - 3\det(A) = 0$  และ  $AB = I$

เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณมิติ  $3 \times 3$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $7\det(B) - \det(A^t) < 0$

(ข)  $\det(2A - 3\text{adj}B) = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก    2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด    3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก    4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

**โจทย์ det ดีเทอร์มิแนนต์ : แนวให้สูตรของเมทริกซ์บวกกัน**

**Happy-Pb8.2 (PAT1'สี่.ค.57)** กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  และ B เป็นเมทริกซ์ใดๆ มิติ  $2 \times 2$

ให้ x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ  $\det(A^2 + xI) = 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $\det(A + xI) = 0$

ข.  $\det(A^2 + xI - B) = \det(B^t)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก และ ข. ผิด    3) ก. ผิด และ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

**MARARine-Pb27.2 (PAT1'สี่.ค.54)** กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม

และ  $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$  เป็นเมทริกซ์ ที่มี  $\det(A) = 3$

ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ  $2 \times 2$  โดยที่  $BA + BA^{-1} = 2I$  เมื่อ I เป็นเมทริกซ์

เอกลักษณ์การคูณมิติ  $2 \times 2$  แล้วค่าของ  $\det(B)$  อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

- 1) [1, 2]                      2) [-1, 0]                      3) [0, 1]                      4) [-2, -3]

**TF-PAT3 (PAT1'ก.ค.52)** ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ  $2 \times 2$  โดยที่  $\det(A) = 4$  และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

ถ้า  $A - 3I$  เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แล้ว  $\det(A + 3I)$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) 12                              2) 16                              3) 20                              4) 26

**BRAN-Pb2.36 (PAT1'ต.ค.53)** กำหนดให้ X เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

แล้วค่าของ  $\det(2X^t \cdot (X + X^t))$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

**SheLL1.12 (PAT1'ก.ค.53)** กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  และ  $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ค่าของ  $\det(2A^t + BC^2 + B^tC)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -1                              2) 0                              3) 2                              4) 6

**SheLL2.31 (PAT1'ก.ค.53)** ให้ a, b, c, d, t เป็นจำนวนจริง ถ้า  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  โดยที่  $\det(A) = t \neq 0$

และ  $\det(A + t^2A^{-1}) = 0$  แล้วค่าของ  $\det(A - t^2A^{-1})$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....



NaDate-Pb 1.13 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ มีมิติ  $3 \times 3$  โดยที่  $\det(A) = 2$

และ  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & -2 & y \end{bmatrix}$  เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง

ถ้า  $AB + 3A = 2I$  เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ที่มีมิติ  $3 \times 3$  แล้ว  $x + y$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 0                                      2) -1                                      3) -2                                      4) -2.5

**เมทริกซ์ผกผันของ A, adj (A)**

นิยาม 2.1 เมทริกซ์ผกผันของ A คือ adj A กำหนดให้  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  จะได้  $\text{adj } A = [C_{ij}]^t$

นิยาม 2.2  $\text{adj } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t$

สูตร 2.3  $A \cdot \text{adj } A = \text{adj } A \cdot A = (\det A)I$

**โจทย์เมทริกซ์ แนวนหาอินเวอร์สของ  $3 \times 3$**

**KMK-Pb2.11 (PAT1'ต.ค.52)** ให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

สมาชิกแถวที่ 3 หลักที่ 1 ของ  $A^{-1}$  เท่ากับเท่าใด **ตอบ.....**

แนวคิด ขั้นที่ 1      หา  $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -70 \neq 0$  ซึ่งสามารถหาอินเวอร์สได้

ขั้นที่ 2 ใช้สูตร       $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)$   
 $A^{-1} = \frac{1}{-70} \cdot (\text{adj } A)$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-70} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-70} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{11}}{-70} & \frac{C_{21}}{-70} & \frac{C_{31}}{-70} \\ \frac{C_{12}}{-70} & \frac{C_{22}}{-70} & \frac{C_{32}}{-70} \\ \frac{C_{13}}{-70} & \frac{C_{23}}{-70} & \frac{C_{33}}{-70} \end{bmatrix}$

$\therefore$  สมาชิกแถวที่ 3 หลักที่ 1 ของ  $A^{-1} = \frac{C_{13}}{-70} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot M_{13}}{-70} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-70}$

$= \frac{(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-70} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot ((-3) \cdot 2 - 1 \cdot 8)}{-70} = 0.2$

TF-PAT6 (B-PAT1'ต.ค.51) กำหนดให้  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$

เป็นเมทริกซ์ ที่มี  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$  แล้ว จงหาค่าของ  $a_{23}$

- 1) 0                      2)  $\frac{16}{70}$                       3)  $\frac{32}{70}$                       4)  $\frac{12}{70}$

TF-PAT7 (PAT1'มี.ค.52) ให้  $A^t = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  จงหาสมาชิกในแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ  $A^{-1}$

- 1)  $-\frac{2}{3}$                       2) -2                      3)  $\frac{2}{3}$                       4) 2

Happy-Pb8.3 (สามัญ'57) ให้  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  และ  $\det(A) > 0$

ถ้า  $[M_{ij}(A)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  และ  $A^{-1} = [b_{ij}]$  แล้ว  $b_{11} + b_{12} + b_{13}$  มีค่าเท่าใด

ตอบ.....

**โจทย์เมทริกซ์ แนวแก้สมการหลายตัวแปร**

TF-PAT8 (B-PAT1'ต.ค.51) ถ้า  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$$a - b + 2c = 9, \quad 2a + b - c = 0, \quad 3a - 2b + c = 11$$

แล้ว  $a$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) -4                      2) -2                      3) 2                      4) 4

TF-PAT9 (PAT1'มี.ค.52) กำหนดให้  $x, y, z$  สอดคล้องกับระบบสมการ

$$2x - 2y - z = -5, \quad x - 3y + z = -6, \quad -x + y - z = 4$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- 1)  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$                       2)  $x + y + z = 2$   
3)  $xyz = 6$                       4)  $\frac{xy}{z} = -2$

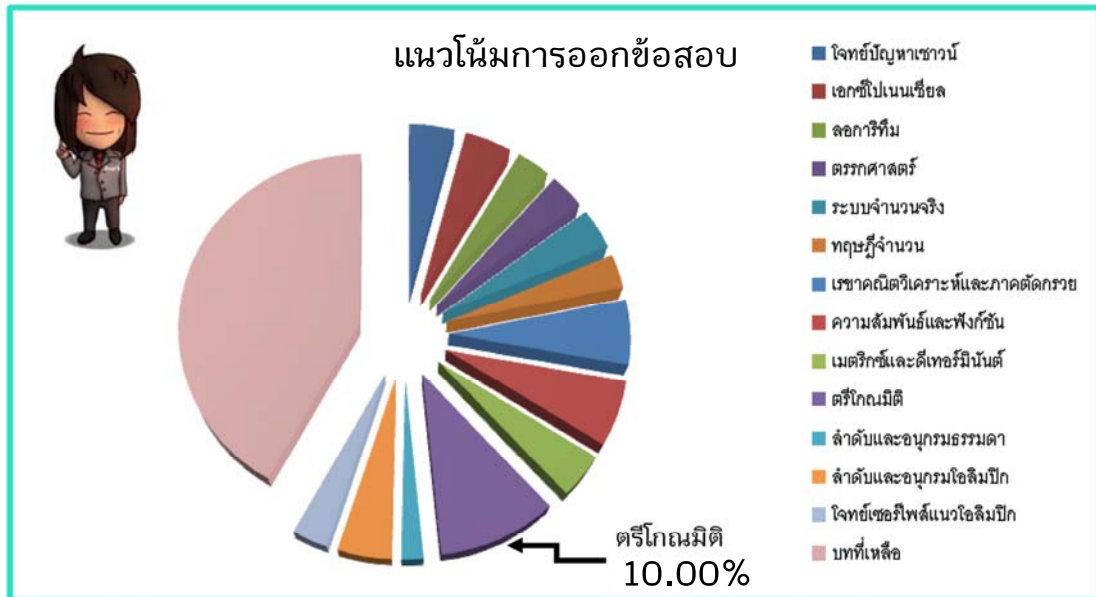
TF-PAT10 (PAT1'ก.ค.52) กำหนดให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับระบบสมการ

$$2a - 2b - c = 1, \quad a - 3b + c = 7, \quad -a + b - c = -5$$

แล้วค่าของ  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) 0                      2) 3                      3) 6                      4) 9

# สรุปภาพรวม “โจทย์ตรีโกณมิติ” เน้นเฉพาะที่ออกข้อสอบ



1. โจทย์ตรีโกณมิติ แนวสูตรตรีโกณประยุกต์
2. โจทย์ตรีโกณมิติ แนว  $(\sin \theta + \cos \theta)$  VS  $(\sin \theta \cdot \cos \theta)$
3. โจทย์ตรีโกณมิติ แนวอินเวอร์สตรีโกณ
4. โจทย์ตรีโกณมิติ แนวกฎของ  $\sin$  VS กฎของ  $\cos$

โจทย์ตรีโกณมิติ แนวสูตรตรีโกณประยุกต์

✦ สูตร 8.1! สูตรผลบวกหรือผลต่างของมุม

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \\ \sin(A - B) &= \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B \end{aligned}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}, \quad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

พิสูจน์  $\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} = \frac{\frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$

$$= \frac{\frac{\sin A \cancel{\cos B} + \cos A \sin B}{\cancel{\cos A} \cancel{\cos B}}}{\frac{\cancel{\cos A} \cancel{\cos B} - \sin A \sin B}{\cancel{\cos A} \cancel{\cos B}}} = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\cos B}{\cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\cot(A + B) = \frac{\cot A \cdot \cot B - 1}{\cot B + \cot A}, \quad \cot(A - B) = \frac{\cot A \cdot \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

Hormone Pb1.1 (PAT1'มี.ค.57) ถ้า  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$3 \sin(x - y) = 2 \sin(x + y)$  แล้ว  $(\tan^3 x)(\cot^3 y)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 8
- 2) 27
- 3) 64
- 4) 125

FPAT-Pb81 (PAT1'ก.ค.52) จงหาว่า  $\frac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ} - \frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}$  มีค่าเท่าใด

- 1) -4
- 2) -2
- 3) 2
- 4) 4

SheLL1.13 (PAT1'ก.ค.53) ถ้า  $\sin 15^\circ$  และ  $\cos 15^\circ$  เป็นคำตอบของสมการ  $x^2 + ax + b = 0$  แล้วค่าของ  $a^4 - b$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) -1
- 2) 1
- 3) 2
- 4)  $1 + 3\sqrt{2}$

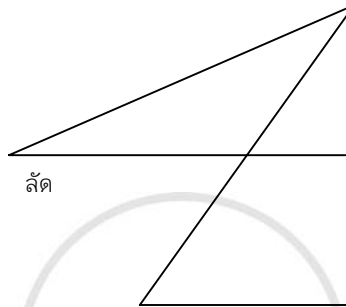
KMK-Pb2.5 (PAT1'ต.ค.52) ถ้า  $1 - \cot 20^\circ = \frac{x}{1 - \cot 25^\circ}$  แล้ว x มีค่าเท่าใด

ตอบ.....

\* KAI0U-Pb2.5 (PAT1'สี่.ค.53) ค่าของ  $\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ}$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

วิธีเร็วกว่า



วิธีจริง

$$\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ} = \frac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ}{\sin 36^\circ \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} - \cos 36^\circ}$$

$$= \frac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\sin 36^\circ \sin 18^\circ + \cos 36^\circ \cos 18^\circ} = \frac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos (36^\circ - 18^\circ)}$$

$$= \frac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = 2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ = 2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ$$

$$= \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2 \sin 36^\circ}$$

$$= \frac{\sin 144^\circ}{2 \sin 36^\circ} = \frac{1}{2} = 0.5$$

✦ สูตรมุม 2A

$$\begin{aligned}\sin 2A &= 2 \sin A \cdot \cos A \\ &= \frac{2 \cdot \tan A}{1 + \tan^2 A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2 \cdot \cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2 \cdot \sin^2 A \\ &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}\end{aligned}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \cdot \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cdot \cot A}$$

พิสูจน์

จาก สูตร  $\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$   
 แทนค่า มุม B = มุม A  
 จะได้เป็น  $\sin(A + A) = \sin A \cdot \cos A + \cos A \cdot \sin A$   
 $\therefore \sin(2A) = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A$  จบ

✦ แนวบทกลับของมุม 2A

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

พิสูจน์

จาก  $\cos 2A = 1 - 2 \cdot \sin^2 A$

$\therefore 2 \cdot \sin^2 A = 1 - \cos 2A$

$\therefore \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

พิสูจน์

จาก  $\cos 2A = 2 \cdot \cos^2 A - 1$

$\therefore \cos 2A + 1 = 2 \cdot \cos^2 A$

$\frac{1 + \cos 2A}{2} = \cos^2 A$

$$\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$$

พิสูจน์

$\tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$\tan^2 A = \frac{\frac{1 - \cos 2A}{2}}{\frac{1 + \cos 2A}{2}}$

$\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$

**โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวสูตรมุมสองเท่า**

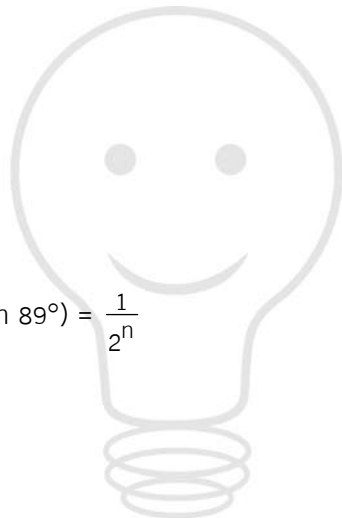
*NaDate-Pb1.9 (PAT1'มี.ค.56)* พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $\frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ$

ข.  $\sqrt{3} \cot 20^\circ = 1 + 4 \cos 20^\circ$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก
- 2) ก. ถูก และ ข. ผิด
- 3) ก. ผิด และ ข. ถูก
- 4) ก. ผิด และ ข. ผิด



**\*\*\*BRAN-Pb2.32 (PAT1'ต.ค.53)**

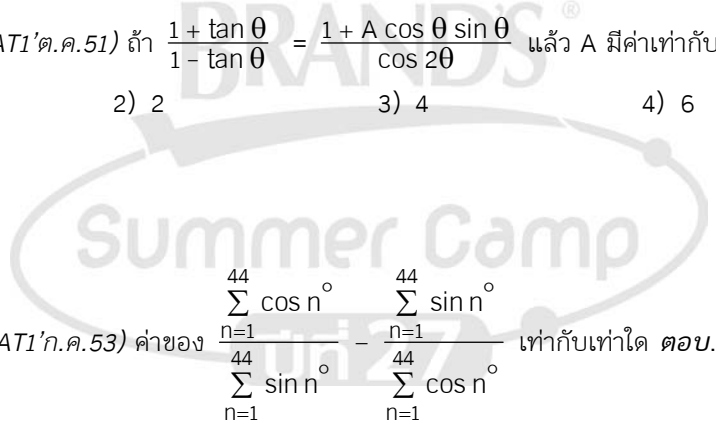
ให้  $(\sin 1^\circ)(\sin 3^\circ)(\sin 5^\circ) \cdot \dots \cdot (\sin 89^\circ) = \frac{1}{2^n}$

ค่าของ  $4n$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

*FPAT-Pb83 (B-PAT1'ต.ค.51)* ถ้า  $\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{1 + A \cos \theta \sin \theta}{\cos 2\theta}$  แล้ว A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 4
- 4) 6



**\*\*\*SheLL2.29 (PAT1'ก.ค.53)** ค่าของ  $\frac{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ} - \frac{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}$  เท่ากับเท่าใด *ตอบ.....*





**สูตรมุม 3A และ บทกลับ**

$$\begin{aligned} \sin 3A &= 3 \cdot \sin A - 4 \cdot \sin^3 A \\ \cos 3A &= 4 \cdot \cos^3 A - 3 \cdot \cos A \\ \tan 3B &= \frac{3 \cdot \tan B - \tan^3 B}{1 - 3 \cdot \tan^2 B} \\ \cot 3A &= \frac{\cot^3 A - 3 \cdot \cot A}{3 \cdot \cot^2 A - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^3 A &= \frac{3 \sin A - \sin 3A}{4} \\ \cos^3 A &= \frac{3 \cos A + \cos 3A}{4} \end{aligned}$$

**เทคนิค เพลงสูตรคณิต จากครู Sup'k**

ค่า  $\cos 3B$  ก็คือ  $4 \cdot \cos^3$  กำลัง three ลบด้วย three แล้ว ก็คูณ  $\cos$  มุม B  
 แต่บอกตอนนี่ **ไม่รู้** จะเร็วไปหรือไม่ ก็ยังไม่รู้ว่า เธอคิดเช่นไร

ค่า  $\cos 4D$  ต้องมีตัวเลข .....  
 ถ้าบอกคำนั้น แล้วเธอตอบมาว่า **ไม่ใช่** ถ้าเป็นแบบนี้ ก็คงจะเดินหนีไป

$\cos$  มุม 5B .....  
 มองกันให้ดี เธอก็คงรู้ ในความห่วยๆ ฉันมีอะไรซ่อนอยู่ ที่ยังไม่รู้ คือ เธอนั้นคิดอย่างไร

**Hormone Pb1.2 (PAT1'เม.ย.57)** ถ้า  $\cos 5\theta = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cdot \cos \theta$   
 เมื่อ  $\theta$  เป็นจำนวนจริงใดๆ  
 แล้ว  $a^2 + b^2 + c^2$  มีค่าเท่ากับเท่าใด  
 ตอบ .....

วิธีลัด

Summer Camp ปีที่ 27

มีวิธีจริง อยู่หน้าถัดไป

วิธีจริงที่ 1

วิธีจริงที่ 2

ให้  $z = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } (\cos \theta + i \sin \theta)^5 &= \left\{ \begin{aligned} &\cos^5 \theta + \binom{5}{1} (\cos \theta)^4 (i \sin \theta) \\ &+ \binom{5}{2} (\cos \theta)^3 (i \sin \theta)^2 \\ &+ \binom{5}{3} (\cos \theta)^2 (i \sin \theta)^3 + \binom{5}{4} (\cos \theta) (i \sin \theta)^4 + (i \sin \theta)^5 \end{aligned} \right. \\ \cos 5\theta + i \sin 5\theta &= \left\{ \begin{aligned} &\cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta - 10i \cos^2 \theta \sin^3 \theta \\ &+ 5 \cos \theta \sin^4 \theta + i \sin^5 \theta \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

**Tips** จากครู sup'k

ใช้เทคนิค จำนวนเชิงซ้อน  
และทวินามช่วยจัดรูปสูตร

$$\cos 5\theta + i \sin 5\theta = \left\{ \begin{aligned} &\cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ &+ i(5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta) \end{aligned} \right.$$

เทียบส่วนจริง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \cos 5\theta &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta (1 - \cos^2 \theta) + 5 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)^2 \\ &= \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 10 \cos^5 \theta + 5 \cos \theta (1 - 2 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) \\ &= 11 \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta - 10 \cos^3 \theta + 11 \cos^5 \theta \\ &= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta \end{aligned}$$

เทียบกับรูปแบบ  $\cos 5\theta = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cos \theta$

จะได้  $a = 16, b = -20, c = 5$

ดังนั้น  $a^2 + b^2 + c^2 = 256 + 400 + 25 = 681$  ตอบ

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนว  $(\sin \theta + \cos \theta)$  VS  $(\sin \theta \cdot \cos \theta)$

**NaDate-Pb2.28** (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้  $x$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$

ถ้า  $(1 + \tan^2 x) \cot x = \frac{a}{b}$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ ห.ร.ม. ของ  $a$  และ  $b$  เท่ากับ 1 แล้ว  $a^2 + b^2$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

แนวคิด & เทคนิค

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad \sin x + \cos x &= \frac{4}{3} \\ (\sin x + \cos x)^2 &= \frac{16}{9} \\ \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x &= \frac{16}{9} \\ 1 + 2 \sin x \cos x &= \frac{16}{9} \\ \sin x \cos x &= \frac{7}{18} \\ \text{เพราะว่า} \quad (1 + \tan^2 x) \cot x &= \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{1}{\frac{7}{18}} \\ (1 + \tan^2 x) \cot x &= \frac{18}{7} \end{aligned}$$

เพราะว่า ห.ร.ม. ของ 18 และ 7 เท่ากับ 1

จึงได้  $a = 18, b = 7$

$\therefore a^2 + b^2 = 18^2 + 7^2 = 373$  ตอบ

Tips จากครู Sup'k

**KAI0U-Pb1.7** (PAT1'มี.ค.53) กำหนดให้  $x$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $\sin x + \cos x = a$  และ  $\sin x - \cos x = b$  แล้วค่าของ  $\sin 4x$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\frac{1}{2}(a^3b - ab^3)$
- 2)  $\frac{1}{2}(ab^3 - a^3b)$
- 3)  $ab^3 - a^3b$
- 4)  $a^3b - ab^3$

KMK-Pb2.6 (PAT1'ต.ค.52)

ถ้า  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{3}{2}$  เมื่อ  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  แล้ว  $\arccos(\tan 3\theta)$  มีค่าเท่าใด

ตอบ .....

FPAT-Pb82 (PAT1'มี.ค.52) ถ้า  $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$  แล้วค่าของ  $\sin 2\theta$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\frac{4}{13}$                       2)  $\frac{9}{13}$                       3)  $\frac{4}{9}$                       4)  $\frac{13}{9}$

**BRAN-Pb2.33 (PAT1'ต.ค.53)** กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการ

$$5(\sin a + \cos a) + 2 \sin a \cos a = 0.04$$

จงหาค่าของ  $125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75 \sin a \cos a$  *ตอบ.....*

**วิธีจริง**

ให้  $x = \sin a + \cos a$  และ  $y = \sin a \cos a$

จากโจทย์จะได้  $5x + 2y = 0.04$  .....(1)

เนื่องจาก  $x^2 = (\sin^2 a + \cos^2 a) + 2 \sin a \cos a = 1 + 2y = 1 + \sin 2a$

ฉะนั้น  $x^2 = 1 + 2y$  .....(2)

พิจารณา  $x^2 = 1 + \sin 2a$  จะได้  $0 \leq x^2 \leq 2$  ฉะนั้น  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

(1) + (2);  $x^2 + 5x = 1.04$

$$x^2 + 5x - 1.04 = 0$$

$$(x + 5.2)(x - 0.2) = 0$$

$$x = 0.2, -5.2$$

แต่  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$  จึงได้  $x = 0.2$  เท่านั้น

ส่งผลให้  $y = \frac{1}{2}((0.2) - 1) = -0.48$

เพราะว่า  $\sin^3 a + \cos^3 a = (\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)$

$$= x(1 - y)$$

$\therefore 125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75 \sin a \cos a = 125x(1 - y) + 75y$

$$= 125(0.2)(1 - (-0.48)) + 75(-0.48)$$

$$= 37 - 36$$

$$= 1 \text{ ตอบ}$$


**โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนว  $(\sin \theta + \cos \theta)$  VS  $(\sin \theta \cdot \cos \theta)$**

*Peach-Pb1.2* (แนว PAT1'ต.ค.55) สำหรับ จำนวนจริง  $\theta$  ใดๆ  
 ให้ a และ b เป็นค่ามากที่สุดของ  $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$  และ  $3 \cdot \sin \theta + 4 \cdot \cos \theta$  ตามลำดับ  
 จงหาค่าของ a + b

ตอบ .....

แนวคิด & เทคนิค จากครู Sup'k

**Tips จากครู Sup'k**



**สูตร 22.1! สูตร ผลบวก ผลต่าง → ผลคูณ**

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2 \sin \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) = 2 \sin (\text{half sum}) \cos (\text{half diff}) \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos (\text{half sum}) \sin (\text{half diff}) \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) = 2 \cos (\text{half sum}) \cos (\text{half diff}) \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right) = -2 \sin (\text{half sum}) \sin (\text{half diff}) \end{aligned}$$

**สูตร 23.1! สูตร ผลคูณ → ผลบวก ผลต่าง**

$$\begin{aligned} 2 \sin A \cos B &= \sin (A + B) + \sin (A - B) = \sin (\text{sum}) + \sin (\text{diff}) \\ 2 \cos A \sin B &= \sin (A + B) - \sin (A - B) = \sin (\text{sum}) - \sin (\text{diff}) \\ 2 \cos A \cos B &= \cos (A + B) + \cos (A - B) = \cos (\text{sum}) + \cos (\text{diff}) \\ -2 \sin A \sin B &= \cos (A + B) - \cos (A - B) = \cos (\text{sum}) - \cos (\text{diff}) \end{aligned}$$

Hormone Pb1.3 (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้  $\theta$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $16 \sin^3 \theta \cos^2 \theta = 2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta$

ข.  $\sin 3\theta = (\sin 2\theta + \sin \theta)(2 \cos \theta - 1)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด

3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

วิธีลัด

Tips จากครู Sup'k

วิธีจริง

ก. ถูก  $2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta = (\sin 3\theta + \sin \theta) - (\sin 5\theta - \sin \theta)$   
 $= (2 \sin 2\theta \cos \theta) - (2 \cos 3\theta \sin 2\theta)$   
 $= (2 \sin 2\theta)(\cos \theta - \cos 3\theta)$   
 $= (4 \sin \theta \cos \theta)(-2 \sin 2\theta \sin (-\theta))$   
 $= (4 \sin \theta \cos \theta)(4 \sin \theta \cos \theta \sin \theta)$   
 $= 16 \sin^3 \theta \cos^2 \theta$

ข. ถูก  $(\sin 2\theta + \sin \theta)(2 \cos \theta - 1) = (2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta)(2 \cos \theta - 1)$   
 $= (\sin \theta)(2 \cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1)$   
 $= (\sin \theta)(4 \cos^2 \theta - 1)$   
 $= (\sin \theta)(4 - 4 \sin^2 \theta - 1)$   
 $= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$   
 $= \sin 3\theta$

*Peach-Pb2.22* (แนว PAT1'ต.ค.55) จงพิจารณาความถูก ผิดของข้อความต่อไปนี้

ก.  $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \pi = \frac{1}{2}$

ข.  $\tan \frac{7\pi}{16} - \tan \frac{3\pi}{8} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$

ข้อใดต่อไปนี้สรุปถูกต้อง

1) ก. ถูก และ ข. ถูก

2) ก. ถูก และ ข. ผิด

3) ก. ผิด และ ข. ถูก

4) ก. ผิด และ ข. ผิด

*Hormone Pb1.14* (PAT1'ส.ค.57) ให้  $\sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$  โดยที่  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ถ้า  $a = \frac{\tan \theta - \tan 2\theta}{\cos \theta - \cos 2\theta}$  และ  $b = \frac{\sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta}$

แล้วค่าของ  $a^4 + b^4$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

*Sigo-Pb1.14* (PAT1'ส.ค.58) ถ้า  $\alpha$  และ  $\theta$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $0 < \theta < \alpha < 90^\circ$

และสอดคล้องกับสมการ  $\tan(\alpha + \theta) = 5 \tan(\alpha - \theta)$

แล้ว  $(\sin 2\theta)(\operatorname{cosec} 2\alpha)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1)  $\frac{5}{6}$

2)  $\frac{5}{4}$

3)  $\frac{3}{2}$

4)  $\frac{2}{3}$

Hormone Pb1.14 (PAT1'มี.ค.57) ให้  $\sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$  โดยที่  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

ถ้า  $a = \frac{\tan \theta - \tan 2\theta}{\cos \theta - \cos 2\theta}$  และ  $b = \frac{\sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta}$

แล้วค่าของ  $a^4 + b^4$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

ตอบ 0153.00

แนวคิด

$$\begin{aligned} \sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta &= 0 \\ (\sin 3\theta + \sin \theta) - \sin 2\theta &= 0 \\ 2 \sin 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta &= 0 \\ (\sin 2\theta)(2 \cos \theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

ใช้สูตรเปลี่ยนผลบวก ไปเป็นผลคูณ ;

เพราะว่า  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  จะได้  $0 < 2\theta < \pi$  ฉะนั้น  $\sin 2\theta \neq 0$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} 2 \cos \theta - 1 &= 0 \\ \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

จะได้

$$a = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})}{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta} \\ &= \frac{2 \sin 4\theta \cos \theta + \sin 4\theta}{2 \cos 4\theta \cos \theta + \cos 4\theta} \\ &= \tan 4\theta = \tan \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^4 + b^4 &= (2\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^4 \\ &= 144 + 9 = 153 \end{aligned}$$





โจทย์ตรีโกณมิติ แนวอินเวอร์สตรีโกณ

สูตร 35.1! ระวังเงื่อนไขของ  $x$  ด้วย

$$\begin{aligned} \arcsin(-x) &= -\arcsin x \\ \arccos(-x) &= \pi - \arccos x \\ \arctan(-x) &= -\arctan x \\ \operatorname{arccot}(-x) &= \pi - \operatorname{arccot} x \\ \operatorname{arccosec}(-x) &= -\operatorname{arccosec} x \\ \operatorname{arcsec}(-x) &= \pi - \operatorname{arcsec} x \end{aligned}$$

สูตร 35.2! ระวังเงื่อนไขของ  $x$  ด้วย

$$\begin{aligned} \arcsin \frac{1}{x} &= \operatorname{arccosec} x \\ \arccos \frac{1}{x} &= \operatorname{arcsec} x \\ \arctan \frac{1}{x} &= \operatorname{arccot} x \\ \operatorname{arccot} \frac{1}{x} &= \arctan x \\ \operatorname{arccosec} \frac{1}{x} &= \arcsin x \\ \operatorname{arcsec} \frac{1}{x} &= \arccos x \end{aligned}$$

สูตร 35.3!!

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= x \text{ เมื่อ } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \arccos(\cos x) &= x \text{ เมื่อ } 0 \leq x \leq \pi \\ \arctan(\tan x) &= x \text{ เมื่อ } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arccot}(\cot x) &= x \text{ เมื่อ } 0 < x < \pi \\ \operatorname{arccosec}(\operatorname{cosec} x) &= x \text{ เมื่อ } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \operatorname{arcsec}(\sec x) &= x \text{ เมื่อ } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{aligned}$$

สูตร 3.1!!  $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$  เมื่อ  $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$

สูตร 3.2!!  $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \pi$  เมื่อ  $\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y$

สูตร 3.3!!  $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \pi$  เมื่อ  $\arctan x + \arctan y < -\frac{\pi}{2}$

สูตร 3.4!!  $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$

Sigo-Pb2.32 (PAT1'พ.ย.57)

$$\text{ให้ } A = \cos 15^\circ + \cos 87^\circ + \cos 159^\circ + \cos 231^\circ + \cos 303^\circ$$

$$\text{และ } B = \sin\left(\arctan\frac{15}{8} + \arccos\frac{4}{5}\right)$$

ถ้า  $A + B = \frac{a}{b}$  โดยที่  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ  $a$  และ  $b$  เท่ากับ 1

แล้ว  $a + b$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

แนวคิด & เทคนิค จากครู Sup'k

ขั้นที่ 1

ขั้นที่ 2

$$\begin{aligned} A &= \cos 15^\circ + (\cos 159^\circ + \cos 231^\circ) + (\cos 87^\circ + \cos 303^\circ) \\ &= \cos 15^\circ + 2\cos 195^\circ \cos 36^\circ + 2\cos 195^\circ \cos 108^\circ \\ &= \cos 15^\circ + 2\cos 195^\circ (\cos 36^\circ + \cos 108^\circ) \\ &= \cos 15^\circ - 2\cos 15^\circ (2\cos 72^\circ \cos 36^\circ) \\ &= \cos 15^\circ - 2\cos 15^\circ \left( \frac{2\cos 72^\circ \cos 36^\circ \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} \right) \\ &= \cos 15^\circ - 2\cos 15^\circ \left( \frac{\cos 72^\circ \sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} \right) \\ &= \cos 15^\circ - 2\cos 15^\circ \left( \frac{2\cos 72^\circ \sin 72^\circ}{2\sin 36^\circ} \right) \\ &= \cos 15^\circ - 2\cos 15^\circ \left( \frac{\sin 144^\circ}{2\sin 36^\circ} \right) \\ &= \cos 15^\circ - (2\cos 15^\circ) \left( \frac{1}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Peach-Pb1.26 (แนว PAT1'ต.ค.55) จงหาค่าของ  $\sec^2 \left( 2 \cdot \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} \right)$

ตอบ .....

แนวคิด & เทคนิค จากครู Sup'k



BRANNS  
Summer Camp  
BRANNS  
Summer Camp

BRAN-Pb2.31 (PAT1'ต.ค.53) จงหา  $\frac{\tan \left( \operatorname{arccot} \frac{1}{5} - \operatorname{arccot} \frac{1}{3} + \arctan \frac{7}{9} \right)}{\sin \left( \arcsin \frac{5}{13} + \arctan \frac{12}{13} \right)}$  ตอบ .....

Hormone Pb1.4 (PAT1'มี.ค.57)  $\cot \left( \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \right)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

2)  $\sqrt{\frac{1}{3}}$

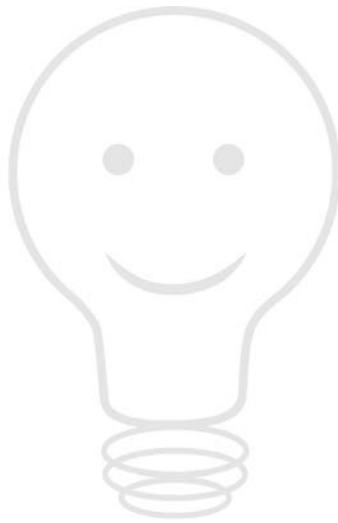
3)  $\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

4)  $\sqrt{3}$

MEP-Pb1.3.2 (สามัญ)  $\sin^2 (2 \cdot \arctan \sqrt{2})$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

แนวคิด & เทคนิค จากครู Sup'k



MEP-Pb1.3 (แนวสามัญ)  $\cos \left( \arcsin \left[ \frac{\sec^2 (2 \arctan \sqrt{2})}{11} \right] \right)$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

Summer Camp

ปีที่ 27

โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวสมการอินเวอร์สตรีโกณ

สูตรลัด จากครู Sup'k I

สูตรลัด จากครู Sup'k II

**Hormone Pb1.5** (สามัญ'57) ผลบวกของคำตอบของสมการ  $2 \arcsin (x^2 - 3x + 1) + \pi = 0$  เท่ากับเท่าใด *ตอบ* .....

แนวคิด  $2 \arcsin (x^2 - 3x + 1) + \pi = 0$   
 $2 \arcsin (x^2 - 3x + 1) = -\pi$   
 $\arcsin (x^2 - 3x + 1) = -\frac{\pi}{2}$   
 $x^2 - 3x + 1 = -1$   
 $x^2 - 3x + 2 = 0$   
 $(x - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow \therefore x = 1, 2$  ตรวจสอบคำตอบแล้วผ่าน

ดังนั้น ผลบวกของคำตอบของสมการ =  $1 + 2 = 3$

**FPAT-Pb87** (B-PAT1'ต.ค.51) จำนวนคำตอบที่แตกต่างกันของสมการ  $\arcsin x = 2 \arccos x$  มีกี่ค่า

1) 1                                      2) 2                                      3) 3                                      4) 4

วิธีทำ & เทคนิค

**Peach-Pb2.39** (แนว PAT1'ต.ค.55) ให้  $\operatorname{arcsec} x = 2 \cdot \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{17}}$

แล้วจงหาค่าของ  $\cot \left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsec} x \right)$

1)  $-\frac{13}{9}$                                       2)  $\frac{13}{9}$                                       3)  $-\frac{13}{16}$                                       4)  $\frac{13}{16}$

**FPAT-Pb89** (PAT1'ก.ค.52) ถ้า  $\arcsin (5x) + \arcsin (x) = \frac{\pi}{2}$  แล้ว  $\tan (\arcsin x)$  มีค่าเท่าใด

1)  $\frac{1}{5}$                                       2)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$                                       3)  $\frac{1}{3}$                                       4)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**FPAT-Pb88** (PAT1'มี.ค.52) ให้  $-1 \leq x \leq 1$  เป็นจำนวนจริง ซึ่ง  $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2552}$

แล้วค่าของ  $\sin \left( \frac{\pi}{2552} \right)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1)  $2x$                                       2)  $1 - 2x^2$                                       3)  $2x^2 - 1$                                       4)  $-2x$

SheLL1.6 (PAT1'ก.ค.53) ให้  $x$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$

แล้วค่าของ  $\sin\left(\frac{\pi}{15} + \arccos(x^2)\right)$  อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

- 1)  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$       2)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$       3)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$       4)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

KaiOU-Pb2.4 (PAT1'มี.ค.53) ให้  $\alpha$  และ  $\beta$  เป็นมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

โดยที่  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$  ถ้า  $\cos\left(\arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \sin\left(\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 1$

แล้ว  $\sin \beta$  มีค่าเท่ากับเท่าใด      *ตอบ.....*

NaDate-Pb1.10 (PAT1'มี.ค.56) ถ้า  $x$  เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุด โดยที่  $0 < x < 1$

และสอดคล้องกับ  $\arctan(1-x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2 \operatorname{arcsec} \sqrt{1+2x(1-x)}$

แล้วค่าของ  $\cos \pi x$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -1      2) 0      3)  $\frac{1}{2}$       4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ตอบ 3)

แนวคิด ให้  $y = \operatorname{arcsec} \sqrt{1+2x(1-x)}$ ,  $0 < x < 1 \rightarrow \sec y = \sqrt{1+2x(1-x)}$

ทำให้  $\tan y = \sqrt{2x(1-x)}$  ดังนั้น  $y = \arctan \sqrt{2x(1-x)}$

ต่อไปแก้สมการ

$$\arctan(1-x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2 \operatorname{arcsec} \sqrt{1+2x(1-x)}$$

$$\arctan(1-x) + \arctan(2x) = 2 \arctan \sqrt{2x(1-x)}$$

$$\tan(\arctan(1-x) + \arctan(2x)) = \tan(2 \arctan \sqrt{2x(1-x)})$$

$$\frac{(1-x) + 2x}{1 - (1-x)(2x)} = \frac{2\sqrt{2x(1-x)}}{1 - 2x(1-x)}$$

$$\frac{1+x}{1-2x+2x^2} = \frac{2\sqrt{2x(1-x)}}{1-2x+2x^2}$$

$$1+x = 2\sqrt{2x(1-x)}$$

$$1+2x+x^2 = 4(2x-2x^2)$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\therefore (3x-1)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ตรวจสอบคำตอบแล้วผ่าน}$$

$$\therefore \text{จะหาค่าของ } \cos \pi x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ ตอบ}$$

NaDate-Pb2.32 (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

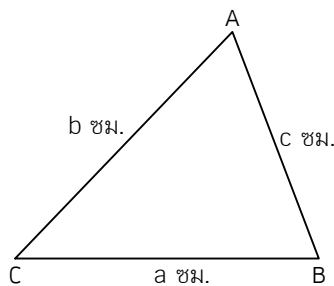
โดยที่  $\theta = \arctan \left( \frac{\sqrt{x} + 1}{1 - \sqrt{x}} \right) - \arctan \sqrt{x}$  เมื่อ  $0 < x < 1$

ค่าของ  $\tan \theta + \cot \theta$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ.....

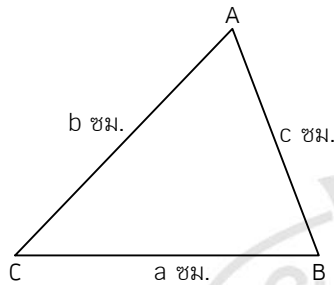
**โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวกฎของ sin VS กฎของ cos**

**สูตร 42.1! สูตรของพื้นที่สามเหลี่ยม**



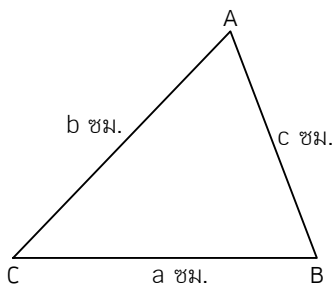
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \hat{C} \\ \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \hat{A} \\ \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \hat{B} \end{aligned}$$

**สูตร 42.21! กฎของ sin**



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

**สูตร 42.3! กฎของ cos**



$$\begin{aligned} \text{กฎของ cos} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cdot \cos C \end{aligned}$$

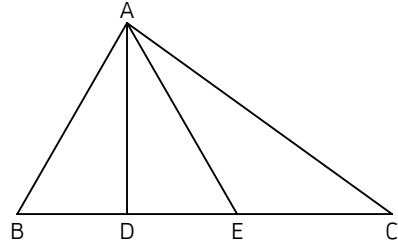
โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวทฤษฎีของ sin

BRAN-Pb1.7 (PAT1'ต.ค.53) ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูป

ถ้า  $\hat{A}BC = 30^\circ$ ,  $\hat{B}AC = 135^\circ$

และ AD และ AE แบ่ง  $\hat{B}AC$

ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กัน แล้ว  $\frac{EC}{BC}$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2)  $\sqrt{3}$

3)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

4)  $\sqrt{2}$

แนวคิด

ใน  $\triangle ABC$

จะได้  $\hat{A}CB = 180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$

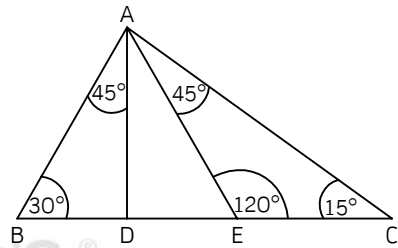
โดยทฤษฎีของไซน์

ได้

$$\frac{\sin 30^\circ}{AC} = \frac{\sin 135^\circ}{BC}$$

$$\frac{1}{2(AC)} = \frac{1}{\sqrt{2}(BC)}$$

$$BC = \sqrt{2}(AC)$$



ใน  $\triangle ACE$  จะได้  $\hat{C}AE = \frac{135^\circ}{3} = 45^\circ$

และ  $\hat{A}EC = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$

โดยทฤษฎีของไซน์ได้

$$\frac{\sin 120^\circ}{AC} = \frac{\sin 45^\circ}{EC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2(AC)} = \frac{1}{\sqrt{2}(EC)}$$

$$EC = \frac{\sqrt{2}(AC)}{\sqrt{3}}$$

$$EC = \frac{BC}{\sqrt{3}} \rightarrow \therefore \frac{EC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



โจทย์ตรีโกณประยุกต์ แนวกฎของ sin ผลสมกฎของ cos

Duem-Pb2.8 (แนว PAT1'ธ.ค.54) กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B, C ยาว a, b, c ตามลำดับ และ  $(\sin A - \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 \sin A \sin C$

จงหาค่าของ  $\sqrt{3 \operatorname{cosec}^2 B + 3 \sec^2 B}$

ตอบ .....

แนวคิด & เทคนิค

ขั้นที่ 1 ใน  $\triangle ABC$  โดยกฎของ sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \text{สมมติตัวแปรเพิ่ม} = k$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = k, \frac{b}{\sin B} = k, \frac{c}{\sin C} = k$$

$$\therefore \frac{a}{k} = \sin A, \frac{b}{k} = \sin B, \frac{c}{k} = \sin C \rightarrow (*)$$

ขั้นที่ 2 จากโจทย์กำหนดให้

$$(\sin A - \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 \sin A \sin C$$

$$\text{แทนจาก (*) ; } \left(\frac{a}{k} - \frac{b}{k} + \frac{c}{k}\right) \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k}\right) = 3 \cdot \frac{a}{k} \cdot \frac{c}{k}$$

$$\left(\frac{a-b+c}{k}\right) \left(\frac{a+b+c}{k}\right) = 3 \cdot \frac{a \cdot c}{k^2}$$

$$(a-b+c)(a+b+c) = 3 \cdot a \cdot c$$

$$((a+c) - b)((a+c) + b) = 3ac$$

$$(a+c)^2 - b^2 = 3ac$$

$$a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = 3ac$$

$$a^2 - ac + c^2 = b^2$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = ac$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = ac$$

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่แล้ว

$$\text{นำ } 2ac \text{ หารทั้งสองข้าง } \therefore \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac}$$

$$\therefore \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$$

$$\text{โดยกฎของ cos ; } \therefore \cos B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore B = 60^\circ \text{ ตอบ}$$

สูตรลัด จากครู Sup'k

กฎของ cos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot \cos B$$

จัดรูปใหม่

$$\therefore 2 \cdot ac \cdot \cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

**NaDate-Pb1.16** (PAT1'มี.ค.56) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ

ถ้าด้านตรงข้ามมุม A ยาว 14 หน่วย, ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 30 หน่วย และ  $3 \sin B = 5 \sin C$  แล้ว  $\sin 2A$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1)  $-\frac{1}{2}$

2)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3)  $\frac{1}{2}$

4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Hormone Pb1.6** (PAT1'เม.ย.57) ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B และ C เป็นมุมแหลม และสอดคล้องกับ

ก.  $25 \cos B - 13 \cos C = 15$

ข.  $65 (\cos B + \cos C) = 77$

ค. ความยาวด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม C ยาว 20 หน่วย

จงหาความยาวเส้นรอบรูปของ  $\triangle ABC$

ตอบ .....

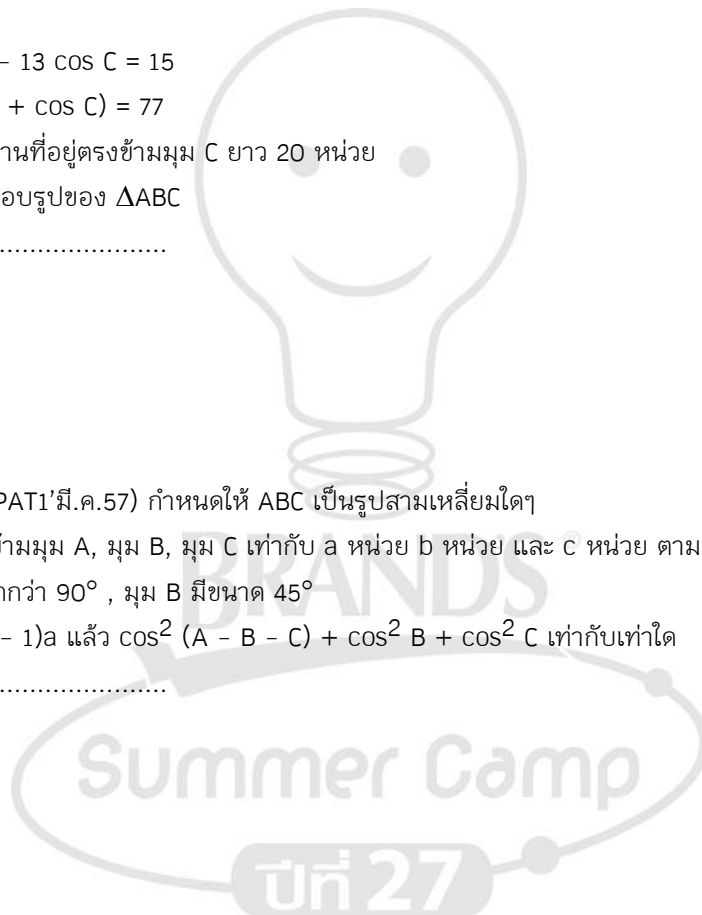
**Hormone Pb1.7** (PAT1'มี.ค.57) กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ

โดยที่ความยาวตรงข้ามมุม A, มุม B, มุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ

ถ้ามุม A มีขนาดมากกว่า  $90^\circ$ , มุม B มีขนาด  $45^\circ$

และ  $\sqrt{2}c = (\sqrt{3} - 1)a$  แล้ว  $\cos^2(A - B - C) + \cos^2 B + \cos^2 C$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....



## เฉลยคำตอบ ชีทตัวแบรนด์ซัมเมอร์แคมป์ ในส่วนของครู Sup'k

<i>*NichTor-Pb1.2</i>	ตอบ 2	<i>NichTor-Pb1.3</i>	ตอบ 5	<i>Sigo-Pb1.3.2</i>	ตอบ 1277
<i>NaDate-Pb2.48</i>	ตอบ 10	<i>SheLL2.46</i>	ตอบ $x = 3$	<i>SheLL2.47</i>	ตอบ $x = 9$
<i>SheLL2.4</i>	ตอบ $x = 3$	<i>BRAN-Pb1.25</i>	ตอบ 1)	<i>TF-PAT119</i>	ตอบ 4)
<i>TF-PAT120</i>	ตอบ 2)	<i>TF-PAT123</i>	ตอบ 3)	<i>TF-PAT124</i>	ตอบ 3)
<i>BRAN-Pb1.20</i>	ตอบ 4)	<i>KAiOU-Pb1.24</i>	ตอบ 4)	<i>SheLL2.49</i>	ตอบ 208
<i>NaDate-Pb2.49</i>	ตอบ 6	<i>QET-G-Pb26.1</i>	ตอบ 4)	<i>QET-G-Pb23.2</i>	ตอบ 1)
<i>QET-G-Pb23.3</i>	ตอบ 4)	<i>VetaNaDate-Pb1.25</i>	ตอบ 2)	<i>Sup'k-Pb2.29.1</i>	ตอบ 2 ตัว
<i>Sup'k-Pb2.29.2</i>	ตอบ 2 ตัว	<i>FPAT-Pb14</i>	ตอบ 2)	<i>Sigo-Pb15.1</i>	ตอบ 66
<i>FPAT-Pb1</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb3</i>	ตอบ 2)	<i>SheLL1.11</i>	ตอบ 2)
<i>AVATAR-Pb5.1</i>	ตอบ 2)	<i>KMK-Pb1.8</i>	ตอบ 2)	<i>KAiOU-Pb1.12</i>	ตอบ 2)
<i>FPAT-Pb4</i>	ตอบ 3)	<i>NaDate-Pb2.27</i>	ตอบ 20	<i>NaDate-Pb2.30</i>	ตอบ 4
<i>BRAN-Pb2.27</i>	ตอบ 13	<i>KAiOU-Pb2.2</i>	ตอบ 5	<i>SheLL2.27</i>	ตอบ 2
<i>Happy-Pb2.2</i>	ตอบ 4	<i>Sigo-Pb2.3</i>	ตอบ 11	<i>SheLL1.14</i>	ตอบ 2)
<i>FPAT-Pb9</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb8</i>	ตอบ 2)	<i>KAiOU-Pb1.10</i>	ตอบ 1)
<i>FPAT-Pb7</i>	ตอบ 4)	<i>BRAN-Pb1.10</i>	ตอบ 3)	<i>BRAN-Pb1.11</i>	ตอบ 1)
<i>FPAT-Pb11</i>	ตอบ 3)	<i>NaDate-Pb2.29</i>	ตอบ 5	<i>KMK-Pb 2.10</i>	ตอบ 4
<i>FPAT-Pb12</i>	ตอบ 3)	<i>KMK-Pb2.9</i>	ตอบ 6	<i>Happy-Pb 3.2</i>	ตอบ 5
<i>Happy-Pb 3.3</i>	ตอบ 3	<i>Sigo-Pb 3.4</i>	ตอบ 4	<i>NaDate-Pb1.12</i>	ตอบ 3)
<i>SheLL1.1</i>	ตอบ 2)	<i>KMK-Pb1.2</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb17</i>	ตอบ 2)
<i>FPAT-Pb18</i>	ตอบ 2)	<i>iOU-Pb1.1</i>	ตอบ 4)	<i>Happy-Pb 4.3</i>	ตอบ 1)
<i>Sigo-Pb 4.4</i>	ตอบ 1)	<i>NaDate-Pb1.3</i>	ตอบ 2)	<i>Happy-Pb4.4</i>	ตอบ 2)
<i>Sigo-Pb1.2</i>	ตอบ 3)	<i>KAiOU-Pb1.2</i>	ตอบ 3)	<i>FPAT-Pb21</i>	ตอบ 4)
<i>KMK-Pb1.1</i>	ตอบ 4)	<i>FPAT-Pb22</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb32</i>	ตอบ 2)
<i>Sigo-Pb 1.20</i>	ตอบ 2)	<i>FPAT-Pb34</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb35</i>	ตอบ 2)
<i>FPAT-Pb36</i>	ตอบ 4)	<i>FPAT-Pb37</i>	ตอบ 4)	<i>KMK-Pb1.4</i>	ตอบ 1)
<i>FPAT-Pb39</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb41</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb43</i>	ตอบ 3)
<i>FPAT-Pb42</i>	ตอบ 1)	<i>KMK-Pb1.5</i>	ตอบ 2)	<i>KAiOU-Pb1.4</i>	ตอบ 1)
<i>BRAN-Pb1.3</i>	ตอบ 4)	<i>FPAT-Pb46</i>	ตอบ 4)	<i>FPAT-Pb45</i>	ตอบ 2)
<i>SheLL1.4</i>	ตอบ 3)	<i>NaDate-Pb1.4</i>	ตอบ 3)	<i>Sigo-Pb1.5.</i>	ตอบ 2)
<i>KAiOU-Pb1.15</i>	ตอบ 1)	<i>KAiOU-Pb1.9</i>	ตอบ 4)	<i>FPAT-Pb49</i>	ตอบ 1)
<i>SheLL1.9</i>	ตอบ 2)	<i>Sigo-Pb 1.17</i>	ตอบ 1)	<i>BRAN-Pb1.8</i>	ตอบ 4)
<i>NaDate-Pb1.8</i>	ตอบ 4)	<i>KMK-Pb1.9</i>	ตอบ 2)	<i>AN-Pb2.34</i>	ตอบ 17
<i>FPAT-Pb50</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb54</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb55</i>	ตอบ 4)
<i>FPAT-Pb56</i>	ตอบ 3)	<i>KMK-Pb2.8</i>	ตอบ 8	<i>KMK-Pb1.6</i>	ตอบ 4)

<i>FPAT-Pb57</i>	ตอบ 3)	<i>FPAT-Pb58</i>	ตอบ 4)	<i>FPAT-Pb59</i>	ตอบ 1)
<i>NaDate-Pb2.31</i>	ตอบ 162	<i>Sigo-Pb1.19</i>	ตอบ 4)	<i>KMK-Pb1.10</i>	ตอบ 1)
<i>FPAT-Pb62</i>	ตอบ 4)	<i>FPAT-Pb63</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb64</i>	ตอบ 3)
<i>KAiOU-Pb1.8</i>	ตอบ 3)	<i>SheLL1.8</i>	ตอบ 1)	<i>NaDate-Pb1.17</i>	ตอบ 4)
<i>FPAT-Pb77</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb78</i>	ตอบ 1)	<i>KMK-Pb 2.3</i>	ตอบ 7.5
<i>FPAT-Pb66</i>	ตอบ 4)	<i>FPAT-Pb66.1</i>	ตอบ 3)	<i>FPAT-Pb67</i>	ตอบ 2)
<i>Happy-Pb7.2</i>	ตอบ 1)	<i>SiGo-Pb2.42</i>	ตอบ 36	<i>KAiOU-Pb2.22</i>	ตอบ 7
<i>KAiOU-Pb1.5</i>	ตอบ 2)	<i>SheLL2.28</i>	ตอบ 1	<i>SheLL1.18</i>	ตอบ 1)
<i>TF-PAT4</i>	ตอบ 4)	<i>SheLL2.30</i>	ตอบ 4	<i>SiGo-2.36</i>	ตอบ 3
<i>KAiOU-Pb2.7</i>	ตอบ 6	<i>BRAN-Pb1.12</i>	ตอบ 1)	<i>KMK-Pb1.11</i>	ตอบ 3)
<i>TF-PAT1</i>	ตอบ 2)	<i>TF-PAT2</i>	ตอบ 4)	<i>KAiOU-Pb2.6</i>	ตอบ 32
<i>KMK-Pb1.12</i>	ตอบ 4)	<i>AVATAR-Pb14.1</i>	ตอบ 16	<i>Peach-Pb2.34</i>	ตอบ 4)
* <i>RaChiNee-Pb11.7</i>	ตอบ $\frac{3}{\sqrt{10}}$	<i>Sigo-Pb1.21</i>	ตอบ 2)	<i>TF-PAT3</i>	ตอบ 4)
<i>BRAN-Pb2.36</i>	ตอบ 396	<i>SheLL1.12</i>	ตอบ 3)	<i>SheLL2.31</i>	ตอบ 4
<i>NaDate-Pb1.13</i>	ตอบ 4)	<i>TF-PAT6</i>	ตอบ 4)	<i>TF-PAT7</i>	ตอบ 3)
<i>KMK-Pb2.11</i>	ตอบ 0.2	<i>TF-PAT8</i>	ตอบ 3)	<i>TF-PAT9</i>	ตอบ 1)
<i>TF-PAT10</i>	ตอบ 1)	<i>SheLL1.13</i>	ตอบ 3)	<i>KMK-Pb2.5</i>	ตอบ 2
<i>KAiOU-Pb2.5</i>	ตอบ 0.5	<i>FPAT-Pb83</i>	ตอบ 2)	<i>SheLL2.29</i>	ตอบ 2
<i>KAiOU-Pb1.7</i>	ตอบ 3)	<i>KMK-Pb2.6</i>	ตอบ 0	<i>FPAT-Pb82</i>	ตอบ 3)
<i>Peach-Pb2.22</i>	ตอบ 3)	<i>Hormone Pb1.14</i>	ตอบ 153	<i>Sigo-Pb1.14</i>	ตอบ 4)
<i>BRAN-Pb2.31</i>	ตอบ 1	<i>Hormone Pb1.4</i>	ตอบ 4)	<i>FPAT-Pb87</i>	ตอบ 1)
<i>FPAT-Pb89</i>	ตอบ 1)	<i>FPAT-Pb88</i>	ตอบ 2)	<i>SheLL1.6</i>	ตอบ 4)
<i>KAiOU-Pb2.4</i>	ตอบ 0.5	<i>NaDate-Pb2.32</i>	ตอบ 2	<i>NaDate-Pb1.16</i>	ตอบ 2)
<i>Hormone Pb1.6</i>	ตอบ 54	<i>Hormone Pb1.7</i>	ตอบ 2		



BRANDS<sup>®</sup> Summer Camp

ปีที่ 27

# BRANDS ซัมเมอร์แคมป์ ปีที่ 27



เอกสารประกอบคำบรรยาย  
วิชา **PAT 1**

## คณิตศาสตร์

โดย อ.ณัฐพล ศุจิจันทร์รัตน์ (พี่โอ๋)  
โรงเรียนกวดวิชาไอ-พลัส

### ตารางวิเคราะห์ข้อสอบ PAT 1 สปีลล่าสุด

PAT 1 (บทที่ออก/ปี)	2/58	1/58	2/57	1/57	2/56	1/56	2/55	1/55	รวม	เฉลี่ย
ตรีโกณมิติ	33	34	<u>35</u>	<u>37</u>	29	<u>36</u>	24	<u>37</u>	265	11.04%
ลำดับอนุกรม	29	32	30	36	<u>31</u>	35	30	36	259	10.79%
สถิติ	32	30	34	34	24	31	<u>34</u>	31	250	10.42%
แคลคูลัส	28	27	34	36	22	28	30	29	234	9.75%
เอกซ์โพ-ลอการิทึม	<u>37</u>	<u>42</u>	22	28	29	31	24	16	229	9.54%
เซต	17	18	8	6	22	24	15	17	127	5.29%
ฟังก์ชัน	9	15	20	13	24	9	15	12	117	4.88%
จำนวนจริง	17	20	20	11	18	5	7	19	117	4.88%
วิธีนับ	15	6	22	12	14	5	21	17	112	4.67%
จำนวนเชิงซ้อน	13	14	6	16	10	12	21	12	104	4.33%
เมตริกซ์	12	10	12	12	12	12	12	12	94	3.91%
ภาคตัดกรวย	12	12	12	12	15	6	9	10	88	3.54%
ทบ.จำนวนเบื้องต้น	12	6	8	16	12	16	14	1	85	3.48%
เวกเตอร์	3	6	11	6	12	7	10	14	69	2.88%
ตรรกศาสตร์	9	12	8	10	4	8	5	10	66	2.75%
เรขาคณิตวิเคราะห์	6	6	6	3	3	18	3	11	56	2.33%
ความน่าจะเป็น	6	4	6	6	8	7	10	8	55	2.29%
กำหนดการเชิงเส้น	6	6	6	6	5	5	5	5	44	1.83%
ความสัมพันธ์	4	0	0	0	6	5	11	3	29	1.21%
ทบ.ทวินาม	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0%

ตารางแสดงจำนวนและร้อยละของผู้เข้าสอบ GAT/PAT ครั้งที่ 1/2558 (พฤศจิกายน 2557) ในช่วงคะแนนต่างๆ  
จำนวนตามรายวิชา

วิชา	ช่วงคะแนน	0.00-30.00	30.01-60.00	60.01-90.00	90.01-120.00	120.01-150.00	150.01-180.00	180.01-210.00	210.01-240.00	240.01-270.00	270.01-300.00	รวม
GAT	จำนวนคน	3,781	47,516	51,336	46,986	40,129	39,092	46,904	28,061	10,374	2,630	316,809
	ร้อยละ	1.19%	15.00%	16.20%	14.83%	12.67%	12.34%	14.81%	8.86%	3.28%	0.83%	100.00%
GAT(1)	จำนวนคน	67,663	55,071	49,493	44,365	99,583	-	-	-	-	-	316,175
	ร้อยละ	21.40%	17.42%	15.65%	14.03%	31.50%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%
GAT(2)	จำนวนคน	35,547	216,158	48,414	13,365	3,284	-	-	-	-	-	316,768
	ร้อยละ	11.22%	68.24%	15.28%	4.22%	1.04%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%
PAT 1	จำนวนคน	30,082	153,525	48,949	5,008	1,160	401	157	42	18	3	239,345
	ร้อยละ	12.57%	64.14%	20.45%	2.09%	0.49%	0.17%	0.07%	0.02%	0.01%	0.00%	100.00%
PAT 2	จำนวนคน	25	11,471	116,366	52,811	8,003	1,865	440	34	-	-	191,015
	ร้อยละ	0.01%	6.01%	60.92%	27.65%	4.19%	0.98%	0.23%	0.02%	0.00%	0.00%	100.00%
PAT 3	จำนวนคน	57	7,943	21,900	11,124	4,429	2,079	1,193	686	330	35	49,776
	ร้อยละ	0.12%	15.96%	44.00%	22.35%	8.90%	4.18%	2.40%	1.38%	0.66%	0.07%	100.00%
PAT 4	จำนวนคน	452	2,792	4,416	3,856	2,178	1,068	398	97	22	-	15,279
	ร้อยละ	2.96%	18.27%	28.90%	25.24%	14.26%	6.99%	2.61%	0.64%	0.14%	0.00%	100.00%
PAT 5	จำนวนคน	5	131	7,054	39,983	64,230	41,253	14,547	2,744	75	-	170,022
	ร้อยละ	0.00%	0.08%	4.15%	23.52%	37.78%	24.26%	8.56%	1.61%	0.04%	0.00%	100.00%

## Checklist

- ลำดับอันดับและอนุกรมอันดับ
  - ลิมิตของลำดับ
  - ลำดับเรขาคณิตอนันต์
  - ลำดับเศษส่วนย่อยอนันต์
- สถิติ
  - การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น (การแจกแจงความถี่, ค่ากลาง, ค่าวัดการกระจาย)
  - การแจกแจงปกติ (ค่ามาตรฐาน, พื้นที่ใต้โค้งปกติ)
  - ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล
- แคลคูลัสเบื้องต้น
  - ลิมิตและความต่อเนื่อง (Mix จำนวนจริง, กรณณ์)
  - อนุพันธ์และปริพันธ์ตรงๆ (Mix ฟังก์ชัน)
  - เส้นสัมผัสกราฟ, ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด (Mix เรขาคณิตวิเคราะห์)
  - พื้นที่ใต้กราฟ (Mix ภาคตัดกรวย)
- ความน่าจะเป็น
  - การเรียงสับเปลี่ยน (ของไม้เท้า, ของข้าว) แบบมีเงื่อนไข
  - การหยิบสิ่งของพร้อมกัน และการจัดหมู่
  - ความน่าจะเป็น (Mix เซต)
- จำนวนเชิงซ้อน
  - สมการจำนวนเชิงซ้อน (Mix เรขาคณิตวิเคราะห์, ภาคตัดกรวย)
  - พิกัดเชิงขั้วเดอมัวร์ (Mix ตรีโกณมิติ, เวกเตอร์)
  - สมการพหุนาม (Mix จำนวนจริง)
- กำหนดการเชิงเส้น (Mix เรขาคณิตวิเคราะห์)

# ลำดับและอนุกรม (Sequence & Series)

29-36 Marks

## 1. ลิมิตของลำดับและอนุกรมอนันต์

### (Limit of Infinite Sequence & Series)

• ลำดับอนันต์ (Infinite Sequence) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง นิยมแทน  $f(x)$  ด้วย  $a_n$  เรียกว่าลำดับพจน์ที่  $n$  หรือพจน์ทั่วไปในรูป  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

• ลิมิตของลำดับอนันต์ หรือ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  หาโดยการแทนค่า  $n$  ด้วย  $\infty$  ลงไป

หากแทนแล้วได้รูปแบบกำหนดค่าไม่ได้ (Indeterminate Form)  $\frac{\infty}{\infty}$  หรือ  $\infty - \infty$  แก้ได้ 3 วิธี

คือ

- ฟังก์ชันตรรกยะ (พิจารณาเฉพาะพจน์ที่มีดีกรีสูงสุด)
- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (พิจารณาเฉพาะพจน์ที่มีฐานสูงสุด)
- กรณฑ์อนันต์ลบกัณฑ์ (คูณและหารด้วยสังยุค หรือประมาณโดยใช้กำลังสองสมบูรณ์)

• ลำดับอนันต์ที่หาค่าลิมิตได้ เรียกว่า ลำดับลู่เข้า (Convergent Sequence)  
ลำดับอนันต์ที่หาค่าลิมิตไม่ได้ เรียกว่า ลำดับลู่ออก (Divergent Sequence)

• อนุกรมอนันต์ (Infinite Series) คือ ผลบวกของลำดับทุกพจน์ แทนด้วย  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots)$

• อนุกรมอนันต์ที่หาค่าลิมิตได้ เรียกว่า อนุกรมลู่เข้า (Convergent Series)  
อนุกรมอนันต์ที่หาค่าลิมิตไม่ได้ เรียกว่า อนุกรมลู่ออก (Divergent Series)

• สูตรสัญลักษณ์แทนการบวก (Sigma) ที่ควรจำ

$$\sum_{i=1}^n c = nc \quad \sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^n a_i \quad \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2} (n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} (n + 1)(2n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n}{2}(n + 1)\right)^2$$

## 2. ลำดับและอนุกรมเลขคณิตอนันต์

### (Infinite Arithmetic Sequence & Series)

• ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Progression : A.P.) คือ ลำดับที่มีผลต่างร่วม (d) เป็นค่าคงตัว ซึ่ง d หาได้จากการนำลำดับพจน์ติดกันมาลบกัน

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

• ลิมิตของลำดับเลขคณิต (Limit of Arithmetic Sequence)

- ถ้า  $d = 0$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 = a_1$  เป็นลำดับลู่ออกเข้าสู่ค่า  $a_1$

- ถ้า  $d > 0$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  เป็นลำดับลู่ออก

- ถ้า  $d < 0$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  เป็นลำดับลู่ออก

• อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต โดย

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1)d] = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = na_{(n+1)/2}$$

• ลิมิตของอนุกรมเลขคณิต (Limit of Arithmetic Series)

$0 + 0 + 0 + \dots$  เท่านั้นเป็นอนุกรมลู่ออก นอกนั้นเป็นอนุกรมลู่ออก

## 3. ลำดับและอนุกรมเรขาคณิตอนันต์

### (Infinite Geometric Sequence & Series)

• ลำดับเรขาคณิต (Geometric Progression : G.P.) คือ ลำดับที่มีอัตราส่วนร่วม (r) เป็นค่าคงตัว ซึ่ง r หาได้จากการนำลำดับพจน์ติดกันมาหารกัน

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

• ลิมิตของลำดับเรขาคณิต (Limit of Geometric Sequence)

- ถ้า  $-1 < r < 1$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  เป็นลำดับลู่ออกเข้าสู่ค่า 0

- ถ้า  $r = 1$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$  เป็นลำดับลู่ออกเข้าสู่ค่า  $a_1$

- ถ้า  $r \leq -1$  หรือ  $r > 1$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  หาค่าไม่ได้ เป็นลำดับลู่ออก

• อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต โดย  $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$



- ลิมิตของอนุกรมเลขคณิต (Limit of Arithmetic Series)
  - ถ้า  $-1 < r < 1$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$  เป็นลำดับลู่เข้าสู่ค่า  $\frac{a_1}{1-r}$
  - นอกนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  หาค่าไม่ได้ เป็นอนุกรมลู่ออก

#### 4. อนุกรมเศษส่วนย่ออันดับ (Infinite Telescopic Series)

- เป็นการสร้างลำดับย่อยในรูป  $a_n = b_n - b_{n+1}$  โดยที่  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  แล้ว  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots = b_1$  เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ค่า  $b_1$

- อนุกรมเศษส่วนย่ออันดับที่เจอปอຍ
 
$$\frac{1}{a_1(a_1+d)} + \frac{1}{(a_1+d)(a_1+2d)} + \frac{1}{(a_1+2d)(a_1+3d)} + \dots = \frac{1}{d \cdot a_1}$$

$$\frac{1}{a_1(a_1+d)(a_1+2d)} + \frac{1}{(a_1+d)(a_1+2d)(a_1+3d)} + \dots = \frac{1}{2d \cdot a_1 \cdot (a_1+d)}$$

$$\frac{a_1}{r} + \frac{a_1+d}{r^2} + \frac{a_1+2d}{r^3} + \dots = \frac{a_1}{r-1} + \frac{d}{(r-1)^2}$$

#### 5. ข้อสอบ PAT 1 เรื่องลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์สองปีล่าสุด

- (1/57) กำหนดให้  $a_n = \sqrt{n^2 + 16n + 3} - \sqrt{n^2 + 2}$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$  ค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a_n}$  เท่ากับเท่าใด  
 1) 0                                      2) 1                                      3) 2                                      4) 8

- (2/58) กำหนดให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่  $a_1 = 1$  และ  $a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  สำหรับ  $n = 2, 3, 4, \dots$  ค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  เท่ากับเท่าใด

3. (2/58) กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ

$$\log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt[4]{2} + \log_a \sqrt[8]{2} + \dots = \frac{1}{3} \quad \text{และ} \quad 4^{\log b} - 2b^{\log 2} = 8$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $a + b = 102$

ข.  $a \log b = 16$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

4. (1/58) กำหนดให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่  $a_1 = \frac{1}{6}$  และ  $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{3^n}$  สำหรับ

$$n = 2, 3, 4, \dots$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ข. อนุกรม  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  เป็นอนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ 0.75

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

5. (2/57) กำหนดให้  $a_n = \frac{n^2}{16n^2 - 4}$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$  ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{a}{b}$

โดยที่  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ  $a$  และ  $b$  เท่ากับ 1 แล้ว  $a^2 + b^2$  มีค่าเท่าใด

- 1) 17                      2) 25                      3) 145                      4) 257

6. ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวก และให้  $\{b_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่  $b_n = (a + n - 1)(a + n)$  สำหรับ  $n = 1, 2, 3, \dots$  ถ้า  $a$  สอดคล้องกับ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a+1}{b_1 b_2} + \frac{a+2}{b_2 b_3} + \dots + \frac{a+n}{b_n b_{n+1}} \right) = \frac{1}{312}$  แล้วค่าของ  $a^2 + 57$  เท่ากับเท่าใด (1/58)

7. (2/58) ถ้า  $\{a_n\}$  และ  $\{b_n\}$  เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่  $a_n = \frac{2^n}{n(n+2)}$  และ  $b_n = \frac{3^n}{5n+18}$  สำหรับ  $n = 1, 2, 3, \dots$  แล้วอนุกรม  $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$  มีผลบวกเท่ากับเท่าใด

8. (1/57) กำหนดให้  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$  ค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(6 - 3a_n)}{\sqrt{n^2 + 5n + 1}}$  เท่ากับเท่าใด

# สถิติ (Statistics)

24-34 Marks

## 1. การวิเคราะห์ค่ากลางของข้อมูล (Mean)

- ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithmetic Mean : A.M.)

1. สำหรับข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$

2. สำหรับข้อมูลที่ได้แจกแจงความถี่  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i M_i}{N} = \frac{f_1 M_1 + f_2 M_2 + \dots + f_k M_k}{N}$

3. ถ่วงน้ำหนัก (ข้อมูลแต่ละค่ามีความสำคัญไม่เท่ากัน)

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^k w_i x_i}{\sum_{i=1}^k w_i} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_N x_N}{w_1 + w_2 + \dots + w_N}$$

4. รวม : กรณีนำข้อมูลตั้งแต่สองกลุ่มขึ้นไปมารวมกัน

$$\bar{x}_{\text{comb}} = \frac{\sum_{i=1}^k N_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^k N_i} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2 + \dots + N_k \bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$

5.  $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$  และ  $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$  มีค่าน้อยที่สุด แต่  $\sum_{i=1}^N |x_i - \text{Med}|$  มีค่าน้อยที่สุด

6. ถ้า  $Y_i = aX_i + b$  แล้ว  $\bar{Y} = a\bar{X} + b$

7. แก้ไข : กรณีอ่านข้อมูลหรือจำนวนข้อมูลผิด  $\bar{x}_{\text{correct}} = \frac{N_e \bar{x}_e + (x_c - x_e)}{N_{\text{correct}}}$

- ฐานนิยม (Mode)

1. สำหรับข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ Mode = ค่าของข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด

2. สำหรับข้อมูลที่ได้แจกแจงความถี่

$$\text{Mode} = M \text{ ชั้นที่มีค่า } \frac{f}{I} \text{ สูงสุด} = \text{ค่าข้อมูล ณ จุดสูงสุดของเส้นโค้งความถี่}$$

- มัธยฐาน (Median)

Median ดิบ = ค่าของข้อมูล ณ ตำแหน่งตรงกลาง (เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก)

## 2. การวัดตำแหน่งที่ของข้อมูล (Position)

เมื่อได้เรียงข้อมูลจากค่าน้อยที่สุดไปหาค่ามากที่สุด

มัธยฐาน คือ ค่าที่มีตำแหน่งอยู่กึ่งกลางของข้อมูลทั้งหมด

ควอร์ไทล์ที่  $r$  ( $Q_r$ ) คือ ค่าที่บอกให้รู้ว่ามีค่าอื่นๆ อีก  $r$  ส่วนจาก 4 ส่วน ที่มีค่าต่ำกว่าค่า  $Q_r$  นี้

เดซิลที่  $r$  ( $D_r$ ) คือ ค่าที่บอกให้รู้ว่ามีค่าอื่นๆ อีก  $r$  ส่วนจาก 10 ส่วน ที่มีค่าต่ำกว่าค่า  $D_r$  นี้

เปอร์เซนไทล์ที่  $r$  ( $P_r$ ) คือ ค่าที่บอกให้รู้ว่ามีค่าอื่นๆ อีก  $r$  ส่วนจาก 100 ส่วน ที่มีค่าต่ำกว่าค่า  $P_r$

- สำหรับข้อมูลที่ไม่ได้แจกแจงความถี่ (Non-Frequency or Raw Data)

$$\text{Med} = \text{ข้อมูลตำแหน่งที่ } \frac{N+1}{2} = \text{Pos } \frac{N+1}{2}$$

$$Q_r = \text{ข้อมูลตำแหน่งที่ } r\left(\frac{N+1}{4}\right) = \text{Pos } r\left(\frac{N+1}{4}\right)$$

$$D_r = \text{ข้อมูลตำแหน่งที่ } r\left(\frac{N+1}{10}\right) = \text{Pos } r\left(\frac{N+1}{10}\right)$$

$$P_r = \text{ข้อมูลตำแหน่งที่ } r\left(\frac{N+1}{100}\right) = \text{Pos } r\left(\frac{N+1}{100}\right)$$

- สำหรับข้อมูลที่แจกแจงความถี่ (Frequency Data)

$$\text{Med} = \text{ข้อมูลตำแหน่งที่ } \frac{N}{2} = \text{Pos } \frac{N}{2}$$

$$Q_r = \text{ข้อมูลตำแหน่งที่ } r\left(\frac{N}{4}\right) = \text{Pos } r\left(\frac{N}{4}\right)$$

$$D_r = \text{ข้อมูลตำแหน่งที่ } r\left(\frac{N}{10}\right) = \text{Pos } r\left(\frac{N}{10}\right)$$

$$P_r = \text{ข้อมูลตำแหน่งที่ } r\left(\frac{N}{100}\right) = \text{Pos } r\left(\frac{N}{100}\right)$$

## 3. การวัดการกระจายของข้อมูล (Deviation or Dispersion)

- การวัดการกระจายสัมบูรณ์ (Absolute Deviation)

$$\text{พิสัย} = X_{\max} - X_{\min}$$

$$\text{Q.D.} = \text{ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$\text{M.D.} = \text{ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{N}$$

$$\text{S.D.} = \text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{N} - \mu^2}$$

$$\text{S.D.} = \text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานกลุ่มตัวอย่าง} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad s^2 = \text{ความแปรปรวน} = (\text{S.D.})^2$$

$$S_{\text{comb}}^2 = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2 + N_1 (\bar{X}_1 - \bar{X}_{\text{comb}})^2 + N_2 (\bar{X}_2 - \bar{X}_{\text{comb}})^2}{N_1 + N_2} \quad \bar{X}_{\text{comb}} = \frac{N_1 \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2}{N_1 + N_2}$$

- การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (Relative Deviation)

$$\text{สัมประสิทธิ์ของพิสัย} = C.R. = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{X_{\max} + X_{\min}} \times (100\%)$$

$$\text{สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์} = C.Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times (100\%)$$

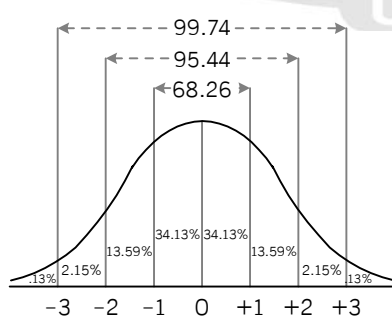
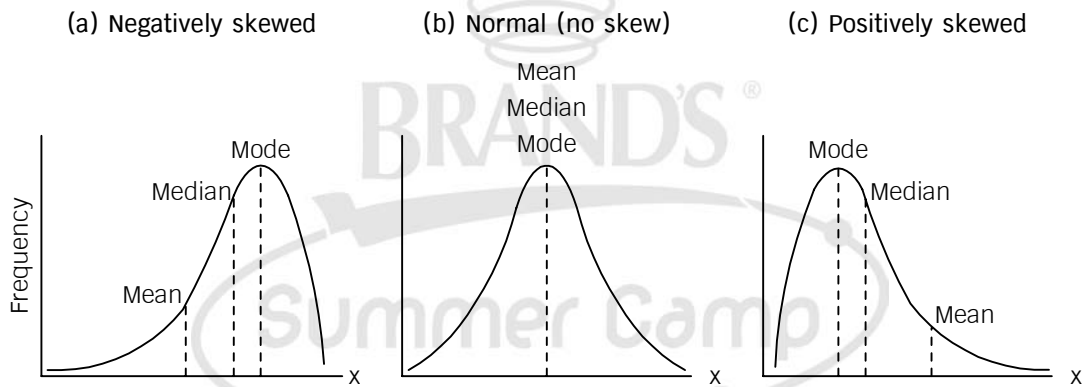
$$\text{สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย} = C.M.D. = \frac{M.D.}{\bar{X}} \times (100\%)$$

$$\text{สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน} = C.V. = \frac{S.D.}{\bar{X}} \times (100\%)$$

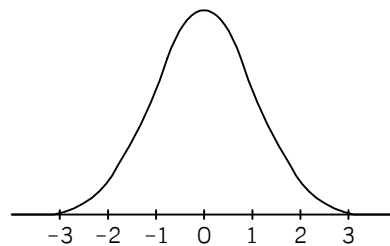
- Adjusted Data & Correction

1. การบวกหรือลบค่าคงที่กับข้อมูลทุกจำนวนจะไม่มีผลต่อค่าการกระจายสัมบูรณ์ทุกชนิด
2. การคูณหรือหารด้วยค่าคงที่กับข้อมูลทุกจำนวนจะมีผลต่อค่าการกระจายสัมบูรณ์ทุกชนิด ตามค่าสัมบูรณ์ของค่าคงที่ที่นำมาคูณหรือหารนั้น
3. การบวกหรือลบค่าคงที่กับข้อมูลทุกจำนวนจะมีผลต่อส่วนของการกระจายสัมพัทธ์ทุกชนิด ตามค่าคงที่ที่นำมาบวกหรือลบนั้น (แต่ไม่มีผลต่อเศษ)
4. การคูณหรือหารด้วยค่าคงที่กับข้อมูลทุกจำนวนจะไม่มีผลต่อค่าการกระจายสัมพัทธ์ทุกชนิด
5. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางจะมีค่าน้อยที่สุด

#### 4. ค่ามาตรฐานและพื้นที่ใต้โค้งปกติ (Z-Score & Normal Distribution)

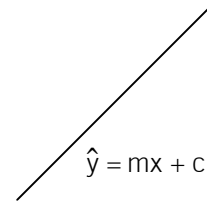


$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{SD}$$



## 5. การวิเคราะห์ความถดถอย (Regression)

- สมการปกติ  $\Sigma y = m\Sigma x + cN$  และ  $\Sigma xy = m\Sigma x^2 + c\Sigma x$
- $(\bar{x}, \bar{y})$  จะอยู่บนกราฟ  $y = mx + c$  ด้วย และ  $\Delta y = m\Delta x$
- $x$  (ตัวแปรอิสระ) สามารถทำนาย  $y$  (ตัวแปรตาม) ได้  
แต่  $y$  (ตัวแปรตาม) ไม่สามารถทำนาย  $x$  (ตัวแปรอิสระ) ได้


$$\hat{y} = mx + c$$

## 6. ข้อสอบ PAT 1 เรื่องสถิติสองปีล่าสุด

9. (1/58) ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวนที่แตกต่างกัน โดยที่ค่าเฉลี่ยของควอร์ไทล์ที่ 1 และควอร์ไทล์ที่ 3 เท่ากับมัธยฐาน ถ้าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ 2.8 และมัธยฐานเท่ากับ 15 แล้ว ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 3.5                      2) 5.25                      3) 7.5                      4) 11.25

10. (2/58) ข้อมูลชุดที่ 1 มี 4 จำนวน คือ  $x_1, x_2, x_3, x_4$  มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของควอร์ไทล์ที่ 1 และควอร์ไทล์ที่ 3 เท่ากับ 18 และมัธยฐานเท่ากับ 15 ข้อมูลชุดที่ 2 มี 5 จำนวนคือ  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  มีควอร์ไทล์ที่ 3 มัธยฐาน ฐานนิยมและพิสัย เท่ากับ 18.5, 15, 12 และ 8 ตามลำดับ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 9 จำนวน คือ  $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  เท่ากับเท่าใด

11. (2/57) กำหนดข้อมูล 10 จำนวน ดังนี้

30   32   28   35   42   45   40   48   50   65

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. ถ้า  $D_7$  แทนข้อมูลที่เป็นเดซิลที่ 7 และ  $M$  แทนค่ามัธยฐานของข้อมูล แล้ว  $D_7 - M$  เท่ากับ 6.5  
ข. ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ เท่ากับ 8.6

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

12. (1/57) ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงจากน้อยไปหามาก ดังนี้ a, 3, 5, 7, b  
ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 7 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ  $2\sqrt{10}$  แล้วค่าของ  $2a + b$  เท่ากับเท่าใด

13. (2/58) คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 3 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 45 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเท่ากับศูนย์ มีนักเรียนอีก 2 คน ได้คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์นี้เท่ากับ a และ b คะแนน โดยอัตราส่วนของ a ต่อ b เป็น 2 : 3 ถ้านำคะแนนของนักเรียนทั้งสองคนนี้รวมกับคะแนนสอบของนักเรียน 3 คน ได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 50 คะแนน แล้วความแปรปรวนของนักเรียนทั้ง 5 คนนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 90                      2) 90.4                      3) 90.6                      4) 92

14. เงินเดือนจำนวนของพนักงาน จำนวน 50 คน ของบริษัทแห่งหนึ่งมีการแจกแจงความถี่ ดังนี้

เงินเดือน (บาท)	จำนวนพนักงาน (คน)
10,000 – 19,999	5
20,000 – 29,999	10
30,000 – 39,999	25
50,000 – 49,999	10

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ฐานนิยมของเงินเดือนเท่ากับ 39,999.50 บาท

ข. มัธยฐานของเงินเดือนเท่ากับ 37,999.50 บาท

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (1/57)

1) ก. ถูก และ ข. ถูก      2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด      3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก      4) ก. ผิด และ ข. ผิด



15. (2/58) ข้อมูลชุดหนึ่งมี 60 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ 40 และ 0.125 ตามลำดับ ถ้านาย ก. คำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตได้น้อยกว่า 40 และคำนวณความแปรปรวนเท่ากับ 34 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ นาย ก. คำนวณได้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
- 1) 30                      2) 33                      3) 37                      4) 39

16. (2/57) ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าสังเกต ( $x$ ) และร้อยละของความถี่สะสมสัมพัทธ์ แสดงดังตารางต่อไปนี้

ค่าสังเกต ( $x$ )	ร้อยละของความถี่สะสมสัมพัทธ์
1	20
2	40
$a$	70
6	90
10	100

เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริง ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4 แล้วความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

17. (2/57) กำหนดให้  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  เป็นข้อมูลชุดที่ 1 ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2 ให้  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  เมื่อ  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  และ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง และ  $a > 0$  ถ้านำข้อมูลทั้งสองชุดมารวมกัน  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 7 และความแปรปรวนเท่ากับ 21 แล้วค่าของ  $a^2 + b^2$  เท่ากับเท่าใด

18. (1/57) พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ 20 และสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ  $\frac{2}{3}$  แล้วสรุปได้ว่าร้อยละ 50 ของข้อมูลชุดนี้มีค่าระหว่าง 10 กับ 50
- ข. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง มีนักเรียนชาย 20 คน และนักเรียนหญิง 40 คน นักเรียนชายได้คะแนนสอบคนละ 32 คะแนน ส่วนคะแนนสอบของนักเรียนหญิงมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเท่ากับ 20 คะแนน และความแปรปรวนของคะแนนสอบเท่ากับ 90 สรุปว่าความแปรปรวนของคะแนนสอบของนักเรียนห้องนี้เท่ากับ 36 คะแนน
- ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

19. (1/58) ให้ S เป็นเซตของข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็ม n จำนวนที่แตกต่างกัน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลใน S เท่ากับ 22 ถ้านำค่าต่ำสุดของข้อมูลออกจาก S จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 24 ถ้านำค่าสูงสุดของข้อมูลออกจาก S จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 15 แต่ถ้านำทั้งค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดออกจาก S จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 16
- พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. พิสัยของข้อมูลเท่ากับ 96
- ข.  $n = 9$
- ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

20. (1/58) กำหนดให้  $x_1, x_2, \dots, x_n$  เป็นจำนวนจริงบวก

ข้อมูลชุดที่ 1 คือ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  และ

ข้อมูลชุดที่ 2 คือ  $2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_n + 1$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่ 1 มากกว่า สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่ 2

ข. สัมประสิทธิ์พิสัยของข้อมูลชุดที่ 1 น้อยกว่า สัมประสิทธิ์พิสัยของข้อมูลชุดที่ 2

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

21. (1/58) คะแนนสอบของนักเรียน 160 คน มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 60 คะแนน มีนักเรียนเพียง 4 คนที่สอบได้คะแนนมากกว่า 84.5 คะแนน นักเรียนที่สอบได้ 55 คะแนนจะอยู่ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง z ดังตารางต่อไปนี้

Z	0.3	0.4	0.5	1.0	1.1	1.96	2.0
พื้นที่	0.1179	0.1554	0.1915	0.3413	0.3643	0.4750	0.4773

- 1) 19.15                      2) 15.54                      3) 34.46                      4) 30.85

22. (2/58) คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่ามัธยฐานเท่ากับ 60 คะแนน ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 55.5 คะแนน มีอยู่ร้อยละ 18.41 แล้วนักเรียนที่สอบได้คะแนนสูงกว่า 64 คะแนนมีจำนวนคิดเป็นร้อยละเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง z ดังนี้

Z	0.7	0.8	0.9	1.0
พื้นที่	0.2580	0.2881	0.3159	0.3413

- 1) 21.19                      2) 24.20                      3) 25.80                      4) 28.81

23. (1/57) คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาภาษาอังกฤษของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและความแปรปรวนของคะแนนแต่ละวิชามีดังนี้

วิชา	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (คะแนน)	ความแปรปรวน (คะแนน)
วิชาคณิตศาสตร์	63	25
วิชาภาษาอังกฤษ	72	9

ถ้านักเรียนคนหนึ่งในกลุ่มนี้สอบทั้งสองวิชาได้คะแนนเท่ากัน พบว่าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของเขาเป็นตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 88.49 คะแนนสอบวิชาภาษาอังกฤษเป็นตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์เท่ากับเท่าใด เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง z ดังตารางต่อไปนี้

Z	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
พื้นที่	0.3159	0.3413	0.3643	0.3849	0.4032

24. (2/57) คะแนนสอบของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ คะแนนเต็ม 100 คะแนน มัธยฐานเท่ากับ 45 คะแนน และมีนักเรียนร้อยละ 34.13 ที่สอบได้คะแนนระหว่างมัธยฐานเท่ากับ 54 คะแนน ถ้านักเรียนคนหนึ่งมีคะแนนสอบเป็น  $\frac{5}{3}$  เท่าของคะแนนเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 33 แล้วนักเรียนคนนี้สอบได้คะแนนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง z ดังตารางต่อไปนี้

Z	0.33	0.36	0.41	0.44	0.50	1.0
พื้นที่	0.1293	0.1406	0.1591	0.1700	0.1915	0.3413

- 1) 41.04%                      2) 48.96%                      3) 68.40%                      4) 81.60%

25. (2/58) กำหนดให้  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_5, y_5)$  เป็นจุด 5 จุดบนระนาบ โดยที่  $\sum_{i=1}^5 x_i = 20$ ,

$$\sum_{i=1}^5 y_i = 45, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 100, \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 485, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 220 \text{ และความสัมพันธ์ระหว่าง } x_i \text{ กับ } y_i \text{ เป็น}$$

ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง คือ  $y = ax + b$  เมื่อ  $x$  เป็นตัวแปรอิสระ และ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง  
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $a^2 + b^2 = 5$

ข. ถ้า  $x$  เป็นจำนวนเต็ม แล้ว  $y$  เป็นจำนวนคี่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

26. (1/58) กำหนดให้เส้นตรง  $L$  เป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง  $x$  และ  $y$  ที่กำหนดในตารางต่อไปนี้ โดยที่  $x$  เป็นตัวแปรอิสระ

$x$	1	2	3	4	5
$y$	9	11	$b$	17	19

และให้  $(3, b)$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $L$  เมื่อ  $b$  เป็นจำนวนจริง

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $b = 13$

ข. ถ้าค่าของ  $x$  เพิ่มขึ้น 0.5 แล้วค่าของ  $y$  จะเพิ่มขึ้น 1.3

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

27. (1/57) จำนวนประชากรในจังหวัดหนึ่ง ตั้งแต่ พ.ศ. 2550 ถึง พ.ศ. 2554 มีดังนี้

พ.ศ.	2550	2551	2552	2553	2554
จำนวนประชากร (แสนคน)	1.2	2.6	a	5.4	6.3

ถ้าจำนวนประชากรสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกับเวลา (พ.ศ.) เป็นเส้นตรง และทำนายว่าในปี พ.ศ. 2557 จะมีประชากร 1,028,000 คนแล้ว ใน พ.ศ. 2552 จะมีประชากรกี่คน

- 1) 204,000 คน      2) 272,000 คน      3) 340,000 คน      4) 408,000 คน



28. (2/57) ตารางต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $x$  กับ  $y$

$x$	0	1	2	3
$y$	1	0.8	0.8	0.6

ให้  $y = ax + b$  เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง  $x$  กับ  $y$  โดย  $x$  เป็นตัวแปรอิสระ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $b = a + 1.1$

ข. ถ้า  $x = 8$  แล้ว  $y = 0.02$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก      2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด      3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก      4) ก. ผิด และ ข. ผิด

# แคลคูลัสเบื้องต้น (Calculus)

22-36 Marks

## 1. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต (Main Limit Theorem)

• ลิมิตของฟังก์ชันต่อเนื่องโดยทั่วไป เช่น ฟังก์ชันพหุนาม หรือฟังก์ชันตรรกยะ สามารถหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ได้โดยการแทนค่า  $f(a)$  ลงไป (เพราะเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทุกโดเมนที่ทำให้  $f(a)$  หาค่าได้)

- ลิมิตของฟังก์ชันสามารถกระจายออกมาในเชิง บวก ลบ คูณ หาร หรือยกกำลัง ได้เช่นกัน ซึ่ง

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  เรียกว่า ลิมิตทางด้านซ้ายของ  $f$  (ลิมิตล่าง)
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  เรียกว่า ลิมิตทางด้านขวาของ  $f$  (ลิมิตบน)
- ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$  แสดงว่า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  หาค่าได้ (exist) และมีค่าเท่ากับ  $L$

## 2. รูปแบบกำหนดค่าไม่ได้ (Indeterminate Form)

เกิดจากการหาค่า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  โดยการแทนค่า  $f(a)$  ลงไปแล้วได้รูปแบบ  $\frac{0}{0}$  แก้ได้ 3 วิธี คือ

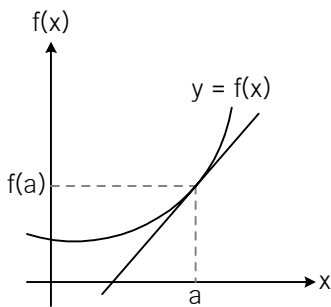
- แยกตัวประกอบ
- คูณด้วยสังยุคทั้งบนและล่าง
- หาคอนุพันธ์ทั้งบนและล่าง (กฎของโลปีตาล)

### 3. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Function)

- ฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่อง ณ  $x = a$  ก็ต่อเมื่อ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

### 4. อนุพันธ์ (อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ ขณะหนึ่งของฟังก์ชัน, Derivative)

“อนุพันธ์ก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของฟังก์ชัน แต่เป็นการกำหนดให้  $\Delta x \rightarrow 0$  (ให้ส่วนเปลี่ยนแปลงของ  $x$  มีค่าแคบมากๆ)”



$$\text{อนุพันธ์ของ } f \text{ ณ จุด } (x, y) = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} \text{ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด } (a, f(a)) &= f'(a) = \tan \theta \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

อนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน = อัตราการเปลี่ยนแปลงของความชัน ณ ขณะใดๆ ของฟังก์ชัน

$$= f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

- การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

$$\frac{d(cf)}{dx} = c \frac{df}{dx}$$

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = fg' + gf'$$

$$\frac{d\left(\frac{f}{g}\right)}{dx} = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$



## 5. ปฏิยานุพันธ์ และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Anti-Derivative & Indefinite integral)

การอินทิเกรตเป็นกระบวนการปฏิยานุพันธ์ ซึ่งคือกระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์

นิยาม ฟังก์ชัน  $F$  เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ  $f$  เมื่อ  $F'(x) = f(x) \forall x \in D_f$  หรือแทนด้วย

$\int f(x)dx = F(x) + c$  เรียกว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน  $f$  เมื่อ  $c$  เป็นค่าคงตัวใดๆ

- การหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตโดยใช้สูตร

$$\int k dx = kx + c \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ เมื่อ } n \neq -1 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad \int \sin x dx = -\cos x + c \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

## 6. อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite integral)

- กำหนดให้  $\int f(x)dx = F(x) + C$  จะได้ว่า  $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

- $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

- $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

- กรณี  $f(x) > 0$  สำหรับทุก  $a < x < b$  แล้ว

พื้นที่ใต้กราฟ  $y = f(x)$  ที่กระทำกับแกน  $X$  จาก  $x = a$  ถึง  $x = b$  มีค่าเท่ากับ  $\int_a^b f(x)dx$

- กรณี  $f(x) < 0$  สำหรับทุก  $a < x < b$  แล้ว

พื้นที่ใต้กราฟ  $y = f(x)$  ที่กระทำกับแกน  $X$  จาก  $x = a$  ถึง  $x = b$  มีค่าเท่ากับ  $-\int_a^b f(x)dx$

## 7. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน (ค่าสุดขีดสัมพัทธ์)

- กรณีที่กราฟหาอนุพันธ์ได้ เช่น ฟังก์ชันพหุนาม หรือฟังก์ชันตรรกยะ  
ถ้า  $(a, b)$  เป็นจุดต่ำสุดหรือสูงสุดสัมพัทธ์แล้วจะได้ว่า  $f(a) = b$  และ  $f'(a) = 0$  เรียก  $a$  ว่าค่าวิกฤต  
เมื่อ  $f''(a) > 0$  เรียก  $b$  ว่าเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์  
เมื่อ  $f''(a) < 0$  เรียก  $b$  ว่าเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
- กรณีที่กราฟหาอนุพันธ์ไม่ได้ เช่น กราฟค่าสัมบูรณ์ หรือกราฟหักมุมอื่นๆ  
ให้พิจารณาจุดหักมุมของกราฟที่  $f'(a)$  หาค่าไม่ได้มีโอกาสเป็นจุดต่ำสุดหรือสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน
- กรณีที่  $f''(a) = 0$  ไม่สามารถสรุปได้แน่นอน  
ให้พิจารณาของ  $f''(a)$  ทางด้านซ้ายและทางด้านขวา สามารถสรุปได้ 3 กรณี คือ
  1. ถ้าเป็นบวกทั้งคู่ แสดงว่าเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์
  2. ถ้าเป็นลบทั้งคู่ แสดงว่าเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์
  3. ถ้ามีการเปลี่ยนเครื่องหมาย แสดงว่าเป็นจุดเปลี่ยนเว้า (Inflection Point)

## 8. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน (ค่าสุดขีดสัมบูรณ์)

- เลือกพิจารณาค่าที่สูงที่สุดและต่ำที่สุดจาก 3 กรณีที่เป็นไปได้ คือ
  1. จุดวิกฤต (Stationary Point)
  2. จุดขอบช่วง (End Point)
  3. จุดที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ (Singular Point)

## 9. ข้อสอบ PAT1 เรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น สองปีล่าสุด

29. (2/58) กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2a & , x < 0 \\ a + b & , x = 0 \\ \frac{\sqrt{1 + bx + 5x^2} - 1}{x} & , x > 0 \end{cases} \quad \text{เมื่อ } a \text{ และ } b \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

ถ้าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องที่  $x = 0$  แล้ว ค่าของ  $15a + 30b$  เท่ากับเท่าใด

30. (2/57) กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย  $f(x) = \begin{cases} -x + a & , x \leq -2 \\ -\frac{2}{5}x + b & , -2 < x < 3 \\ x^2 - 6x + 11 & , x > 3 \end{cases}$   
 เมื่อ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง ถ้าฟังก์ชัน  $f$  มีความต่อเนื่องที่  $x = -2$  และ  $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$  หาค่าได้แล้ว  
 ค่าของ  $|a + 5b|$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) 8                      2) 18                      3)  $\frac{88}{5}$                       4)  $\frac{102}{5}$

31. (1/57) ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง และให้  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & ; x < 2 \\ \sqrt{x-1} & ; 2 \leq x \leq 5 \\ ax + b & ; x > 5 \end{cases}$   
 ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง แล้ว  $a - b$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) 5                      2) 8                      3) 11                      4) 12

32. (2/58) กำหนดให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวก สอดคล้องกับ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5x+1| - |5x-1|}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}} = 80$   
 ค่าของ  $a^2 + a + 58$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) 64                      2) 78                      3) 130                      4) 330

33. (1/58) ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่  
 $f(2x - 1) = 4x^2 - 10x + a$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงและ  $f(0) = 12$  ค่าของ  $\int_1^4 f(x) dx$  เท่ากับเท่าใด

34. (2/58) กำหนดให้  $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  เมื่อ  $-1 < x < 1$  ถ้า  $\int f(x)dx = A$  แล้ว  $\int f\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) dx$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี
- 1)  $A^2$                       2)  $-A^2$                       3)  $2A$                       4)  $-2A$

35. (1/58) ให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง ให้  $f : R \rightarrow R$ ,  $g : R \rightarrow R$  และ  $s : R \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชัน โดยที่  $f(x) = x + 1$  สำหรับทุก  $x \in R$   $g(f(x)) = x^2 + 2x - 1$  สำหรับทุก  $x \in R$  และ
- $$s(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h))^2 - (g(x))^2}{h} \text{ สำหรับทุก } x \in R \text{ ค่าของ } (sg)(1) \text{ เท่ากับเท่าใด}$$

36. (2/58) ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่
- $$f(x) = \frac{2x^4 - x}{x^3} \text{ เมื่อ } x \neq 0 \quad g(x) = (1 + x^2)f(x) \text{ และ } g(1) = 2 \text{ ค่าของ } \int_{-1}^2 x^3 g''(x) dx \text{ เท่ากับเท่าใด}$$

37. (1/57) ถ้า  $\int_{-2}^2 |x^2 - 7x + 6| dx = \frac{a}{b}$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็มที  $b \neq 0$  และ ห.ร.ม. ของ  $a$  และ  $b$  เท่ากับ 1 แล้ว ค่าของ  $a + b$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี
- 1) 33                      2) 69                      3) 102                      4) 104

38. (1/58) กำหนดให้  $f(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d$  เมื่อ  $b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $\int_{-2}^2 f(x) dx = -\frac{64}{3}$

ถ้า  $g(x)$  เป็นพหุนามซึ่ง  $g'(x) = f(x)$  และ  $g'(1) = g'(0) = g(0) = 0$  แล้ว  $g''(x) = g'(x) + g(x)$  ตรงกับสมการในข้อใดต่อไปนี้

1)  $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 6x = 0$

2)  $x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 6x = 0$

3)  $3x^4 - 16x^3 + 48x^2 - 24x = 0$

4)  $3x^4 + 8x^3 - 48x^2 + 24x = 0$

39. (2/57) กำหนดให้  $b > 1$  และ  $\int_1^b \frac{x-1}{x+\sqrt{x}} dx = 4$  ค่าของ  $1 + b + b^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 21

2) 31

3) 91

4) 111

40. (1/57) กำหนดให้  $f(x) = x^2 + ax + b$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $f(1) = 2$  และ  $(f \circ f)(0) = 10$  แล้ว ค่าของ  $\int_{-1}^2 f(x) dx$  เท่ากับเท่าใด

41. (2/57) ให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า  $f : R \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชัน โดยที่  $f(3) = 111$  และ  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{xf(x) - 333}{x - 3} = 2013$  แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $f(x)$  เทียบกับ  $x$  ขณะที่  $x = 3$  เท่ากับเท่าใด

42. (2/58) ให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง ให้  $f : R \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ  $f(x + y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $x$  และ  $y$  และ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$  ค่าของ  $f'(1) + f''(5)$  เท่ากับเท่าใด

43. (2/57) กำหนดให้  $f(x) = ax^2 + bx + c$  เป็นพหุนามกำลังสอง เมื่อ  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริงและ  $a \neq 0$  โดยที่  $f(1) = 0$  และ  $f$  มีค่าสูงสุดที่  $x = \frac{1}{3}$  ให้  $F(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  โดยที่  $F(0, t) = F(1, t) + 1$  สำหรับจำนวนจริง  $t > 1$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $F(1, 2) = F(2, 3) + 10$

ข. อนุพันธ์ของ  $\frac{f(x)}{x^2}$  เท่ากับ  $\frac{-3x^2 - 2x - 2}{x^8}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

44. (1/57) ให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า  $f : R \rightarrow R$  ฟังก์ชันซึ่ง  $f'''(x) = 3 + 6x$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $x$  และความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ณ จุด  $(2, 22)$  เท่ากับ 20 แล้ว ค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  กั้บเท่าใด

45. (2/58) กำหนด  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  และ  $f(x) = 12x - 9x^2$  เมื่อ  $0 < x < 1$  ถ้า  $\sin \theta = a$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงที่  $f(a)$  มีค่ามากที่สุด แล้วค่าของ  $\frac{(\cot^2 \theta)(\sec \theta - 1)}{1 + \sin \theta} + \frac{(\sec^2 \theta)(\sin \theta - 1)}{1 + \sec \theta}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1)  $1 + \sqrt{5}$                       2)  $\sqrt{5}$                       3)  $1 - \sqrt{5}$                       4) 0

46. (1/57) กำหนดให้  $f(x) = \frac{4x^3}{x^6 - 3x^3 + 64}$  เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $(0, 3)$

ข. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ  $f$  เท่ากับ  $\frac{4}{13}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก                      2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด                      3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก                      4) ก. ผิด และ ข. ผิด

47. (1/58) ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง และกำหนดให้  $f(x) = ax + \frac{b}{x}$  เมื่อ  $x \neq 0$  โดยที่  $y = f(x)$  เป็นเส้นโค้งที่สัมผัสกับเส้นตรง  $y = 1$  ที่จุด  $(1, 1)$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = -1$

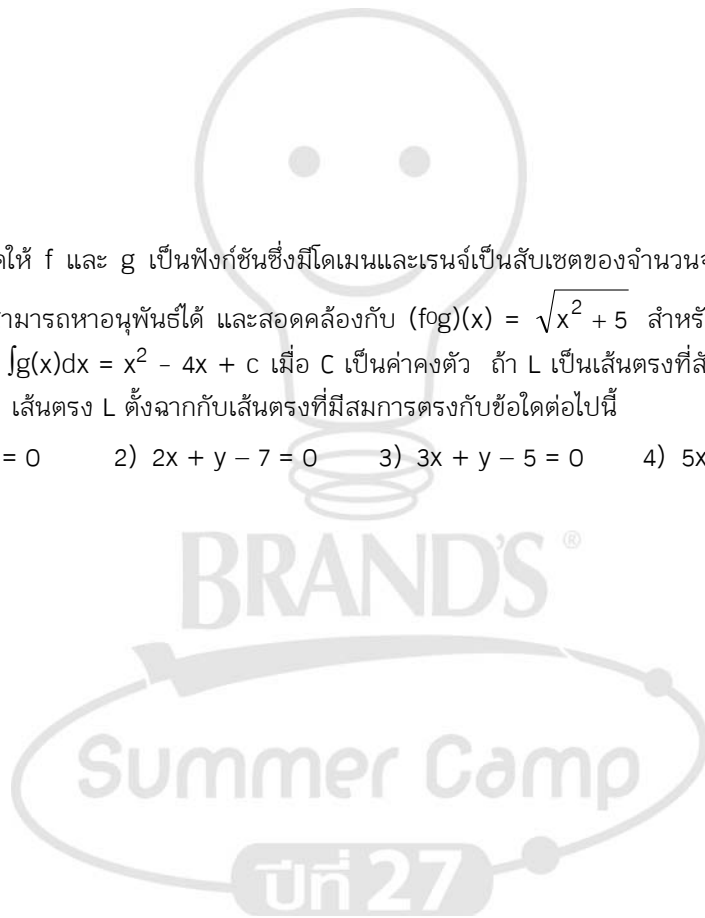
ข.  $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x) = f(2a^2 + 2b^2)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก                      2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด                      3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก                      4) ก. ผิด และ ข. ผิด

48. (2/57) กำหนดให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง และ  $a, b$  เป็นจำนวนจริง และให้  $f : R \rightarrow R$  เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย  $f(x) = a + bx + x^3$  สำหรับทุกจำนวนจริง  $x$  ถ้าเส้นตรง  $5x - y + 13 = 0$  สัมผัสกราฟ  $f$  ที่  $x = 1$  แล้ว  $\int_0^2 f(x)dx$  เท่ากับเท่าใด

49. (1/58) กำหนดให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยทั้ง  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และสอดคล้องกับ  $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 5}$  สำหรับทุก  $x$  ที่อยู่ในโดเมนของ  $f \circ g$  และ  $\int g(x)dx = x^2 - 4x + c$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัว ถ้า  $L$  เป็นเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ณ  $x = 0$  แล้ว เส้นตรง  $L$  ตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้
- 1)  $x + y - 3 = 0$       2)  $2x + y - 7 = 0$       3)  $3x + y - 5 = 0$       4)  $5x + y - 2 = 0$





# ความน่าจะเป็น (Probability)

10-31 Marks

## 1. ความน่าจะเป็น

คือ การวัด หรือการประมาณความเป็นไปได้ว่าบางสิ่งบางอย่างจะเกิดขึ้น หรือถ้อยแถลงหนึ่งๆ จะเป็นจริงมากเท่าใด คำนวณได้จากสูตร  $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = 1 - P(E')$

## 2. กฎพื้นฐานการนับ (The Basic of Counting)

- กฎการบวก ใช้เมื่องานสองอย่างไม่มีวันเกิดพร้อมกัน หรือเกิดอย่างใดอย่างหนึ่ง
- กฎการลบ ใช้เมื่อคิดเกินแล้วหักออก (ด้วยคอมพลิวเมนต์ของมัน)
- กฎการคูณ ใช้เมื่องานสองอย่างเกิดพร้อมกัน หรือเกิดเป็นขั้นตอนกันโดยไม่มีเงื่อนไข (ถ้ามีเงื่อนไขให้แยกกรณีคิด)
- กฎการหาร ใช้เมื่อเจอของซ้ำ หรือการจัดหมู่

## 3. การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

- การเรียงสับเปลี่ยนของไม้เท้า สมมติให้มีของไม้เท้า  $n$  สิ่ง
  - นำมาจัดเรียงทั้งหมดในแนวเส้นตรงได้  $n!$  วิธี
  - นำมาจัดเรียงทั้งหมดในแนววงกลมได้  $(n-1)!$  วิธี
  - นำมาจัดเรียงทั้งหมดในแนววงกลม 3 มิติได้  $\frac{(n-1)!}{2}$  วิธี
  - นำมาจัดเรียง  $r$  สิ่งในแนวเส้นตรงได้  ${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$  วิธี
  - นำมาจัดเรียง  $r$  สิ่งในแนววงกลมได้  ${}^n C_r \times (r-1)!$  วิธี (เลือกก่อนเรียง)
- การเรียงสับเปลี่ยนของซ้ำ สมมติให้มีของทั้งหมด  $n$  สิ่ง ซ้ำกลุ่มละ  $r_1, r_2, \dots, r_k$  สิ่ง
  - นำมาจัดเรียงทั้งหมดในแนวเส้นตรงได้  $\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$  วิธี
  - นำมาจัดเรียงทั้งหมดในแนววงกลมได้  $\frac{(n-1)!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$  วิธี (เมื่อเฉพาะสัมพันธ์ต่อกัน)  
หากไม่เฉพาะสัมพันธ์ต่อกันให้ไล่นับโดยตรง
  - นำมาจัดเรียงเพียงบางส่วนในแนวเส้นตรงหรือวงกลม ต้องแยกกรณีคิดแล้วนำมารวมกัน
- การเรียงสับเปลี่ยนที่มีเงื่อนไข

#### 4. การเลือก หรือการหยิบสิ่งของพร้อมกัน (Combination)

เลือกหรือหยิบสิ่งของพร้อมกัน  $r$  สิ่ง จากของต่างทั้งหมด  $N$  สิ่งได้  ${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$  วิธี

#### 5. การแบ่งหมู่

มีของต่างทั้งหมด  $N$  สิ่ง แบ่งหมู่ต่างหมู่ละ  $r_1, r_2, \dots, r_k$  สิ่ง ได้  $\frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!}$  วิธี

(ในกรณีหมู่เหมือนกัน : ให้นำ (จำนวนหมู่ที่เหมือนกัน)! มาหารด้วย)

#### 6. กฎพีชคณิตเซต ผสมแผนภาพ Venn-Euler

$$2 \text{ set } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(U) - n(A' \cap B')$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A' \cap B')$$

$$3 \text{ set } n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ = n(U) - n(A' \cap B' \cap C')$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ = 1 - P(A' \cap B' \cap C')$$

ถ้าข้อมูลตรงสูตรก็แทนสูตรลงไปได้เลย แต่ถ้าไม่ตรงสูตรให้ไล่แผนภาพโดยเริ่มไล่จากตรงกลางก่อน

#### 7. ทฤษฎีบททวินาม (Binomial's Theory)

$$\bullet (a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n \\ = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n+1} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$\bullet \text{พจน์ที่ } r+1 = T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

## 8. ข้อสอบ PAT 1 เรื่องความน่าจะเป็นสองปีล่าสุด

50. (2/58) กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลขนาดเดียวกัน 7 ลูก เป็นลูกบอลสีขาว 4 ลูก และเป็นลูกบอลสีแดง 3 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องใบนี้มา 6 ลูก นำมาจัดเรียงเป็นแถวตรง

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ความน่าจะเป็นที่การจัดเรียงแถวตรงของลูกบอลโดยหัวแถวเป็นลูกบอลสีขาว หรือท้ายแถวเป็นลูกบอลสีแดงเท่ากับ  $\frac{11}{42}$

ข. ความน่าจะเป็นที่การจัดเรียงแถวตรงของลูกบอลโดยหัวแถวเป็นลูกบอลสีขาว มากกว่าความน่าจะเป็นที่ท้ายแถวเป็นลูกบอลสีแดง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

51. (2/58) กำหนดให้  $a$ ,  $b$  และ  $c$  เป็นจำนวนเต็มที่สุดคคลังกับ

1.  $a^2 + b^2 \leq 90$     2.  $a + b = 5 + c$     3.  $a > 8$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $a + 2b + 3c \leq 36$

ข. ค่ามากที่สุดของ  $a^3 + b^3 + c^3$  เท่ากับ 1085

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

52. (1/58) ให้  $S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$  และให้  $A$  เป็นสับเซตของ  $S$  โดยมีจำนวนสมาชิกของเซต  $A$  เท่ากับ 4 ความน่าจะเป็นที่จะได้เซต  $A$  โดยที่สมาชิกในเซต  $A$  จัดเรียงเป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเป็นจำนวนเต็มบวก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $\frac{3}{455}$     2)  $\frac{4}{455}$     3)  $\frac{1}{91}$     4)  $\frac{1}{92}$

53. นิยาม จำนวนสามหลักลด คือจำนวน ABC โดยที่  $A, B, C \in \{0, 1, \dots, 9\}$  และ  $A > B > C$   
จำนวนวิธีสร้างจำนวนสามหลักลดที่มีค่ามากกว่า 500 มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (1/58)

- 1) 119                      2) 117                      3) 114                      4) 110

54. (1/57) ต้องการสร้างจำนวนสามหลัก โดยที่มีตัวเลข 5 อย่างน้อย 1 หลัก แต่ไม่มีตัวเลข 7 ในหลักใดเลย  
มีจำนวนวิธีสร้างจำนวนสามหลักเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 128                      2) 136                      3) 153                      4) 200

55. (1/57) ตู้ฉีกรถมีรหัสเปิดตู้เป็นจำนวน 10 หลัก คือ ABCDEFGHIJ โดยที่

ก.  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  และ  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$   
เป็นจำนวนที่แตกต่างกันทั้งหมด

ข.  $A, B, C, D$  เป็นจำนวนคี่ที่เรียงติดกัน และ  $A > B > C > D$

ค.  $E, F, G$  เป็นจำนวนคู่ที่เรียงติดกัน และ  $E > F > G$

ง.  $H > I > J$  และ  $H + I + J = 15$

ค่าของ  $C + F + I$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 10                      2) 13                      3) 15                      4) 17

56. (2/57) ต้องการเขียนจำนวนที่มีหกหลัก ABCDEF โดยที่  $A, B, C, D, E, F \in \{1, 2, \dots, 9\}$   $A+B = 14$  และ  $C - D > D - E > E - F > 0$  จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน

57. (2/57) จากตัวเลข 1, 2, 3, ..., 9 นำมาสร้างจำนวนห้าหลักใช้เลขซ้ำกันได้ ความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนห้าหลัก โดยที่ในแต่ละหลักเป็นตัวเลขที่แตกต่างกันเพียง 3 จำนวนเท่านั้น มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1)  $\frac{280}{2187}$

2)  $\frac{560}{2187}$

3)  $\frac{1400}{6561}$

4)  $\frac{5040}{6561}$

58. (2/58) มีกระเบื้องสี่เหลี่ยมจัตุรัสสีแดง สีขาว และสีเขียว เป็นจำนวนอย่างน้อยสี่ละ 5 แผ่น (แต่ละสีเหมือนกันและมีขนาดเท่ากันทั้งหมด) ต้องการนำกระเบื้อง 7 แผ่นมาจัดเรียงเป็นแถวตรงโดยมีกระเบื้องแต่ละสีอย่างน้อยหนึ่งแผ่น จะจัดเรียงกระเบื้องดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธี

59. (2/57) มีเก้าอี้สีขาวเหมือนกัน 3 ตัว และเก้าอี้สีแดงเหมือนกัน 3 ตัว นำมาจัดเรียงรอบโต๊ะกลม จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 4 วิธี

2) 6 วิธี

3) 10 วิธี

4) 20 วิธี

60. (2/57) ต้องการจัดเรียงตัวอักษร P, P, P, A, A, A, T, T, T ทั้งหมด (ไม่คำนึงถึงความหมาย) โดยมีเงื่อนไขว่าตัวอักษร P ทั้งสามตัวต้องอยู่แยกกันทั้งหมด และตัวอักษร T ทั้งสามตัวต้องอยู่แยกกันทั้งหมด จะมีวิธีการเรียงตัวอักษรดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธี

61. (1/58) กำหนดให้  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ให้ S เป็นเซตของคู่อันดับ (A, B) ทั้งหมด โดยที่จำนวนสมาชิกของเซต  $A \cap B$  เท่ากับ 2 เมื่อ A และ B เป็นสับเซตของ U จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับเท่าใด

62. (1/57) ในคนกลุ่มหนึ่งประกอบด้วยชาย 6 คน และหญิงจำนวนหนึ่ง ความน่าจะเป็นที่เลือกกรรมการ 2 คน เป็นชายทั้งสองเท่ากับ  $\frac{1}{8}$  ความน่าจะเป็นที่จะเลือกกรรมการ 5 คนเป็นชายไม่น้อยกว่า 3 คนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1)  $\frac{171}{728}$

2)  $\frac{22}{91}$

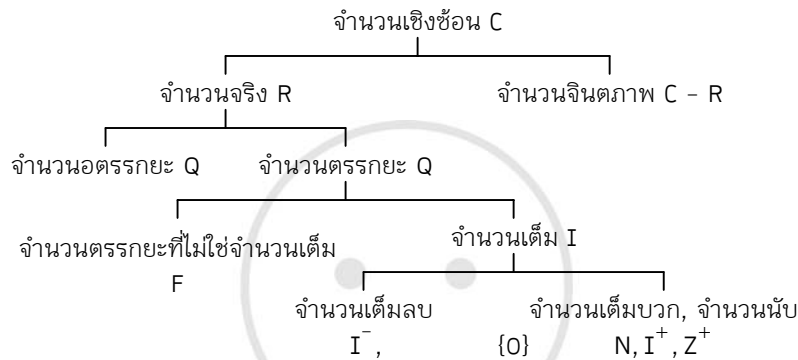
3)  $\frac{175}{728}$

4)  $\frac{43}{91}$

# จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

6-21 Marks

## 1. โครงสร้างของระบบจำนวน (Number System)



## 2. สมบัติพื้นฐานของจำนวนเชิงซ้อน

### (Modulus, Conjugate & Inverse)

- สัญลักษณ์ของ  $z = a + bi$  คือ  $\bar{z} = a - bi$  โดย  $\text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z)$  แต่  $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$   
 $z + \bar{z} = 2a$        $z - \bar{z} = 2bi$        $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$   
 $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$        $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$        $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$        $\bar{z}^n = (\bar{z})^n$

- ค่าสัมบูรณ์ของ  $z = a + bi$  คือ  $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}| = |-z|$  โดย  
 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$        $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$        $|z|^n = |z^n|$        $|z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{1}{|z|}$   
 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$        $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$   
 $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$        $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = |z_1|^2 - z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 - |z_2|^2$   
 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

- ตัวผกผันของ  $z = a + bi$  คือ  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = a - bi$  โดย

$$(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1} \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-1} = \frac{z_1^{-1}}{z_2^{-1}} \quad (\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$$

### 3. การแก้สมการพหุนาม (Polynomial Equation)

- สมการกำลังสอง (Quadratic Equation)  $ax^2 + bx + c = 0$ 
  - แยกตัวประกอบโดยการคูณผลบวกและผลคูณ
  - แทนสูตรหาหาค่า  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  เมื่อ  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$   
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a}$  เมื่อ  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$
  - ผลบวกรากสมการ  $= x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$  ผลคูณรากสมการ  $= x_1x_2 = \frac{c}{a}$
- สมการกำลังสามขึ้นไป  $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ 
  - จับคู่แล้วแยกตัวประกอบโดยดึงตัวร่วม (อัตราส่วนสัมประสิทธิ์เท่ากัน)
  - หาสังเคราะห์ด้วยทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ (อัตราส่วนสัมประสิทธิ์ไม่เท่ากัน)
  - กรณีสมการกำลังสาม (Cubic Equation)  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$   
ผลบวกรากสมการ  $= x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$  ผลคูณรากสมการ  $= x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}$   
และ  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$
- ทฤษฎีบทตัวประกอบของจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ
  - ถ้า  $x = a$  เป็นคำตอบของสมการพหุนาม  $f(x) = 0$  แล้ว  $f(x)$  จะมี  $x - a$  เป็นตัวประกอบ
  - ถ้า  $x = a + bi$  เป็นคำตอบของสมการพหุนาม  $f(x) = 0$  แล้ว  $f(a - bi) = 0$  และ  $f(x)$  จะมี  $(x - a)^2 + b^2$  เป็นตัวประกอบ

### 4. พิกัดเชิงขั้วและการหารากของจำนวนเชิงซ้อน

#### (Polar Form & De Moivre's)

- มีประโยชน์ในการหาผลคูณ, ผลหาร, จำนวนเชิงซ้อนยกกำลังมากๆ โดย  
ถ้า  $Z_1 = |Z_1| \text{cis } \theta_1$  และ  $Z_2 = |Z_2| \text{cis } \theta_2$  แล้ว  
 $Z_1Z_2 = |Z_1||Z_2| \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$      $Z_1/Z_2 = |Z_1|/|Z_2| \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$      $Z^n = |Z|^n \text{cis}(n\theta_1)$
- รากที่  $n$  ของ  $Z$  จะมีทั้งหมด  $n$  ราก โดยที่รากตัวแรกคือ  $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{|Z|} \text{cis } \frac{\theta}{n}$   
จากนั้นหารากที่เหลือได้โดยการแบ่งมุมกลมเป็น  $n$  ส่วนเท่าๆ กันเพิ่มเข้าไปจนครบ



## 5. ข้อสอบ PAT 1 เรื่องจำนวนเชิงซ้อนปีล่าสุด

63. (2/58) ให้  $R$  แทนเซตของจำนวนจริง ให้  $z_1 = a + bi$  และ  $z_2 = c + di$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่  $a, b, c, d \in R - \{0\}$  และ  $i = \sqrt{-1}$  สมมติว่ามีจำนวนจริง  $t$  และ  $s$  ที่ว่า  $z_1^2 + z_2^2 = t$  และ  $z_1 - z_2 = s$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $|z_1| = |z_2|$

ข.  $\text{Im}(z_1 z_2) = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

64. (1/58) กำหนดให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ  $|z| + 2\bar{z} - 3z = 3 - 45i$  เมื่อ  $|z|$  แทนค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ  $z$  และ  $\bar{z}$  แทนสังยุค (Conjugate) ของ  $z$  ค่าของ  $|\bar{z}|^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 95                                  2) 225                                  3) 245                                  4) 375

65. (1/57) กำหนดให้  $z = x + yi$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนที่สอดคล้องกับสมการ  $x(3 + 5i) + y(1 - i)^3 = 3 + 7i$

พิจารณาคำข้อความต่อไปนี้

ก.  $\text{Im}(i\bar{z}) = -\text{Re}(iz)$

ข.  $\frac{1}{z} = \frac{8 - 6i}{7}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด

66. (2/57) กำหนดให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการกำหนดให้  $\bar{z} - 1 - 4i = 3i(z - i)$

ข้อใดต่อไปนี่ไม่ถูกต้อง

1)  $z + \bar{z} = i(z - \bar{z})$

2)  $|z + 2| = 2$

3)  $\bar{z}^2 - 8i = 0$

4)  $z(1 - i)^8 - 8i = 0$

67. กำหนดให้  $A$  เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ  $3|z|^2 - (28 - i)z + 4z^2 = 0$  และให้  $B = \{z + i \mid z \in A\}$  ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $B$  เท่ากับเท่าใด (1/57)

68. ให้  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่  $|z_1| = \sqrt{2}$ ,  $|z_2| = \sqrt{3}$  และ  $|z_1 - z_2| = 1$  แล้วค่าของ  $|z_1 + z_2|$  เท่ากับเท่าใด เมื่อ  $|z|$  แทนค่าสัมบูรณ์ของ  $z$  (1/58)

69. (2/58) กำหนดให้  $z = a + bi$  โดยที่  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงที่  $ab > 0$  และ  $i = \sqrt{-1}$  ถ้า  $z^3 = i$  แล้วค่าของ  $|iz^5 + 2|^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (เมื่อ  $|z|$  แทนค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ  $z$ )

1)  $5 + 2\sqrt{3}$

2) 7

3)  $5 - 2\sqrt{3}$

4) 3

70. (1/58) ให้  $A = \cos 15^\circ + \cos 87^\circ + \cos 159^\circ + \cos 231^\circ + \cos 303^\circ$

และ  $B = \sin\left(\arctan\left(\frac{15}{8}\right) + \arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

ถ้า  $A+B = \frac{a}{b}$  เมื่อ ห.ร.ม. ของ  $a$  และ  $b$  เท่ากับ 1 แล้ว ค่าของ  $a+b$  เท่ากับเท่าใด

# กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

5-6 Marks

- เป็นการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของสิ่งที่เราต้องการ (ในรูปสมการจุดประสงค์  $P = Mx + Ny$ ) ภายใต้ขอบเขตหนึ่งๆ (อสมการข้อจำกัด  $a_1x + b_1y \leq c_1$  หรือ  $a_2x + b_2y \geq c_2$ ) โดย  $x$  และ  $y$  มักแทนปริมาณสินค้าแต่ละชนิด  
 $M$  และ  $N$  มักแทน  $P$  (Profit) ของสินค้าแต่ละชนิด  
 $a, b, c$  เป็นเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมา

## 1. หลักการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุดของสมการจุดประสงค์

- Step 1 เขียนสมการจุดประสงค์ (อาจใจดีบอกมาให้ หรือเราต้องตั้งสมการเอง)
- Step 2 เขียนอสมการข้อจำกัด (อาจใจดีบอกมาให้ หรือเราต้องตั้งอสมการเอง)
- Step 3 วาดกราฟอสมการข้อจำกัด และหาจุดหักมุมทั้งหมด \*\*\*
- Step 4 นำจุดหักมุมทุกจุดแทนลงในสมการจุดประสงค์  
(บางจุด ถ้านักเรียนมองออกว่าเป็นไปไม่ได้แน่นอนที่จะสูงสุด-ต่ำสุด ก็ไม่ต้องแทนได้)
- Step 5 เลือกจุดที่ให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดตามเงื่อนไขที่โจทย์ต้องการ

## 2. ข้อสอบ PAT 1 เรื่องกำหนดการเชิงเส้นสองปีล่าสุด

71. (1/57) กำหนดให้  $P = Ax + By$  เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ เมื่อ  $A$  และ  $B$  เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ  $3A = 2B$  โดยมีสมการข้อจำกัด ดังนี้  $x + 2y \leq 20$ ,  $7x + 9y \leq 105$ ,  $5x + 3y \geq 15$ ,  $x \geq 0$  และ  $y \geq 0$  ถ้า  $P$  มีค่ามากที่สุดเท่ากับ  $M$  และ  $P$  มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ  $N$  แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง
- 1)  $2M = 11N$       2)  $5M = 11N$       3)  $2M = N$       4)  $5M = N$

72. กำหนดให้ฟังก์ชันจุดประสงค์  $P_1 = 5x + 2y$  และ  $P_2 = 4x + 3y$  โดยมีสมการข้อจำกัดดังนี้  $2x + 3y \geq 6$ ,  $3x - y \leq 15$ ,  $-x + y \leq 4$ ,  $2x + 5y \leq 27$ ,  $x \geq 0$  และ  $y \geq 0$  ให้ค่ามากที่สุดของ  $P_1$  และ  $P_2$  เท่ากับ  $M_1$  และ  $M_2$  ตามลำดับ และค่าน้อยที่สุดของ  $P_1$  และ  $P_2$  เท่ากับ  $N_1$  และ  $N_2$  ตามลำดับ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $M_1$  มีค่ามากกว่า  $M_2$

ข.  $N_1$  มีค่าน้อยกว่า  $N_2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง (1/58)

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก    2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด    3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก    4) ก. ผิด และ ข. ผิด



73. (2/58) นาย ก. วางแผนจะปลูกมันหรือสับปะรดบนที่ดิน 150 ไร่ โดยมีข้อมูลในการลงทุนดังนี้ ในการปลูกมันจะต้องลงทุนค่าต้นกล้าไร่ละ 200 บาท และใช้แรงงานไร่ละ 10 ชั่วโมง ในการปลูกสับปะรดจะต้องลงทุนค่าต้นกล้าไร่ละ 300 บาท และใช้แรงงานไร่ละ 12.5 ชั่วโมง นาย ก. มีเงินลงทุนสำหรับค่าต้นกล้า 40,000 บาท และมีแรงงานไม่เกิน 1,850 ชั่วโมง ถ้าปลูกมันจะได้กำไรไร่ละ 1,500 บาท ปลูกสับปะรดจะได้กำไรไร่ละ 2,000 บาท ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

- 1) ปลูกสับปะรดเพียงอย่างเดียว จะได้กำไรสูงสุด 300,000 บาท
- 2) ปลูกมัน 10 ไร่ ปลูกสับปะรด 140 ไร่ จะได้กำไรสูงสุด 295,000 บาท
- 3) ปลูกมัน 50 ไร่ ปลูกสับปะรด 100 ไร่ จะได้กำไรสูงสุด 275,000 บาท
- 4) ปลูกมัน 110 ไร่ ปลูกสับปะรด 40 ไร่ จะได้กำไรสูงสุด 245,000 บาท



74. (2/57) มีปุ๋ยอยู่ 2 ชนิด คือชนิด A และ ชนิด B โดยแต่ละชนิดบรรจุถุงละ 100 กรัม ส่วนประกอบและราคาแต่ละชนิด ดังนี้

ชนิดปุ๋ย	สารอาหาร N	สารอาหาร P	สารอาหาร K	ราคาถุงละ
ชนิด A	2 หน่วย	1 หน่วย	80 หน่วย	10 บาท
ชนิด B	3 หน่วย	3 หน่วย	60 หน่วย	12 บาท

นักวิจัยทดลองผสมปุ๋ยชนิด A และชนิด B ให้พืชในแปลงทดลอง โดยส่วนผสมปุ๋ยที่ได้ประกอบด้วย สารอาหาร N อย่างน้อย 18 หน่วย สารอาหาร P อย่างน้อย 12 หน่วย และสารอาหาร K อย่างน้อย 480 หน่วย ค่าใช้จ่ายน้อยสุดในการผสมปุ๋ยทั้งสองชนิดเท่ากับข้อใดต่อไปนี

- 1) 74 บาท                      2) 78 บาท                      3) 84 บาท                      4) 96 บาท



## เฉลยตัวอย่างข้อสอบ

1. 3)	2. 0.5	3. 3)	4. 2)	5. 4)
6. 201	7. 8	8. 3	9. 1)	10. 16
11. 4)	12. 21	13. 2)	14. 1)	15. 3)
16. 7	17. 109	18. 2)	19. 4)	20. 4)
21. 3)	22. 1)	23. 15.87	24. 3	25. 1)
26. 3)	27. 3)	28. 1)	29. 15	30. 2)
31. 2)	32. 4)	33. 34.5	34. 3)	35. 4
36. 132	37. 4)	38. 4)	39. 3)	40. 12
41. 634	42. 35	43. 2)	44. 100	45. 4)
46. 3)	47. 1)	48. 38	49. 3)	50. 3)
51. 2)	52. 4)	53. 4)	54. 4)	55. 2)
56. 35	57. 3)	58. 1386	59. 1)	60. 340
61. 270	62. 2)	63. 1)	64. 2)	65. 4)
66. 4)	67. 5	68. 3	69. 4)	70. 169
71. 1)	72. 1)	73. 3)	74. 2)	



# เก็งข้อสอบ

## ชุดที่ 1

ตอนที่ 1 : แบบปรนัย 5 ตัวเลือก ข้อละ 2.5 คะแนน

1. กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า  $ab = ac$  แล้ว  $b = c$

ข. ถ้า  $a|bc| < 0$  และ  $b < 0$  แล้ว  $|ab|c < 0$

ค. ถ้า  $a > 0$  และ  $b > 0$  แล้ว  $a + b \geq \sqrt{2ab}$

ข้อใดถูก

1) ก. และ ข. ถูก แต่ ค. ผิด

2) ก. และ ค. ถูก แต่ ข. ผิด

3) ข. และ ค. ถูก แต่ ก. ผิด

4) ข.ถูก แต่ ก. และ ค. ผิด

5) ค. ถูก แต่ ก. และ ข. ผิด

2. ให้  $A = 2\frac{5}{6}$ ,  $B = 3\frac{1}{2}$ ,  $C = 5\frac{1}{3}$  ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1)  $A < B < C$

2)  $B < A < C$

3)  $B < C < A$

4)  $C < A < B$

5)  $C < B < A$

3. ให้  $a = \sqrt{18} - \sqrt{12}$  และ  $b = \sqrt{75} - \sqrt{50}$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนอตรรกยะ

ข.  $3a < 2b$

ค.  $a + b < 2$

ข้อใดถูกต้อง

1) ก. และ ข. ถูก แต่ ค. ผิด

2) ก. และ ค. ถูก แต่ ข. ผิด

3) ข. และ ค.ถูก แต่ ก. ผิด

4) ค.ถูก แต่ ก. และ ข. ผิด

5) ก. ถูก แต่ ข. และ ค. ผิด

4. ถ้า  $a = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$  แล้ว  $\sqrt{a+\frac{1}{a}}-2$  มีค่าเท่ากับข้อใด

1) 3

2) 4

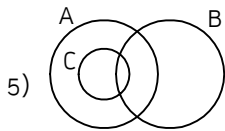
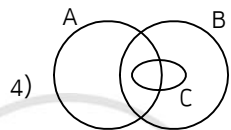
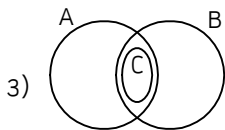
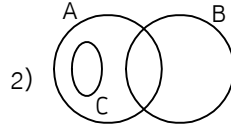
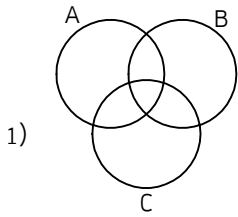
3)  $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

4)  $3\sqrt{2}$

5)  $4\sqrt{5}$



5. ส่วนที่แรเงาของแผนภาพในข้อใดหมายถึง  $A - (B - C)$



6. พิจารณาผลสรุปต่อไปนี้

ก. เหตุ 1) ทุกครั้งที่ฝนตก การจราจรจะติดขัด

2) วันนี้จราจรติดขัด

ผล วันนี้ฝนตก

ข. เหตุ 1) ดাঁไม่ชอบกินผัก

2) ทุกคนที่กินผักมีสายตาดำ

ผล ดাঁสายตาดำ

ค. เหตุ 1) ผู้ที่ประหยัดจะไม่ยากจน

2) นายมีเป็นคนยากจน

ผล นายมีเป็นคนไม่ประหยัด

ข้อใดถูก

1) ก., ข. และ ค. สมเหตุสมผล

2) ก. และ ข. สมเหตุสมผล แต่ ค. ไม่สมเหตุสมผล

3) ข. และ ค. สมเหตุสมผล แต่ ก. ไม่สมเหตุสมผล

4) ค. สมเหตุสมผล แต่ ก. และ ข. ไม่สมเหตุสมผล

5) ก., ข. และ ค. ไม่สมเหตุสมผล

7. ถ้า  $A = \{x | 9^{x^2} = (1 + \sqrt[3]{8})^x\}$  แล้ว ผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน A มีค่าเท่ากับข้อใด

1)  $-\frac{1}{2}$

2) 0

3)  $\frac{1}{2}$

4) 1

5)  $\frac{3}{2}$

8. ถ้า  $64^k = 16$  แล้ว  $8^k + 8^{-k}$  มีค่าเท่ากับข้อใด

1) 0

2)  $\frac{5}{4}$

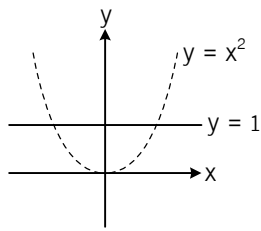
3)  $\frac{5}{2}$

4)  $\frac{17}{4}$

5)  $\frac{65}{8}$

9. ผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ  $\frac{x-1}{x+2} + x = 1$  เท่ากับข้อใด  
 1) -4                      2) -3                      3) -2                      4) 1                      5) 2
10. ถ้า  $A = \{x \mid |x + 1| + 1 > 2\}$  แล้ว ช่วงในข้อใดเป็นสับเซตของ A  
 1) (-4, -2]              2) (-3, -1)              3) [-1, 0)              4) [0, 2)              5) [2, 3)
11. กำหนดให้  $A = \{x \mid x - 2\}$  และ  $B = \{x \mid x^2 - 3x - 4 > 0\}$  สมาชิกของ  $A - B$  ที่เป็นจำนวนเต็มมีกี่ตัว  
 1) 3                      2) 4                      3) 5                      4) 6                      5) 7

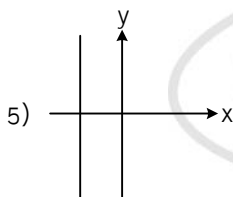
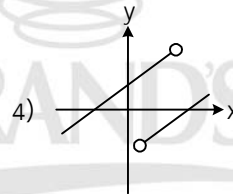
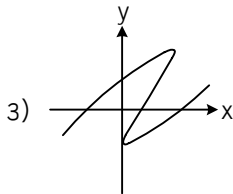
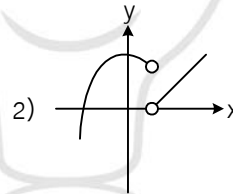
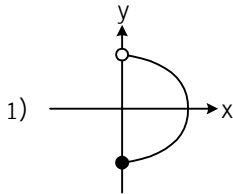
12.



บริเวณที่แรเงาเป็นกราฟของความสัมพันธ์ในข้อใด

- 1)  $\{(x, y) \mid x^2 - y < 0 \text{ และ } y \leq 1\}$   
 2)  $\{(x, y) \mid x^2 - y < 0 \text{ และ } y \geq 1\}$   
 3)  $\{(x, y) \mid x^2 - y \geq 0 \text{ และ } y < 1\}$   
 4)  $\{(x, y) \mid x^2 - y \geq 0 \text{ และ } y > 1\}$   
 5)  $\{(x, y) \mid x^2 - y > 0 \text{ และ } y \leq 1\}$

13. กราฟในข้อใดแสดงว่า y เป็นฟังก์ชันของ x



14. กำหนดให้  $f(x) = (x - 3)^2 - 4$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- กราฟของ  $f$  เป็นพาราโบลาหงาย
  - ถ้า  $x \in (1, 4]$  แล้ว  $f(x) < 0$
  - ถ้ากราฟของ  $f$  ตัดแกน  $y$  ที่จุด  $(0, a)$  และค่าต่ำสุดของ  $f$  คือ  $b$  แล้ว  $a + b = 1$
- ข้อใดถูก
- ก., ข. และ ค. ถูกทั้งสามข้อ
  - ก. และ ข. ถูก แต่ ค. ผิด
  - ก. และ ค. ถูก แต่ ข. ผิด
  - ก. ถูก แต่ ข. และ ค. ผิด
  - ข. ถูก แต่ ก. และ ค. ผิด
15. กำหนดให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีมุม  $\hat{B} = 90^\circ$  และมี  $BD$  เป็นเส้นความสูงของรูปสามเหลี่ยม ถ้ามุม  $\hat{A} = 60^\circ$  และ  $AD$  ยาว 2 หน่วย แล้ว  $CD$  จะยาวกี่หน่วย
- 1
  - $4\sqrt{3}$
  - 6
  - $6\sqrt{3}$
  - 8
16. กำหนดให้  $ABCD$  เป็นรูปสามเหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่ 100 ตารางเมตร ถ้า  $\tan(\hat{BAC}) = \tan(90 - \hat{ACD})$  แล้วสี่เหลี่ยม  $ABCD$  มีเส้นรอบรูปยาวกี่หน่วย
- 40
  - 50
  - 58
  - 104
  - 202
17. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ระหว่างตึกสองหลัง ถ้าชายคนนี้มีมองยอดตึกที่หนึ่งด้วยมุมเงย  $30^\circ$  แล้วหันหลังกลับเขาจะมองเห็นยอดตึกที่สองด้วยมุมเงย  $60^\circ$  สมมติว่าตึกที่สองสูงกว่าตึกที่หนึ่ง  $20\sqrt{3}$  เมตร และตึกทั้งสองห่างกัน 100 เมตร ชายคนนี้จะยืนอยู่ห่างจากตึกที่หนึ่งกี่เมตร
- $30\sqrt{3}$
  - $40\sqrt{2}$
  - 60
  - 62
  - 70
18. เมื่อวางบันไดยาว 4 เมตรพาดกับผนัง บันไดจะทำมุม 30 องศา กับพื้น ถ้าเลื่อนปลายบนของบันไดให้สูงขึ้นอีก 1 เมตร ปลายล่างของบันไดจะเลื่อนจากจุดเดิมเข้าหาผนังเป็นระยะทางกี่เมตร
- $2\sqrt{3} - \sqrt{7}$
  - $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$
  - 1
  - $2\sqrt{5} - \sqrt{3}$
  - $3\sqrt{2} - \sqrt{5}$
19. ถ้า  $a_n = \frac{2 - (-1)^n}{2n + 3}$  แล้วข้อใดถูก
- $a_1 = \frac{1}{5}$
  - $a_2 = \frac{4}{7}$
  - $a_3 = \frac{1}{9}$
  - $a_4 = \frac{2}{11}$
  - $a_5 = \frac{7}{13}$
20. ถ้า  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิตและผลต่างร่วมไม่เป็นศูนย์ แล้วข้อใดผิด
- $|a_{10} - a_{11}| = |a_{21} - a_{20}|$
  - $a_9 + a_{14} = a_{11} + a_{12}$
  - $\frac{a_{15} - a_{12}}{a_7 - a_4} = 1$
  - ถ้า  $b_n = a_n - 5$  ทุกๆ  $n$  แล้ว  $b_1, b_2, b_3, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต
  - ถ้า  $c_n = 5^n a_n$  ทุกๆ  $n$  แล้ว  $c_1, c_2, c_3, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิต

21. กำหนดให้  $x$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $5 - 7x, 3x + 28, 5x + 27, \dots, 2x^3 - 3x - 3x + 1$  เป็นลำดับเลขคณิต แล้วลำดับนี้มีกี่พจน์
- 1) 10                      2) 11                      3) 12                      4) 13                      5) 14
22. ชุบกongหนึ่งวางเรียงซ้อนกันเป็นชั้นๆ โดยชั้นบนจะมีจำนวนน้อยกว่าชั้นล่างที่อยู่ติดกัน 3 ต้นเสมอ ถ้าชั้นบนสุดมี 49 ต้น และชั้นล่างสุดมี 211 ต้น แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. ชุบกongนี้มี 56 ชั้น  
ข. ชั้นที่ 8 (นับจากบนลงล่าง) มีชุง 70 ต้น  
ค. ชุบกongนี้มีทั้งหมด 7,150 ต้น
- ข้อใดถูก
- 1) ก., ข. และ ค. ถูกทั้งสามข้อ                      2) ข. ถูก แต่ ก. และ ค. ผิด  
3) ค. ถูก แต่ ก. และ ข. ผิด                      4) ก. และ ค. ถูก แต่ ข. ผิด  
5) ข. และ ค. ถูก แต่ ก. ผิด
23. ถ้าพจน์ที่ 5 และ พจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิตเป็น  $\frac{1}{2}$  และ  $-\frac{1}{16}$  ตามลำดับ แล้วพจน์ที่ 4 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) -1                      2)  $-\frac{1}{2}$                       3)  $-\frac{1}{4}$                       4) 1                      5) 2
24. พจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิต  $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \dots$  ตรงกับข้อใด
- 1)  $8\sqrt{6}$                       2)  $16\sqrt{3}$                       3)  $16\sqrt{6}$                       4)  $32\sqrt{3}$                       5)  $32\sqrt{6}$
25. ถ้าอนุกรมเรขาคณิต  $a_1 = \frac{1}{2}$  และ  $a_{10} = 256$  แล้ว ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับข้อใด
- 1) 511.0                      2) 511.5                      3) 512.0                      4) 512.5                      5) 513.0
26. ครอบครัวหนึ่งมีพ่อ แม่ และลูก 2 คน ไปเที่ยวสวนสนุกแห่งหนึ่ง ถ้าจัดคนทั้งสี่ถ่ายรูปกับรูปปั้นโดราเอมอน โดยยืนเรียงกันให้โดราเอมอนอยู่ตรงกลาง และลูกทั้งสองคนไม่ยืนติดกัน จะมีจำนวนวิธีจัดได้กี่วิธี
- 1) 8                      2) 10                      3) 12                      4) 16                      5) 18
27. กนกมีถุงเท้าสีขาว 1 คู่ สีน้ำเงิน 2 คู่ และ สีดำ 3 คู่ เขาใส่ถุงเท้าไว้ในลิ้นชักโดยไม่ได้จัดแยกเป็นคู่ ถ้าเขาลืมหยิบถุงเท้าจากลิ้นชักมา 2 ข้างแล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าสีเดียวกันมีค่าเท่ากับข้อใด
- 1)  $\frac{1}{66}$                       2)  $\frac{1}{22}$                       3)  $\frac{1}{11}$                       4)  $\frac{1}{6}$                       5)  $\frac{1}{3}$
28. ข้อใดเป็นขั้นตอนหนึ่งของการสำรวจความคิดเห็น
- 1) ตั้งสมมุติฐานของปัญหาที่ทำการสำรวจ  
2) กำหนดขอบเขตของการสำรวจ  
3) ประเมินการค่าใช้จ่ายในการสำรวจความคิดเห็น  
4) คัดเลือกผู้เก็บข้อมูลการสำรวจ  
5) นำผลการสำรวจความคิดเห็นไปใช้ประโยชน์

29. ค่ากลางของข้อมูลในข้อใดมีความเหมาะสมที่จะใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลของกลุ่ม
- 1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของขนาดรองเท้าของนักเรียนห้องหนึ่ง
  - 2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของจำนวนผู้โดยสารรถไฟใต้ดินต่อวันในเดือน มกราคม พ.ศ. 2557
  - 3) มัธยฐานของน้ำหนักตัวของคนไทยในปี พ.ศ. 2556
  - 4) ฐานนิยมของความสูงของนักกีฬาไทยที่ได้รับเหรียญทองจากการแข่งขันกีฬาโอลิมปิก
  - 5) ค่ากึ่งกลางระหว่างมัธยฐานกับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ม.6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง

30. จากแผนภาพต้น-ใบ ของข้อมูลชุดหนึ่งเป็นดังนี้

0	7	8	9	
1	0	1	5	7
2	1	2	2	
3	0	2		

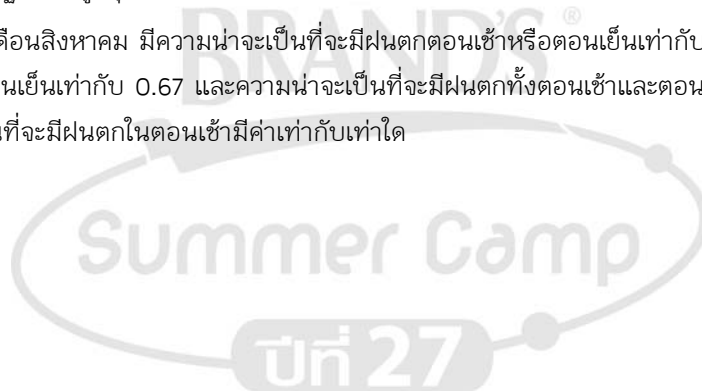
ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อสรุปที่ถูกต้องของข้อมูลชุดนี้

- 1) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 16 และมัธยฐาน = 16
  - 2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 16.5 และมัธยฐาน = 17
  - 3) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 17 และมัธยฐาน = 17
  - 4) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 17 และมัธยฐาน = 16
  - 5) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 17.5 และมัธยฐาน = 16
31. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง (เรียงจากน้อยไปมาก) เป็นดังนี้
- 29, 35, 36, 40, 41, 43, 47, 50, 56, 59  
60, 61, 63, 65, 72, 72, 74, 75, 75, 78  
78, 78, 80, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 89  
90, 90, 91, 91, 91, 92, 95, 95, 95, 97
- เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 70 ของคะแนนสอบนี้เท่ากับข้อใด
- 1) 87
  - 2) 87.5
  - 3) 87.9
  - 4) 88

32. ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงจากน้อยไปมากดังนี้ 5 10 12 20 x 26 30 42 47 y  
ถ้าข้อมูลชุดนี้มีพิสัยเท่ากับ 45 และค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 26.4 แล้ว ควอไทล์ที่สองของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใด
- 1) 20
  - 2) 21
  - 3) 23
  - 4) 24
  - 5) 25

**ตอนที่ 2 : แบบเติมคำตอบ ข้อละ 2.5 คะแนน**

33. กำหนดให้  $A = \{1,2,3\}$  และ  $B = \{2,3,5\}$   
ถ้า  $r = \{(a, b) \in A \times B \mid a \geq b - 1\}$  แล้ว  $r$  จำนวนสมาชิกมีสมาชิกกี่ตัว
34. ถ้า  $A = \{(x, y) \mid |x + 1| \leq y \text{ และ } y \leq 2\}$  แล้วพื้นที่ของบริเวณ  $A$  เท่ากับกี่ตารางหน่วย
35. จากการสอบถามความชอบรับประทานไอศกรีมของนักเรียนจำนวน 180 คน พบว่า  
มี 86 คน ชอบรสช็อกโกแลต                      มี 31 คน ชอบรสช็อกโกแลตและวานิลลา  
มี 87 คน ชอบรสวานิลลา                      มี 27 คน ชอบรสวานิลลาและสตรอปเบอร์รี่  
มี 70 คน ชอบรสสตรอปเบอร์รี่                      มี 22 คน ชอบรสช็อกโกแลตและสตรอปเบอร์รี่  
และมี 5 คนไม่ชอบทั้งหมด ดังนั้นมีนักเรียนที่ชอบทั้งสามรสกี่คน
36. ถ้านุกรมเลขคณิตมีพจน์แรกเป็น  $-8$  และมีผลบวกของ 50 พจน์แรกเป็น 3275 แล้วผลต่างร่วมมีค่าเท่ากับเท่าใด
37. แม่ค้าก๋วยเตี๋ยวชามละ 25 บาท โดยมีค่าเช่าร้านวันละ 120 บาท และต้นทุนค่าวัตถุดิบทั้งหมดคิดชามละ 18 บาท ถ้าต้องการให้ได้กำไรไม่ต่ำกว่า วันละ 500 บาท เขาต้องขายให้ได้อย่างน้อยวันละกี่ชาม
38. ห้องประชุมแห่งหนึ่งจัดที่นั่งเป็นแถวโดยนำโต๊ะมาเรียงต่อกันเป็นแถว แถวละ 5 ตัว หลังจากจัดแล้วได้ที่นั่งทั้งหมด 60 ที่นั่ง ถ้าจำนวนแถวน้อยกว่าจำนวนที่นั่งในแต่ละแถวอยู่ 4 ห้องประชุมนี้มีโต๊ะทั้งหมดกี่ตัว
39. ข้อมูลชุดที่หนึ่งมี 10 จำนวน คือ  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$  ซึ่งข้อมูลชุดนี้มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.3 ถ้าข้อมูล ชุดที่สองมี 10 จำนวน คือ  $3x_1 + 174, 3x_2 + 174, 3x_3 + 174, \dots, 3x_{10} + 174$  แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานข้อมูลชุดที่สองนี้จะเท่ากับเท่าใด
40. ถ้าแต่ละวันในเดือนสิงหาคม มีความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกตอนเช้าหรือตอนเย็นเท่ากับ 0.86 ความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกตอนเย็นเท่ากับ 0.67 และความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกทั้งตอนเช้าและตอนเย็นเท่ากับ 0.35 แล้วความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกในตอนเช้ามีค่าเท่ากับเท่าใด



## ชุดที่ 2

36. Sup'k-Pb 2.1 กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องกับ

(1)  $a^2 + b^2 \leq 90$     (2)  $a + b = 5 + c$     (3)  $a > 8$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $a + 2b + 3c \leq 36$

(ข) ค่ามากที่สุดของ  $a^3 + b^3 + c^3$  เท่ากับ 1085

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

37. Sup'k-Pb 2.2 Find the solution of  $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$

จงหาเซตคำตอบของ  $2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}$

ตอบ .....

38. Sup'k-Pb 2.3 The solution of  $||x| - 1| < |1 - x|$

จงหาเซตคำตอบของ  $||x| - 1| < |1 - x|$

ตอบ .....

39. Sup'k-Pb 2.4 กำหนดให้  $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^5 - 2x^4 - 7x^3 + x = 10\}$ ,  $B = \{2\}$

และ  $C = \left\{\frac{2}{3}\right\}$  จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $A \cup B \neq P(A)$

ข.  $\{A, A - C\} \in P(P(A))$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. และ ข. เป็นจริง

2) ก. เป็นจริง และ ข. เป็นเท็จ

3) ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นจริง

4) ก. และ ข. เป็นเท็จ

40. Sup'k-Pb 2.5 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| + ||x| - |y|| = |x + y| + |x - y|$

ข.  $\forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{x + y - |x - y|}{2} \leq x \leq \frac{x + y + |x - y|}{2}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) ก. และ ข. เป็นจริง

2) ก. เป็นจริง และ ข. เป็นเท็จ

3) ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นจริง

4) ก. และ ข. เป็นเท็จ

41. Sup'k-Pb 2.6 กำหนดการดำเนินการ \* บนเซตของจำนวนจริง เป็นไปตามกฎต่อไปนี้

ก.  $2 * 2 = \frac{3}{2}$

ข.  $2a * b = (a * b) + \frac{1}{2}$  ทุกจำนวนจริงบวก a และ b

ค.  $a^2 * b = b^2 * a$  ทุกจำนวนจริงบวก a และ b

จงพิจารณาว่า  $1 * 1$  มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 0                                      2)  $\frac{1}{2}$                                       3) 1                                      4)  $\frac{3}{2}$

42. Sup'k-Pb 2.7 กำหนดความสัมพันธ์  $r_1$  และ  $r_2$  ดังต่อไปนี้

$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log_{2556} (2x + y) + xy = 3y + 3\}$

$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 4x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x + 8y + 5 = 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1)  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$                                       2)  $r_1 \subseteq r_2$                                       3)  $r_2 \subseteq r_1$                                       4)  $r_1 \cup r_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

43. Sup'k-Pb 2.8 ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$2 + \sqrt{2^{2x+y+1} - 16^x - 4^y} = \log_3 (x + y)$$

แล้ว  $x^2 + y$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 3                                      2) 8                                      3) 15                                      4) 24

44. Sup'k-Pb 2.9 ให้  $A = \{x \mid 2^{x+3} > 4\}$

$B = \{x \mid 2 \cdot \log(x + 3) < \log(5x + 15)\}$  และ  $C = \{x \in I \mid x \in A \cap B\}$  จงหา  $n(P(C))$

ตอบ .....

45. Sup'k-Pb 2.10 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. มีจำนวนจริงบวก  $a \neq b$  ซึ่งสอดคล้องกับสมการ  $a + \frac{1}{\sqrt{b}} = b + \frac{1}{\sqrt{a}}$

ข. มีจำนวนจริงบวก  $a \neq b$  ซึ่งสอดคล้องกับสมการ  $a - \frac{1}{\sqrt{b}} = b - \frac{1}{\sqrt{a}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. และ ข. เป็นจริง                                      2) ก. เป็นจริง และ ข. เป็นเท็จ  
3) ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นจริง                                      4) ก. และ ข. เป็นเท็จ

46. Sup'k-Pb 2.11 กำหนดให้  $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$  ถ้า  $\tan(2\theta) = \frac{m}{n}$  โดยที่  $m, n \geq 0$

แล้วข้อใดต่อไปนี้ตรงกับค่าของ  $\tan \theta$

- 1)  $\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$                                       2)  $\frac{n + \sqrt{n^2 + m^2}}{m}$                                       3)  $\frac{m}{n + \sqrt{n^2 + m^2}}$                                       4) ไม่มีข้อใดถูกต้อง



47. Sup'k-Pb 2.12 จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ  $p + q$   
เมื่อ  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง  $p + q$  หาร  $pq$  ลงตัว  
ตอบ .....
48. Sup'k-Pb 2.13 กำหนดให้  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก 100 จำนวนเรียงติดกัน  
จงหาค่าน้อยที่สุดที่เป็นจำนวนเต็มของ  $\sqrt{a_2 + a_3 + \dots + a_{99}} - \sqrt{a_1 + a_{100}}$   
ตอบ .....
49. Sup'k-Pb 2.14 Find the value of  $\cos \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \dots \cdot \cos \frac{32\pi}{65}$   
จงหาค่าของ  $\frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \dots \cdot \cos \frac{32\pi}{65}$   
ตอบ .....
50. Sup'k-Pb 2.15 If  $\tan x + \cot x = 2$ ,  
then the value of  $\sin x + \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x + \dots + \sin^{25} x + \cos^{25} x$   
กำหนดให้  $\tan x + \cot x = 2$   
จงหาค่าของ  $\sin x + \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x + \dots + \sin^{25} x + \cos^{25} x$   
1)  $\frac{1}{2}$                       2)  $\frac{1}{3}$                       3)  $\frac{2}{3}$                       4) ไม่มีข้อใดถูกต้อง
51. Sup'k-Pb 2.16 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC  
ซึ่งมีด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ  $a, b, c$  ตามลำดับ  
ถ้า  $b^2 + c^2 - bc = a^2$  และ  $\frac{c}{b} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$  แล้ว  $\tan B$  มีค่าเท่ากับเท่าใด  
ตอบ .....
52. Sup'k-Pb 2.17 รูปสามเหลี่ยม ABC มี  $\angle ACB$  กาง  $45^\circ$   
ให้ D เป็นจุดบนด้าน AC ซึ่งทำให้  $AD = (2 + 2\sqrt{3})DC$   
ถ้า  $\angle ACB$  กาง  $60^\circ$  แล้ว  $\vec{AB} \cdot \vec{DB}$  มีค่าเท่ากับเท่าใด  
ตอบ .....
53. Sup'k-Pb 2.18 ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งสอดคล้องกับสมการ  
 $\sin(2A - B) + \sin(2B - C) + \sin(2C - A) = 0$   
แล้ว  $\cos(2A - B) + \cos(2B - C) + \cos(2C - A)$  มีค่าเท่ากับเท่าใด  
ตอบ .....
54. \*Sup'k-Pb 2.19 กำหนดให้  $A = \left\{ \cos x + \cos y : \tan x \cdot \tan y = 2, x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$   
จงเขียนเซต A ในรูปของช่วง  
ตอบ .....

55. \*Sup'k-Pb 2.20 จงหาสามสิ่งอันดับ (a, b, p) ทั้งหมดซึ่ง a, b เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ และสอดคล้อง

$$\frac{a}{1+b} - \frac{b}{1+a} = \frac{p^2}{1+a+b+ab}$$

ตอบ .....

56. Sup'k-Pb 2.21 ในตารางข้างล่างนี้ ถ้าผลบวกของแต่ละแถว ผลบวกของแต่ละหลัก และผลบวกของแนวทแยงมุมทั้งสองเท่ากันหมด จงหาค่าของ  $a + b + c + d + e + f$

a	b	6
c	d	e
f	7	2

ตอบ .....

57. Sup'k-Pb 2.22 ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ  $\log(x+1) = 3 \log 2$  และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ  $2^y = \frac{1}{8}$  แล้ว x + y มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) 1                                      2) 2                                      3) 4                                      4) 5

58. Sup'k-Pb 2.23 กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ  $3^x = 2^{x^2}$  และ  $B = \{2x \mid x \in A\}$  แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของเซต B มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ .....

59. Sup'k-Pb 2.24 กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์

ถ้า  $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$  มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีความจริงเป็นจริง

- 1)  $\sim(p \rightarrow s)$                       2)  $p \wedge r$                               3)  $\sim(r \rightarrow q)$                       4)  $q \leftrightarrow s$

60. Sup'k-Pb 2.25 กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ  $\frac{3-2x}{1-|1-x|} \geq 0$  ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1)  $A' \cap [2, 3) \neq \emptyset$                               2)  $A' \subset (-\infty, 0)$   
3)  $A \cap (1, 2) = \emptyset$                               4)  $A \subset (1, \infty)$

61. Sup'k-Pb 2.26 จงหาผลบวกของสมาชิกใน A

เมื่อ  $A = \{a \in \mathbb{I}^+ \mid a \geq 3 \text{ และ } a - 2 \text{ เป็นตัวประกอบของ } 3a^2 - 2a + 10\}$

ตอบ .....

62. Sup'k-Pb 2.27 ให้ C เป็นวงกลม  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  มีจุดศูนย์กลางอยู่ในจุดภาคที่ 1 และ สัมผัสแกน Y ให้ P เป็นพาราโบลา  $Dx = y^2 + Ey + F$  ที่ผ่านจุด  $(-4, -1)$  และระยะระหว่างจุดยอดกับ โฟกัสเท่ากับ 1 หน่วย

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $D^2 + E^2 + F^2 = 133$

(ข) เส้นตรง  $4x + 3y - 7 = 0$  สัมผัสกับวงกลม C

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2) (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3) (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4) (ก) ผิด และ (ข) ผิด

63. Sup'k-Pb 2.28 ให้ C เป็นวงกลมที่มีสมการเป็น  $x^2 + y^2 = 4$  และ l เป็นเส้นสัมผัสวงกลม C ที่จุดใน จุดภาค (Quadrant) ที่ 1 และ l ผ่านจุด  $(5, 0)$  จงหาความชันของ l

ตอบ .....

64. Sup'k-Pb 2.29 ถ้า  $F_1$  และ  $F_2$  เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา  $\frac{(y - 20)^2}{5} - \frac{(x + 11)^2}{4} = 1$  แล้ว ส่วนของเส้นตรง  $F_1F_2$  มีความยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 1 หน่วย

2) 2 หน่วย

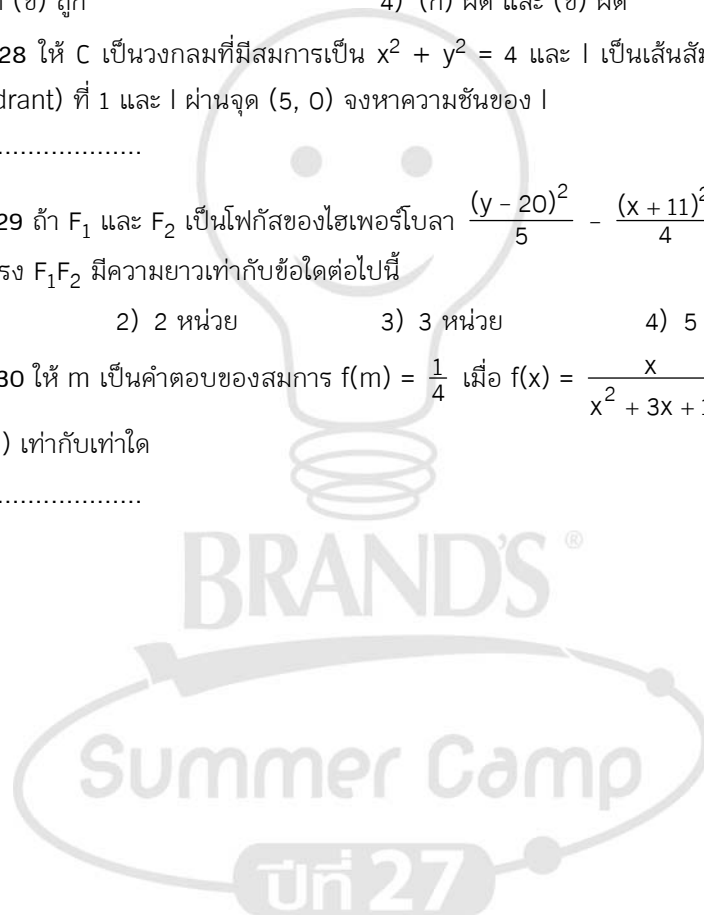
3) 3 หน่วย

4) 5 หน่วย

65. Sup'k-Pb 2.30 ให้ m เป็นคำตอบของสมการ  $f(m) = \frac{1}{4}$  เมื่อ  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$  แล้ว

จงหา  $4 \cdot f(m^2)$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ .....



### ชุดที่ 3

71. กล่องใบหนึ่งบรรจุสลาก 10 ใบ แต่ละใบมีตัวเลขกำกับไว้ มีสลาก 5 ใบที่ตัวเลขกำกับเป็นจำนวนลบ และอีก 5 ใบที่ตัวเลขกำกับเป็นจำนวนบวก ถ้าสุ่มหยิบสลากจากกล่องนี้มา 4 ใบ ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของตัวเลขที่กำกับสลากทั้งสี่ใบเป็นจำนวนลบ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1)  $\frac{10}{21}$                       2)  $\frac{11}{21}$                       3)  $\frac{13}{21}$                       4)  $\frac{17}{21}$
72. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย 9 จำนวน ดังนี้ 185 180 190 175 193 187 y 200 199 ถ้า y เป็นเดซิมาลที่ 6 ของข้อมูลชุดนี้แล้ว หากสุ่มข้อมูลจากชุดนี้มา 5 จำนวน ความน่าจะเป็นที่ข้อมูล 5 จำนวนนี้มีค่ามัธยฐานเป็น y เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1)  $\frac{2}{21}$                       2)  $\frac{4}{21}$                       3)  $\frac{5}{21}$                       4)  $\frac{8}{21}$
73. กำหนดให้  $a_n$  เป็นลำดับลู่อเข้า และ  $b_n$  เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมไม่เท่ากับ 0 ถ้า  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( a_n + \frac{1}{b_n} \right)^2 + \frac{a_n b_n - b_{n+1}}{b_n} \right] = 0$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1)^2$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) 1                      2) 2                      3) 4                      4) 5
74. กำหนดให้  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  เป็นข้อมูล 11 จำนวนซึ่งเรียงค่าจากน้อยไปมาก ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับมัธยฐาน และมีส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ 5.2 โดยที่  $\sum_{i=1}^5 x_i = 42.8$  แล้ว  $\sum_{i=6}^{11} x_i$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) 100                      2) 114.28                      3) 142.80                      4) 157.20
75. ค่าของ  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \min\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}\right) + \max\left(\frac{1}{(-2)^n}, \frac{1}{3^n}\right) \right)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1)  $\frac{13}{9}$                       2)  $\frac{41}{24}$                       3)  $\frac{3}{2}$                       4) -2
76. คะแนนสอบของนักเรียน 2 กลุ่ม จำนวน 7 คนและ 5 คน ซึ่งได้มีการเรียงลำดับคะแนนจากน้อยไปมาก ดังนี้
- กลุ่มที่ 1 : 2 3.6 4.5 5.5 6 7 8  
กลุ่มที่ 2 : 2 2 5 5.4 a 8
- ถ้าส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งสองกลุ่มเท่ากันแล้ว ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง
- 1)  $5.5 \leq a \leq 6.0$                       2)  $6.1 \leq a \leq 6.6$                       3)  $6.7 \leq a \leq 7.2$                       4)  $7.3 \leq a \leq 7.9$
77. คะแนนสอบแข่งขันครั้งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยที่สัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ 0.5 ค่ามาตรฐานของคะแนนสอบของนาย ก. และนาย ข. เท่ากับ 1 และ 1.5 ตามลำดับ ถ้านาย ก. สอบได้ 45 คะแนนแล้วนาย ข. สอบได้กี่คะแนน

78. คะแนนสอบของนักเรียนของห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยที่ 12.3% ของนักเรียนสอบได้คะแนนตั้งแต่ 86 คะแนนขึ้นไป 50% ของนักเรียนสอบได้คะแนนตั้งแต่ 74.4 คะแนนขึ้นไป ถ้าพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานเป็น  $Z(1.00) = 0.3413$ ,  $Z(1.16) = 0.3770$ ,  $Z(2.04) = 0.4793$ ,  $Z(3.09) = 0.4990$  แล้วเปอร์เซ็นต์ของนักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 54 คะแนน มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) 2.00                      2) 2.04                      3) 2.07                      4) 2.10
79. ถ้าในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนปีที่มีประสบการณ์การขาย (X) และรายได้ต่อปี (Y) (หน่วยเป็นหมื่นบาท) ของพนักงานขายสินค้าชนิดหนึ่งโดยใช้ข้อมูลจากพนักงาน 6 คน ได้สมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีรูปสมการเป็น  $Y = a + bX$  คือ
- $$42 = 6a + 12b$$
- $$96 = 12a + 28b$$
- พนักงานผู้ที่มีประสบการณ์การขาย 5 ปี จะมีรายได้ต่อปีโดยประมาณเท่าใด (หน่วยเป็นหมื่นบาท)
80. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า  $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & , x \geq 1 \\ ax^3 + bx^2 + x & , x < 1 \end{cases}$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ที่จุด  $x = 1$  แล้ว  $f(-1)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) -6                      2) -4                      3) 0                      4) 4
81. กำหนดให้  $f(x) = x^3 - 3x + 6$  ถ้า P เป็นจุดบนกราฟของ  $y = f(x)$  ที่ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f แล้วเส้นตรงที่ผ่านจุด P และจุด (2, 6) มีความชันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) -1                      2) -2/3                      3) 2/3                      4) 2
82. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย  $f(x) = \begin{cases} \frac{16-x^2}{x-4} & , x > 4 \\ kx^2 + x - 2 & , x \leq 4 \end{cases}$  ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 4$  แล้ว  $(f \circ f')(5)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1) 1.50                      2) 1.75                      3) 2.00                      4) 2.25
83. กำหนดให้  $f''(x) = ax$  เมื่อ a เป็นค่าคงตัว ถ้าเส้นตรง  $2x + y - 6 = 0$  สัมผัสกับกราฟของ f ที่จุด (1,4) และ  $f(0) = 8$  แล้ว  $\int_0^1 f(x)dx$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 1)  $\frac{22}{4}$                       2)  $\frac{23}{4}$                       3)  $\frac{42}{4}$                       4)  $\frac{43}{4}$

84. โรงงานแห่งหนึ่งต้องการผลิตสินค้า 2 ชนิด จากวัตถุดิบ 3 ประเภท โดยมีข้อมูลเกี่ยวกับปริมาณวัตถุดิบแต่ละประเภทที่ต้องใช้ในการผลิตแต่ละชิ้นของสินค้าแต่ละชนิด ตามตารางต่อไปนี้

วัตถุดิบประเภท	ปริมาณวัตถุดิบที่ต้องใช้ในการผลิตแต่ละชิ้นของ	
	สินค้าชนิดที่ 1	สินค้าชนิดที่ 2
A	2	1
B	1	1
C	1	0

ถ้าโรงงานนี้มีวัตถุดิบประเภท A, B, C อยู่เป็นปริมาณทั้งหมด 15, 12, 5 หน่วย ตามลำดับ และราคาขายต่อชิ้นของสินค้าชนิดที่ 1, ชนิดที่ 2 คือ 1.50 บาท และ 1 บาท ตามลำดับ ดังนั้นเพื่อให้ได้รายได้มากที่สุดจากการขายสินค้าทั้งสองชนิด

- ก. โรงงานนี้ควรผลิตสินค้าชนิดที่ 1 จำนวนเท่าใด และชนิดที่ 2 จำนวนเท่าใด  
ข. ภายหลังจากผลิตจะมีวัตถุดิบเหลืออยู่ทั้งหมดเท่าใด

85. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้าสองชนิด ชนิดแรกผลิตจำนวน  $x$  ชิ้น ราคาขายชิ้นละ 400 บาท ชนิดที่สองผลิตจำนวน  $y$  ชิ้น ราคาขายชิ้นละ 200 บาท โดยมีสมการข้อจำกัด คือ

$$3x + y \geq 6$$

$$x + 3y \geq 6$$

$$x + y \leq 4$$

แล้วโรงงานแห่งนี้จะขายสินค้าทั้งสองชนิดได้เงินสูงสุดกี่บาท

86. พื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง  $y = x^3 - 4x$  และแกน X เมื่อ  $x$  อยู่ในช่วง  $[-2, 1]$  มีค่าเท่าใด

87. ผลรวมอนุกรม  $\sum_{k=1}^{999} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$  มีค่าเท่าใด

88. กำหนดให้  $z_1, z_2, \dots, z_{2558}$  เป็นรากของสมการ  $z^{2559} - 1 = 0$  ที่แตกต่างกันทั้งหมด และไม่ใช่ 1 จงหาค่าของ  $(2 - z_1)(2 - z_2)(2 - z_3) \dots (2 - z_{2558})$

89. กำหนดให้  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง  $|z_1 + z_2| = |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| = 3$  ถ้า  $|z_2| = 2$  แล้ว  $|z_1 - 2z_2|^2$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 18                                      2) 19                                      3) 20                                      4) 21

90. กำหนดให้  $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  เมื่อ  $-1 < x < 1$  ถ้า  $\int f(x)dx = A$  แล้ว  $\int f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)dx$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 2A                                      2) 3A                                      3)  $A^2$                                       4)  $A^3 - A$

91. กำหนดให้ลำดับ  $a_n$  สอดคล้องกับสมการ  $\frac{2a_1}{3} + a_2 + \frac{4a_3}{3} + \dots + \frac{(n+1)a_n}{3} = \frac{n+2}{n+3}$   
 เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับ ค่าของ  $\sum_{n=8}^{\infty} 21a_n$  เท่ากับข้อใด  
 1)  $\frac{63}{220}$                       2)  $\frac{7}{20}$                       3)  $\frac{119}{40}$                       4)  $\frac{105}{4}$
92. จงหาผลบวกของอนุกรม  $\log_a 2\sqrt[3]{b} + \log_a 4\sqrt[9]{b^7} + \log_a 8\sqrt[27]{b^{37}} + \log_a 16\sqrt[81]{b^{175}} + \dots$  เมื่อ  $a, b > 0$   
 1)  $\frac{4}{3} \log_a b$                       2)  $\log_a b$                       3)  $\frac{1}{2} \log_a b$                       4)  $\frac{1}{3} \log_a b(48)$
93. ถ้า  $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin \theta$  แล้ว ผลบวก  $n$  พจน์ของอนุกรม  $\sum_{k=1}^n (e^{i(2k-1)x} - e^{-i(2k-1)x})$  เมื่อ  $x \neq 0$   
 มีค่าเท่ากับเท่าใด  
 1)  $\frac{2i \sin nx}{\sin x}$                       2)  $\frac{2i \sin^2 nx}{\sin x}$                       3)  $\frac{2i \sin^3 nx}{\sin x}$                       4)  $\frac{2i \sin^4 nx}{\sin x}$
94. กำหนดให้  $1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{64} + \dots$  เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ จงหาผลบวกของค่า  $x$  ทั้งหมด  
 ที่สอดคล้องกับสมการ  $10^{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{64} + \dots} - 10^{8x^2 + 9x - 2} = 0$
95. สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$  กราฟพาราโบลา  $y = (n^2 + 3n + 2)x^2 - (2n + 3)x + 1$  ตัดแกน  $X$  ที่จุด  
 $(a_n, 0)$  และจุด  $(b_n, 0)$  ค่าของ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  เท่ากับเท่าใด  
 1) 1                      2)  $\frac{1}{2}$                       3)  $\frac{3}{4}$                       4)  $\frac{2}{3}$
96. จงหาว่าลำดับเลขคณิตทั้งหมดที่เป็นลำดับเพิ่ม ที่มีสามพจน์และแต่ละพจน์เป็นสมาชิกของ  $\{1, 2, 3, \dots, 19\}$   
 มีทั้งหมดกี่ลำดับ
97. กำหนดให้  $A = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$  และ  $S$  เป็นสับเซตของ  $A$  ซึ่งผลบวกของสมาชิกสองตัวใดๆ ที่ต่างกัน  
 ใน  $S$ หารด้วย 7 ไม่ลงตัวแล้ว  $S$  มีจำนวนสมาชิกได้มากที่สุดเท่าใด
98. กำหนดให้  $X = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$  และ  
 $Y = \{(A, B) \mid A, B \text{ เป็นสับเซตของ } X, A \cup B = X \text{ และ } A \cap B = \{1\}\}$   
 จำนวนสมาชิกของเซต  $Y$  เป็นเท่าใด  
 1)  $2^9$                       2)  $2^9 \times 2^9$                       3)  $2^{10}$                       4)  $2^9 \times 2^{10}$
99. ให้  $P_0(x) = x^3 + 696x^2 - 95x - 10$  นิยาม  $P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$  สำหรับจำนวนเต็มบวก  $n$   
 สัมประสิทธิ์ของ  $x$  ใน  $P_{30}(x)$  มีค่าเท่ากับเท่าใด
100. กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนเต็ม จงหาจำนวนคู่อันดับ  $(a, b)$  ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้  
 1.  $f(x) = \frac{x^5 - 3x^3 + a^2x - 10}{x^3 + b^2x - 16}$ ,  $f(2) = 0$   
 และ 2.  $|a - b| \leq 4$

101. ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลชุดหนึ่งระหว่างตัวแปร  $x$  และ  $y$  มีกราฟเป็นเส้นตรง

$$\text{โดยที่ } \sum_{i=1}^8 x_i = 32, \sum_{i=1}^8 y_i = 16, \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 65, \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 140, \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 34$$

ถ้า  $x = 8$  แล้ว จะประมาณค่า  $y$  ได้เท่าใด

102. ถ้า  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ  $|z| + 2z + i = 0$  แล้ว

ส่วนจินตภาพของ  $z$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $-1$                       2)  $\sqrt{2}$                       3)  $\sqrt{2} - 1$                       4)  $1 - \sqrt{2}$

103. จงหาค่าลิมิตของลำดับ  $a_n = \sqrt{n^2 + 1150n + 2558} - \sqrt{n^2 + 1112n + 2015}$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$

104. กำหนดให้  $I(a) = \int_{-a}^a (x^2 - 1) dx$  สำหรับ  $a \in [0, \infty)$  ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีความจริงเป็นจริง

เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือช่วง  $[0, \infty)$

- 1)  $\forall a [I(a) > 0]$                       2)  $\forall a [(I(a) = 0) \Rightarrow (a = 0)]$   
3)  $\exists a [(a > 2) \wedge (I(a) = 0)]$                       4)  $\exists a [(a \neq 0) \wedge (I(a) = 0)]$

105. กำหนดให้  $f(x) = \frac{4x^2 + 8x + 13}{6(1+x)}$  เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก.  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $(0, 2)$

ข. ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ  $f$  เท่ากับ  $\frac{25}{12}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ก. ถูก และ ข. ถูก                      2) ก. ถูก แต่ ข. ผิด                      3) ก. ผิด แต่ ข. ถูก                      4) ก. ผิด และ ข. ผิด



## เฉลย

### ชุดที่ 1

#### ตอนที่ 1

- |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1. 5)  | 2. 5)  | 3. 1)  | 4. 2)  | 5. 4)  |
| 6. 4)  | 7. 3)  | 8. 4)  | 9. 3)  | 10. 5) |
| 11. 3) | 12. 1) | 13. 2) | 14. 1) | 15. 3) |
| 16. 1) | 17. 3) | 18. 1) | 19. 5) | 20. 5) |
| 21. 2) | 22. 5) | 23. 1) | 24. 3) | 25. 2) |
| 26. 4) | 27. 5) | 28. 2) | 29. 2) | 30. 4) |
| 31. 3) | 32. 4) |        |        |        |

#### ตอนที่ 2

- |        |         |          |       |        |
|--------|---------|----------|-------|--------|
| 33. 5  | 34. 4   | 35. 12   | 36. 3 | 37. 89 |
| 38. 30 | 39. 6.9 | 40. 0.54 |       |        |

### ชุดที่ 2

36. Sup'k-Pb 2.1 ตอบ 2)

37. Sup'k-Pb 2.2 ตอบ  $(-\infty, \log_2(\sqrt{2}-1)] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$

38. Sup'k-Pb 2.3 ตอบ  $(-\infty, 0)$

39. Sup'k-Pb 2.4 ตอบ 3)

40. Sup'k-Pb 2.5 ตอบ 1)

41. Sup'k-Pb 2.6 ตอบ 1)

42. Sup'k-Pb 2.7 ตอบ 3)

43. Sup'k-Pb 2.8 ตอบ 3)

44. Sup'k-Pb 2.9 ตอบ 4

45. Sup'k-Pb 2.10 ตอบ 3)

46. Sup'k-Pb 2.11 ตอบ 3)

47. Sup'k-Pb 2.12 ตอบ 4

48. Sup'k-Pb 2.13 ตอบ 66

49. Sup'k-Pb 2.14 ตอบ  $\frac{1}{64}$

50. Sup'k-Pb 2.15 ตอบ 4)
51. Sup'k-Pb 2.16 ตอบ  $\frac{1}{2}$
52. Sup'k-Pb 2.17 ตอบ 0
53. Sup'k-Pb 2.18 ตอบ  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
54. Sup'k-Pb 2.19 ตอบ  $\left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
55. Sup'k-Pb 2.20 ตอบ  $(-3, 1, 2), (-3, -2, 2), (2, 1, 2), (2, -2, 2)$
56. Sup'k-Pb 2.21 ตอบ 12
57. Sup'k-Pb 2.22 ตอบ 3)
58. Sup'k-Pb 2.23 ตอบ 4
59. Sup'k-Pb 2.24 ตอบ 1)
60. Sup'k-Pb 2.25 ตอบ 1)
61. Sup'k-Pb 2.26 ตอบ 51
62. Sup'k-Pb 2.27 ตอบ 1)
63. Sup'k-Pb 2.28 ตอบ  $-\frac{2}{\sqrt{21}}$
64. Sup'k-Pb 2.29 ตอบ 4)
65. Sup'k-Pb 2.30 ตอบ 2

### ชุดที่ 3

71. 1)                      72. 3)                      73. 4)                      74. 2)                      75. 1)
76. 1)                      77. 52.5                      78. 3)                      79. 16                      80. 2)
81. 2)                      82. 4)                      83. 2)
84. ก. ผลิตรสินค้าชนิดที่ 1 จำนวน 3 ชิ้น ผลิตรสินค้าชนิดที่ 2 จำนวน 9 ชิ้น  
ข. เหลือวัตถุดิบประเภท C อยู่ 2 หน่วย
85. 900                      86. 5.75                      87. 999.999                      88.  $2^{2559} - 1$                       89. 4)
90. 2)                      91. 2)                      92. 2)                      93. 2)                      94.  $\frac{2}{3}$
95. 2)                      96. 81 ลำดับ                      97. 23                      98. 1)                      99. 1300
100. 14 คู่อันดับ                      101. 2.33                      102. 4)                      103. 1131                      104. 4)
105. 4)

